令和４年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

令和４年度群馬県高校生数学コンテストは、７月２７日（水）に，参加を希望する生徒が在籍する学校（県内１９校）において実施し，参加者数は４７４名であった。昨年度から，集合会場でのコンテストは実施せず，より多くの生徒が安心してコンテストに参加できるよう，各参加者が在籍する高校で実施する形式とした。

コンテストは平成１０年度から始められ，今年度で２５回目の開催となった。各受賞者数は，最優秀賞１名，優秀賞３名，奨励賞１６名，始動人アイデア賞１５名（昨年度は最優秀賞１名，優秀賞１２名，奨励賞１８名，始動人アイデア賞１１名）の計３５名であった。

コンテストは，例年どおり数学的な発想を問う６題の問題から４題を選択し，３時間で解答する形式で行われ，解答の際には定規，コンパス，はさみ，電卓の使用を認めている。

群馬県では，教育イノベーションの一環として，ＳＴＥＡＭ教育の実践を推進しており，この数学コンテストもＳＴＥＡＭ教育推進に関する行事として実施している。コンテスト問題では，この観点を踏まえ，実社会との関連を意識した問題や，身近な事象について数理的に考察する問題を出題した。これらの問題の解決を通して，新しい社会を切り拓くための創造性の基礎を養うきっかけとなればと考えている。答案の中には，論理的に整理された素晴らしいものも見られた。また，正解に至らない答案の中にも，発想のユニークなものが数多く見られた。

本コンテストは，３時間集中して数学の問題を考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど，既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を提供しているものであり，このことは数学のみならず，今後様々な教科を学習したり，教科横断の探究的な学習を進めていく上でも良い経験になっていると思われる。今後も，本コンテストの特徴を維持しながら更に内容を発展させ，生徒が数学を楽しむ機会となるよう一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年（中等）	１年（４年）	２年（５年）	３年（６年）
参加生徒数	２３９	２２６	9

合 計　４７４名

※次のページ以降に令和４年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから６ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の問題番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，賞を授与することがあります。
6　必要があれば，定規，コンパス，はさみ，電卓を用いることができます。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚をすべて提出してください。

Ⅱ　問題及び解答例

1　トランプのスペード 13 枚とジョーカー 1 枚の，合計 14 枚のカードがある。すべてのカードを表にして，ジョーカーを取らないようにしながら 2 人で順番に何枚かずつカードを取り，最後にジョーカーを取った方が負けとなるゲームを行う。以下の【ルール】にしたがって，あなたと A さんでゲームを行うとき，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

【ルール】
① 1 回につき，1 枚～ 4 枚のカードを取ることができる。
② 直前の番の人が取ったカードの枚数と，同じ枚数を取ることはできない。
ただし，残りが 1 枚となったときは，必ずその 1 枚を取らなければならない。

(1) 9 枚残っているカードから A さんが 2 枚取り，残り 7 枚の状況であなたの番になったとする。A さんがその後どのような取り方をしたとしても，あなたが必ず勝つためには，残り 7 枚からあなたは何枚取ればよいか。その理由を含めて答えなさい。

(2) 14 枚のカードでゲームを始め，あなたが先手か後手のどちらかを選べるものとする。あなたが必ず勝てる方法があれば，その手順を示しなさい。あなたが必ず勝てる方法がなければ，その理由を示しなさい。

［解答例］

(1) A さんが直前に 2 枚取っているため，私は 1 枚，3 枚，4 枚のいずれかの枚数を取ることができる。

私が 4 枚取った場合，A さんは残る 3 枚からジョーカー以外の 2 枚取ることができるため，私の負けとなる。なお，このとき A さんが残る 3 枚から 1 枚を取ったとしても，私は同じ枚数の 1 枚を取ることができないため，2 枚を取ることになり，私の負けとなる。

以上より，私が 3 枚または 1 枚取ることについて考える。

(i) 私が 3 枚取った場合，A さんは 3 枚を取ることができないため，1，2，4 枚のいずれかを取ることができるが，その後の進行は以下のとおりとすればよい。

私		A さん		私		A さん
3 枚	→	1 枚	→	2 枚	→	1 枚（負け）
	→	2 枚	→	1 枚	→	1 枚（負け）
	→	4 枚（負け）				

(ii) 私が 1 枚取った場合，その後の進行は以下のとおりとすればよい。

私		A さん		私		A さん
1 枚	→	2 枚	→	3 枚	→	1 枚（負け）
	→	3 枚	→	2 枚	→	1 枚（負け）
	→	3 枚	→	1 枚	→	2 枚（負け）
	→	4 枚	→	1 枚	→	1 枚（負け）

