令和４年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　　意　　事　　項

1　問題は，１ページから６ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。

2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。

3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。

4　解答用紙には，選択した問題の問題番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。

5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，賞を授与することがあります。

6　必要があれば，定規，コンパス，はさみ，電卓を用いることができます。

7　コンテスト終了後，解答用紙４枚をすべて提出してください。

1　トランプのスペード 13 枚とジョーカー 1 枚の，合計 14 枚のカードがある。すべてのカードを表にして，ジョーカーを取らないようにしながら 2 人で順番に何枚かずつカードを取り，最後にジョーカーを取った方が負けとなるゲームを行う。以下の【ルール】にしたがって，あなたと A さんでゲームを行うとき，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

【ルール】
①　1 回につき，1 枚～ 4 枚のカードを取ることができる。
②　直前の番の人が取ったカードの枚数と，同じ枚数を取ることはできない。
　　ただし，残りが 1 枚となったときは，必ずその 1 枚を取らなければならない。

(1)　9 枚残っているカードから A さんが 2 枚取り，残り 7 枚の状況であなたの番になったとする。A さんがその後どのような取り方をしたとしても，あなたが必ず勝つためには，残り 7 枚からあなたは何枚取ればよいか。その理由を含めて答えなさい。

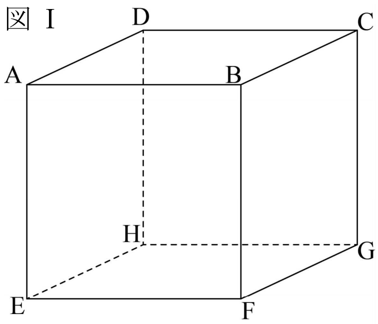
(2)　14 枚のカードでゲームを始め，あなたが先手か後手のどちらかを選べるものとする。あなたが必ず勝てる方法があれば，その手順を示しなさい。あなたが必ず勝てる方法がなければ，その理由を示しなさい。

2 図Ⅰのような，一辺の長さが4の立方体ABCD - EFGHにおいて，この立方体の辺上（頂点を含む）から，同一の辺上にない3点を選び，この3点を通る平面で切ったときにできる断面について考える。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

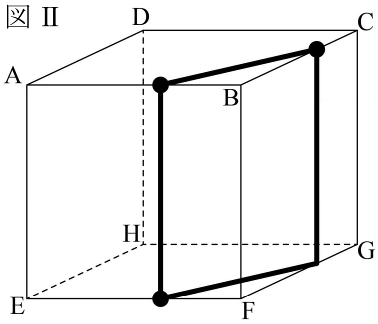
(1) 断面として現れる図形が，次の①～③の図形となるためには，どのように切ればよいか。解答用紙に図Ⅰのような立方体の見取り図をそれぞれ示した上で，図Ⅱを参考にして，辺上の3点と切り口となる線分をかき込み，どのような3点を選べばよいかについても説明しなさい。
　ただし，①～③の中で切り出すことのできない図形がある場合，その図形については「不可能」と答え，なぜ切り出すことができないのかについて，その理由を説明しなさい。

① 正三角形　② 正五角形　③ 正六角形

図Ⅰ



図Ⅱ



次に，立方体ABCD - EFGHの辺AD上に，AP = 3となる点Pを，辺EF上にEQ = tとなる点Qを，辺FG上にGR = tとなる点Rをそれぞれとり，3点PQRを通る平面をαとする。ただし，$0 < t < 4$とする。

(2) $t = 2$とするとき，平面αで切った断面として現れる図形の名称を答えなさい。

(3) 点Dを通り，平面αに平行な平面βでこの立方体を切る。平面βで切ったときに断面として現れる図形は，tの値によってどのように変化するか，説明しなさい。

3　ある「鍵」を解除する方法について考える。

この鍵は，図Ⅰのように，N×Nの正方形のマス目のそれぞれにボタンがついており，ボタンには図のような順番で番号が振られている。この鍵は，以下の2つの条件をともに満たすと，解除される。

【条件】

① 押すボタンの数が，ちょうどN個である。

② 押したボタンのうち，どの2つを選んでも，縦，横，斜めのいずれにも並んでいない（斜めとは，正方形の対角線と平行な方向とする）。

例えば，図Ⅰの押し方（○の付いた数字が押したボタンを示す）をすると鍵は解除されるが，図Ⅱのような押し方では，23と30，また23と33が斜めに並んでいるため，解除することができない。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