(i)，(ii) より，私が勝つためには，残り 7 枚から 3 枚または 1 枚取ればよい。

(2) A さんが最後に取るときに 1 枚だけが残るように，逆向きに考える。【ルール】により，A さんと私が 1 回ずつ取ったときの枚数の合計は，必ず 5 枚とすることができるので，1 枚にするためには 6 枚としておけばよく，6 枚にするためには 11 枚とすればよい。したがって，14 枚のカードで始めた場合，私が先手で 3 枚取ればよい。

さらに，【ルール】②に注意しながら，上記の方法以外にも勝てる方法がないかどうかについて考察する。残り枚数と直前に取った枚数によって，必ず勝つために次に取るべき枚数を考える。以下の表において，上段は，取り方によって必ず勝てる状況にあるときには「○」，どのように取っても勝てない状況のときは「×」となっており，

下段の数は，必ず勝つために次に取るべき枚数を示している。

直前 残り	１枚	２枚	３枚	４枚
１枚	×	×	×	×
２枚	×	○	○	○
		１	１	１
３枚	○	○	○	○
	２	１	１，２	１，２
４枚	○	○	×	○
	３	３		３
５枚	○	○	○	×
	４	４	４	
６枚	×	×	×	×
７枚	○	○	○	○
	３	１，３	１	１，３
８枚	○	×	○	○
	２		２	２
９枚	○	○	○	○
	３，４	３，４	４	３
１０枚	○	○	○	○
	２，４	４	２，４	２
１１枚	×	×	×	×
１２枚	×	○	○	○
		１	１	１
１３枚	○	○	○	○
	２	１	１，２	１，２
１４枚				

表より，14枚のときに私が先手で1，2，4枚のいずれかを取った場合や，Aさんが先手で3枚取った場合，Aさんが必ず「○」の状況にできるため，勝つためには先手で3枚取る以外に勝つ方法はないことがわかる。また，最初に私が3枚取った後，Aさんと私が1回ずつ取ったときの枚数の合計を5枚としなくても，表の下段に示した枚数を取ることで，私が勝つことができることがわかった。

以上より，必ず勝てる方法は，14枚のときに私が先手で3枚取ればよく，その手順は表で示したとおりである。

［出題の意図］

ゲームを行う時には，誰しも相手に勝ちたいと考えるものです。勝つためには相手の行動を先読みし，勝ちに繋がる方法を逆にたどって自分の手段を選択する方法があります。その際，場合分けや規則性の発見，表の作成などを通して，総合的かつ効率的に考えることが求められます。また，ゲームには必ず「ルール」（条件）が存在します。そのルールを十分に理解した上で，あらゆる場合を想定し，その状況に応じた選択を行う必要があります。このような考え方は，数学において重要な役割を果たします。こういった問題への取り組みを通じて，「数学的思考力」や「数学的な見方・考え方」を磨いて欲しいと考え，この問題を出題しました。

この問題のポイントは，【ルール】②の「直前の番の人が取ったカードの枚数と，同じ枚数を取ることはできない」という点です。例えば，残り枚数が 3 枚で私の番となった場合，私は 2 枚取れればもちろん勝つことができますが，2 枚取れない状況（相手が直前に 2 枚取っている）であったとしても，1 枚取れば勝てるのです（私が 1 枚取った次の番手では 1 枚のみ取ることはできない）。【ルール】①により，直前の「A さん」の枚数と「私」の枚数との合計を 5 枚にすることは常に可能であるため（1 ＋ 4，2 ＋ 3），逆算していくことで勝つ方法を探ることはできます。しかし，そこに直前の枚数や連続できない枚数などの条件が絡み合った今回の状況においては，それ以外にも勝つ方法が存在します。そのすべてを考えるためには，表などで状況を把握して次の手を考えるという作業も有効になることがあります。

［講評］

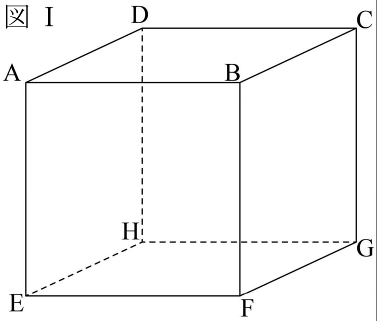
474 名中 422 名が選択し，47 名が正解しました。

(1)では，残り 7 枚という，枚数の少ない状況であるため，考えやすい問題であったと思います。A さんが取る枚数のすべての場合を考えるという点（必ず勝つことができる理由）についても，よく考えられていました。なお，私が 1 枚取って A さんに 2 枚残すという勝ち方に触れている解答もあり，感心しました。

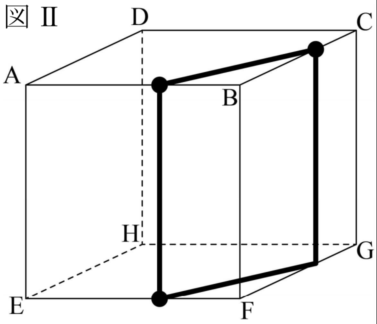
(2)では，(1)の考察を踏まえて規則性を見つけられた人が多くいました。具体的には，「（直前の）A さんの枚数と（次の）私の枚数との合計を 5 枚にすることができる」という考え方です。なお，解答例にも示しましたが，【ルール】②を踏まえると，他にも勝つ方法が存在します。解答としては，ある手順について示せていれば正解としましたが，ほぼすべての必勝法を考察できていた素晴らしい解答もありました。

2　図Ⅰのような，一辺の長さが4の立方体ABCD - EFGHにおいて，この立方体の辺上（頂点を含む）から，同一の辺上にない3点を選び，この3点を通る平面で切ったときにできる断面について考える。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



(1)　断面として現れる図形が，次の①～③の図形となるためには，どのように切ればよいか。解答用紙に図Ⅰのような立方体の見取り図をそれぞれ示した上で，図Ⅱを参考にして，辺上の3点と切り口となる線分をかき込み，どのような3点を選べばよいかについても説明しなさい。

ただし，①～③の中で切り出すことのできない図形がある場合，その図形については「不可能」と答え，なぜ切り出すことができないのかについて，その理由を説明しなさい。

①　正三角形　　②　正五角形　　③　正六角形

次に，立方体ABCD - EFGHの辺AD上に，AP = 3となる点Pを，辺EF上にEQ = tとなる点Qを，辺FG上にGR = tとなる点Rをそれぞれとり，3点PQRを通る平面をαとする。ただし，$0 < t < 4$とする。

(2)　$t = 2$とするとき，平面αで切った断面として現れる図形の名称を答えなさい。

(3)　点Dを通り，平面αに平行な平面βでこの立方体を切る。平面βで切ったときに断面として現れる図形は，tの値によってどのように変化するか，説明しなさい。

［解答例］

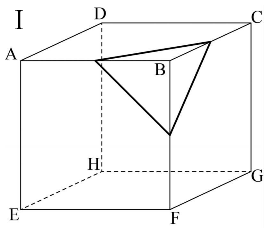
(1)　①　図Ⅰのように，辺ABの中点，辺BCの中点，辺BFの中点の3点を取る。

②　不可能である。理由は以下のとおりである。

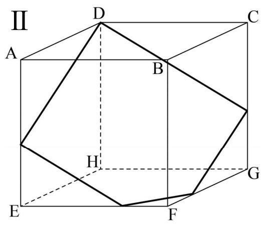
まず，五角形を切るために選ぶ3点は，頂点から1つ，辺から2つ選んだ場合である。次に，仮に正五角形が切れた場合，1つの内角は108°であり，どの辺も平行でない。しかし，図Ⅱのように，この五角形の切り方では，必ず立方体の向かい合う面を切ることになる。よって，切り出される五角形は平行な辺が必ず2組存在する五角形になる。よって，正五角形を切ることはできない。

③　図Ⅲのように，辺ADの中点，辺DCの中点，辺AEの中点の3点を取る。

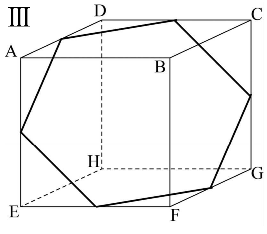
図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ



(2)　断面として現れる図形は，六角形。

(3)　点 D を通り，平面 α に対して平行な平面 β で切ったとき切り口は辺 HG 上または辺 CG 上のどちらかを通過する。図Ⅳのように，平面 β が辺 HG 上を通過するとき断面にできる図形は三角形であり，図Ⅴのように，平面 β が辺 CG 上を通過するとき断面にできる図形は五角形となる。これらについて，考える。

(i)　平面 β が辺 HG 上を通過するとき

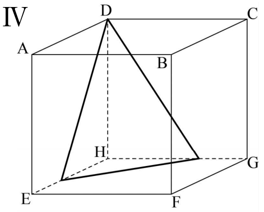
図Ⅵより UV:VS ＝ 4：t+3 を満たし，平面 β の切り口を DS'とすると，US // DS'より DH:HS'＝ 4：t+3 である。S'が辺 HG 上にあるとき，DH ＞ HS を満たすので，4 ＞ t+3 つまり 0 ＜ t ＜ 1 を満たすとき，平面 β によってできる断面が二等辺三角形となる。さらに，t ＝ 1 のとき，DE ＝ DG ＝ EG となり，断面にできる図形は，正三角形となる。

(ii)　平面 β が辺 CG 上を通過するとき

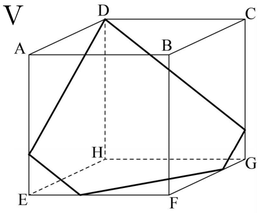
(i)と同様に考えて，図Ⅶより，DH ≦ HS を満たすので，4 ≦ t+3 つまり 1 ＜ t ＜ 4 を満たすとき，平面 β によってできる断面は五角形となる。

(i)，(ii)より，0 ＜ t ＜ 1 のとき　二等辺三角形
　　　　　　　1 ＜ t ＜ 4 のとき　五角形

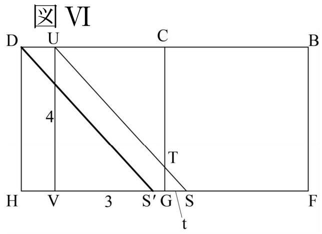
図Ⅳ



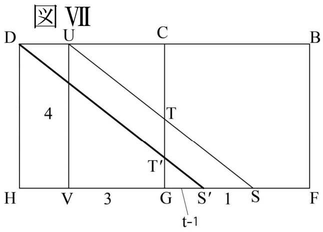
図Ⅴ



図Ⅵ



図Ⅶ



［出題の意図］

立方体を切断した際に出来る断面図について考える問題です。

(1)のように，辺上（頂点を含む）から 3 点を選ぶことで，平面が 1 つに決まります。切り出すことのできる図形は(1)以外にも複数ありますが，直角三角形，直角二等辺三角形，正五角形，七角形以上の図形は切り出すことができません。ぜひとも考えてみてください。

(2)のように点を選ぶと断面には六角形が切り出されます。そして(3)の平面 α に対して，平行な平面 β について考える際，立方体の展開図から想像する方法が有効です。ここで t の値によって，平面 β が①辺 HE(HG)上を通過する②辺 EF(GF)上を通過するかの 2 通りが考えられます。①からできる図形は三角形となり，②からできる図形は五角形となります。

空間図形に関する問題は，想像力も必要ですが，実際に作図をしながら，様々な可能性を数学的に考察していく力が必要です。もう一度，手を動かしながら考察してみてください。

［講評］

474 名中 156 名が選択し，7 名が正解しました。また完答者以外にも(3)の問題について，平面 β から切り出せる図形が，三角形と五角形になることが理解できていた解答や，t の場合分けの説明がもう少し詳細に書けていれば，正解になる解答も多くありました。正解者の中には，(1)の正五角形が切り出せない理由，(2)の六角形ができる理由，(3)の二等辺三角形→正三角形→五角形へと図形が変化する理由を数学的に考察し，とてもわかりやすく説明している素晴らしい解答がありました。

3　ある「鍵」を解除する方法について考える。

この鍵は，図Ⅰのように，N × N の正方形のマス目のそれぞれにボタンがついており，ボタンには図のような順番で番号が振られている。この鍵は，以下の 2 つの条件をともに満たすと，解除される。

【条件】

① 押すボタンの数が，ちょうど N 個である。

② 押したボタンのうち，どの 2 つを選んでも，縦，横，斜めのいずれにも並んでいない（斜めとは，正方形の対角線と平行な方向とする）。

例えば，図Ⅰの押し方（○の付いた数字が押したボタンを示す）をすると鍵は解除されるが，図Ⅱのような押し方では，23 と 30，また 23 と 33 が斜めに並んでいるため，解除することができない。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