ただし，ボタンの押し方を示す際は，番号の小さい順に並べて，（1，2，3，4）のように答えること。また，必要があれば【参考】に示した図を用いて考えてよい。

(1)　N＝4とする。鍵を解除できるボタンの押し方を，1つ答えなさい。

(2)　N＝5とする。鍵を解除できるボタンの押し方を，すべて答えなさい。

ただし，解答を求める過程についても，詳しく説明すること。

【参考】

N＝4の鍵

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

N＝5の鍵

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

図Ⅰ

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

図Ⅱ

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

4　xy 平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を「格子点」と呼び，すべての頂点が格子点であるような三角形を「格子三角形」と呼ぶ。格子三角形の内部（辺上にある点を<u>含まない</u>）にある格子点の個数を I，辺上（頂点を<u>含む</u>）にある格子点の個数を B とすると，格子三角形の面積 S は次の（＊）の式で求められることが知られている。後の (1)〜(3)の問いに答えなさい。

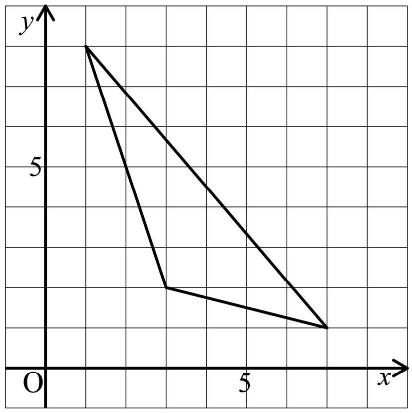
$$S = I + \frac{1}{2}B - 1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

(1)　（＊）を用いて，図Ⅰで示した三角形の面積を求めなさい。
　ただし，I，B の値をそれぞれ明らかにすること。

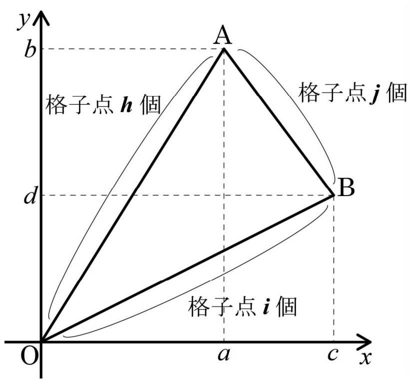
(2)　図Ⅱの△OAB は，O(0，0)，A(a，b)，B(c，d) であり，a，b，c，d は自然数で，$a < c$，$d < b$ である。辺 OA，OB，AB 上にある，<u>両端の点を除いた</u>格子点の個数を，それぞれ，h 個，i 個，j 個として，△OAB について（＊）が成り立つことを示しなさい。

(3)　(2)の考え方を用いると，xy 平面上にあるどのような格子三角形についても，（＊）が成り立つことを示すことができる。
　すべての頂点が格子点であるような四角形を「格子四角形」と呼ぶとき，「どのような格子三角形についても（＊）が成り立つ」ことを用いて，<u>どのような格子四角形についても（＊）が成り立つ</u>ことを示せ。

図Ⅰ



図Ⅱ



5　A さん，B さん，C さんの 3 人が，おそろいの洋服を 1 着ずつ購入しようとしている。各家庭までの配送料を含めて代金を計算すると，A さん，B さん，C さんの 3 人組で同時に注文する場合，合計で 5900 円かかるという。

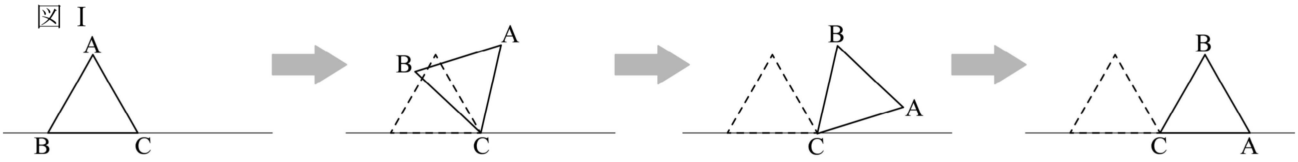
3 人組での注文をせず，A さんが単独で注文する場合は 1800 円，B さんが単独で注文する場合は 2100 円，C さんが単独で注文する場合は 2900 円かかり，A さんと B さんの 2 人組で注文する場合は 3600 円，B さんと C さんの 2 人組で注文する場合は 4400 円，C さんと A さんの 2 人組で注文する場合は 3800 円かかることが分かっている。