ただし，ボタンの押し方を示す際は，番号の小さい順に並べて，（1，2，3，4）のように答えること。また，必要があれば【参考】に示した図を用いて考えてよい。

(1)　N ＝ 4 とする。鍵を解除できるボタンの押し方を，1つ答えなさい。

(2)　N ＝ 5 とする。鍵を解除できるボタンの押し方を，すべて答えなさい。

ただし，解答を求める過程についても，詳しく説明すること。

図Ⅰ

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

図Ⅱ

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

【参考】

N ＝ 4 の鍵

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

N ＝ 5 の鍵

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

［解答例］

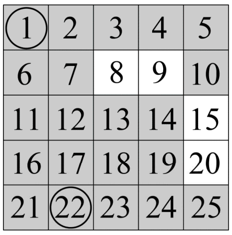
(1)　（2，8，9，15）（または，（3，5，12，14））

(2)　N ＝ 5 の鍵において，1，6，11，16，21 の列及び，2，7，12，17，22 の列から 1 つずつボタンを選んで場合分けを行う。右図のように，あるボタンを押した場合に押せないボタンに色をつけて考える。

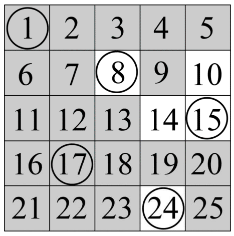
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

(i) 1のボタンを押す場合

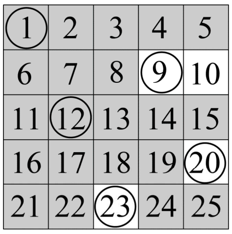
ア 22のボタンを押す場合
下図のとおり，解除不能



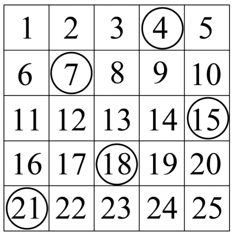
イ 17のボタンを押す場合
下図のとおり，解除可能

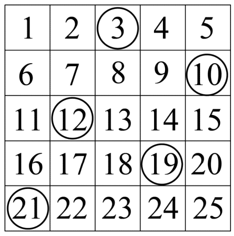


ウ 12のボタンを押す場合
下図のとおり，解除可能



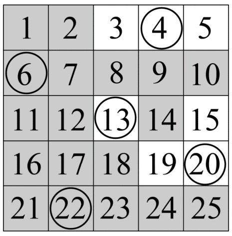
イ，ウの上下反転も，下図のとおり解除可能



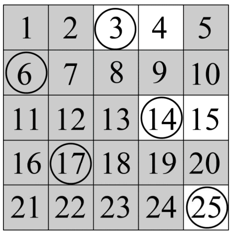


(ii) 6のボタンを押す場合

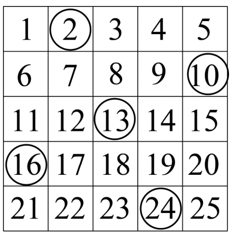
ア 22のボタンを押す場合
下図のとおり，解除可能

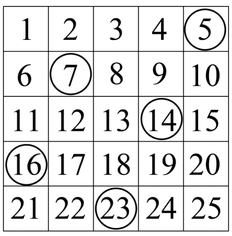


イ 17のボタンを押す場合
下図のとおり，解除可能



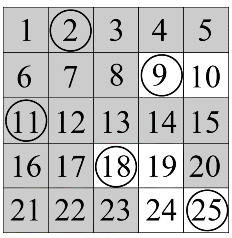
ア，イの上下反転も，下図のとおり解除可能



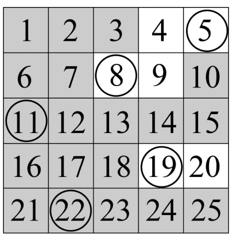


(ii) 11のボタンを押す場合

ア 2のボタンを押す場合
下図のとおり，解除可能



イ 22のボタンを押す場合
下図のとおり，解除可能



以上より，解除可能なのボタンの組み合わせは，
（1，8，15，17，24），（1，9，12，20，23），（2，9，11，18，25），
（2，10，13，16，24），（3，6，14，17，25），（3，10，12，19，21），
（4，6，13，20，22），（4，7，15，18，21），（5，7，14，16，23），
（5，8，11，19，22）
の10通りである。

［出題の意図］

日常生活にも関わる「セキュリティの解除」をテーマとして，シンプルで楽しく取り組めるようにアレンジして出題しました。

(1)では，N＝4の場合にセキュリティを解除できるボタンの押し方を出題しました。押すボタンの数が少ないため，この問題の感覚をつかんでもらえたと思います。

(2)では，N＝5の場合にセキュリティを解除できるボタンの押し方を過不足なく求める力を問う問題としました。場合分けをして解をすべて求める方法，図形の対称性に着目して，1つの解から他の解を求める方法，規則性を見つけて考える方法など，様々な視点から自由に解答できるようにしました。いずれの方法にしても，「解が10通り答えられていること」「解答に至る過程の中で，導いた解以外には解が存在しないこと」の2点が説明できているかを重視して採点しました。

［講評］

474名中432名が選択し，70名が正解しました。説明において論理の飛躍や矛盾がなく，10通りの押し方を正しく示した場合のみ，正解としています。

この問題の解答を最も自然に求める方法として，場合分けが考えられます。正解者のほとんどはこの方法でした。N＝5の場合，1～5のうち押せる数字は1つだけであり，1を押す場合，2を押す場合…と場合分けを地道に考えていくことで，過不足なくすべての解を導くことができます。他の方法として，解を1つ見つけてから図形の対称性に気付き10通りの解を求めている答案が複数いました。素晴らしい発想でした。ただし，この方法については他に解がないことを説明するのが難しかったようです。今回の問題では解の10通りを求める以上に，解を導く過程をどのように説明できるかがポイントでした。

4　xy 平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を「格子点」と呼び，すべての頂点が格子点であるような三角形を「格子三角形」と呼ぶ。格子三角形の内部（辺上にある点を含まない）にある格子点の個数を I，辺上（頂点を含む）にある格子点の個数を B とすると，格子三角形の面積 S は次の(＊)の式で求められることが知られている。後の (1)～(3)の問いに答えなさい。

$$S = I + \frac{1}{2}B - 1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1)　(＊)を用いて，図 I で示した三角形の面積を求めなさい。
　ただし，I，B の値をそれぞれ明らかにすること。

(2)　図 II の△ OAB は，O(0，0)，A(a，b)，B(c，d) であり，a，b，c，d は自然数で，$a < c$，$d < b$ である。辺 OA，OB，AB 上にある，両端の点を除いた格子点の個数を，それぞれ，h 個，i 個，j 個として，△ OAB について(＊)が成り立つことを示しなさい。

(3)　(2)の考え方を用いると，xy 平面上にあるどのような格子三角形についても，(＊)が成り立つことを示すことができる。
　すべての頂点が格子点であるような四角形を「格子四角形」と呼ぶとき，「どのような格子三角形についても(＊)が成り立つ」ことを用いて，どのような格子四角形についても(＊)が成り立つことを示せ。

図 I

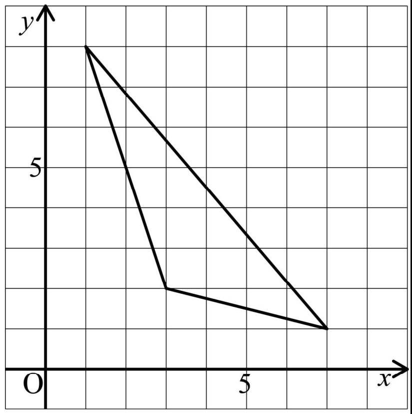
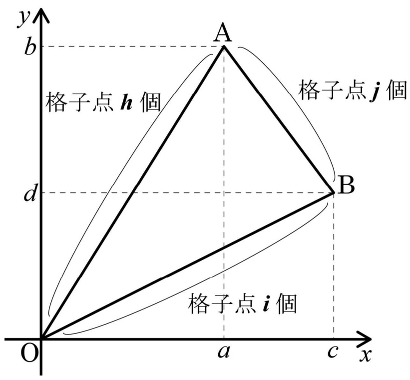


図 II



［解答例］

(1)　$I = 10$，$B = 4$ だから，$S = 10 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 11$