いま，A さん，B さん，C さんが 3 人組で同時に注文しようとしており，3 人が支払う合計額が 5900 円となるよう，それぞれの分担額を相談している。それぞれの分担額を決めたときに，1 人または 2 人組で支払った方が得だと判断できる場合，その 1 人または 2 人組は，3 人組での注文をやめてしまう（例えば，A さんの分担額が 2000 円の場合，A さんは 3 人組での注文をやめてしまう）。

3 人組での注文をやめてしまう人が出ないように分担額を決めるとき，A さん，B さん，C さんは，それぞれいくら支払うべきか，理由を含めて答えなさい。

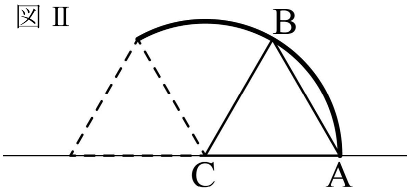
6　図Ⅰのように，1 辺の長さが 2 の正三角形が，ある直線に接しながら，滑ることなく回転している。正三角形の 1 辺が接している直線を離れ，次の辺が直線に接するまでの動作を「1 回だけ転がる」と呼ぶことにする。図Ⅰは，1 回だけ転がったときの例である。また，図形が転がるときに，図形上のある点 A が通った道筋を「点 A の軌跡」と呼ぶことにする。図Ⅱの太線は，図Ⅰで正三角形が 1 回だけ転がったときの「点 A の軌跡」を表している。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

図Ⅰ



（1 回だけ転がった）

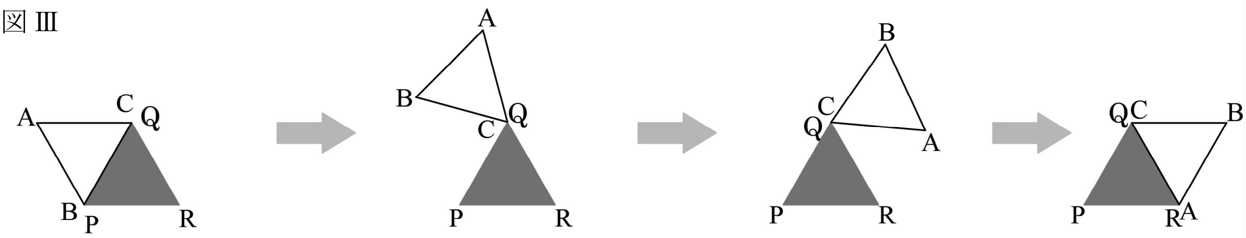
図Ⅱ



(1)　図Ⅰの最初の状態から正三角形が 3 回だけ転がったとき，点 A の軌跡の長さを求めなさい。

次に，1 辺の長さが 2 の正三角形が，同じ大きさの正三角形の辺に接しながら，滑ることなく回転する場合を考える。図Ⅲは，辺 BC と辺 PQ が接している正三角形 ABC と正三角形 PQR について，△ PQR を固定して，△ ABC が「1 回だけ転がる」様子を示した例である。

図Ⅲ



(2)　図Ⅲの最初の状態から正三角形が 3 回だけ転がったとき，点 A の軌跡の長さを求めなさい。

(3)　図Ⅳのように，1 辺の長さが 2 の正三角形 $A_1A_2A_3$ と，1 辺の長さが 2 の正六角形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ が，辺 A_2A_3 と辺 B_2B_1 で接している。(1)，(2)と同様に，正三角形が正六角形の周りを滑ることなく回転する場合を考える。辺 A_1A_2 上（頂点を<u>含む</u>）のどこかに点 P をとり，正六角形を固定して，△ $A_1A_2A_3$ が元の位置に戻るまで，図Ⅳの矢印の方向に転がりながら 1 周するとき，点 P の軌跡の長さが最も短くなるような P の位置を求めなさい。

図Ⅳ