(2)　△ OAB において S，I，B を求める。C(0，b)，D(c，b)，E(c，0)とすると，

S =(長方形 OCDE の面積)－(△ OAC の面積)－(△ OBE の面積)－(△ ABD の面積)

$$= bc - \frac{1}{2}\{ab + cd + (c - a)(b - d)\}$$

$$= \frac{1}{2}(bc - ad)$$

I =(長方形 OCDE の内部の格子点の個数)
　－(△ OAB の辺上にある頂点以外の格子点の個数)
　－(△ OAC の内部の格子点の個数)－(△ OBE の内部の格子点の個数)
　－(△ ABD の内部の格子点の個数)

$$=(b-1)(c-1)-(h+i+j)-\frac{1}{2}\{(a-1)(b-1)-h+(c-1)(d-1)-i+(c-a-1)(b-d-1)-j\}$$

$$=\frac{1}{2}(bc-ad)-\frac{1}{2}(h+i+j)-\frac{1}{2}$$

$B = h + i + j + 3$

よって　$S = I + \frac{1}{2}B - 1$　が成り立つ。

(3)　どのような格子四角形も，内部を通る対角線が少なくとも1本存在する。その対角線により，一辺のみを共有し，内部は重ならない格子三角形Pと格子三角形Tに格子四角形を分割できる。格子三角形Pの内部にある格子点の個数を I_P，辺上にある格子点（頂点を含む）の個数を B_P，面積を S_P とする。(＊)がPについて成り立つから，

$$S_P = I_P + \frac{1}{2}B_P - 1 \quad \cdots \quad ①$$

格子三角形Tの内部にある格子点の個数を I_T，辺上にある格子点（頂点を含む）の個数を B_T，面積を S_T とする。(＊)がTについて成り立つから，

$$S_T = I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 \quad \cdots \quad ②$$

PとTが共有する辺上にある，両端の点を除いた格子点の個数を k 個とすると，格子四角形の内部にある格子点の個数は $I_P + I_T + k$，辺上にある格子点（頂点を含む）の個数は $B_P + B_T - (2k + 2)$ と表せて，①，②より

$$(I_P + I_T + k) + \frac{1}{2}\{B_P + B_T - (2k + 2)\} - 1 = S_P + S_T = \text{（格子四角形の面積）}$$

すなわち格子四角形についても(＊)が成り立つ。

［出題の意図］

「ピックの定理」をテーマにして出題しました。(3)の考え方を用いると，どのような格子 n 角形（n は3以上の自然数）についても同様の式が成り立つことを示すことができます。簡潔で美しい式ですが，暗記して使うだけではあまり意味がありません。定理の証明に用いられるアイデアや論理を学んでこそ，思考力を鍛えることができます。今回の設問で紹介したもの以外にも，ピックの定理の証明に関する興味深いアイデアが知られてるので，調べてみてください。また，日頃の数学の学習においても，定理がなぜ成り立つのか，どのように証明するのか，自力で考えたり教科書を読んで学んだりすることを習慣にするとよいでしょう。

［講評］

474名中151名が選択し，3名が正解しました。

(2)の正解者は4名でした。△OABの I を計算する際に，誤った立式をしてしまった解答が数多くありました。C$(0,\ b)$ とするとき，△OACの内部または辺上にある格子点（頂点を含む）の個数が $\frac{1}{2}\{(a + 1)(b + 1) + (h + 2)\}$ と表せることを説明し，この考え方を利用した優れた解答もありました。(3)の正解者は5名でした。凹四角形と呼ばれるへこみのある四角形でも，内部を通る対角線が1本だけ存在するので，2つの三角形に分割することができます。このことに触れている解答があり，感心しました。正解者の解答はいずれも素晴らしく，ピックの定理の式が格子三角形において成り立つことを用いて，格子四角形においても成り立つ事を論理的に導けていました。

5　Aさん，Bさん，Cさんの3人が，おそろいの洋服を1着ずつ購入しようとしている。各家庭までの配送料を含めて代金を計算すると，Aさん，Bさん，Cさんの3人組で同時に注文する場合，合計で5900円かかるという。

3人組での注文をせず，Aさんが単独で注文する場合は1800円，Bさんが単独で注文する場合は2100円，Cさんが単独で注文する場合は2900円かかり，AさんとBさんの2人組で注文する場合は3600円，BさんとCさんの2人組で注文する場合は4400円，CさんとAさんの2人組で注文する場合は3800円かかることが分かっている。

いま，Aさん，Bさん，Cさんが3人組で同時に注文しようとしており，3人が支払う合計額が5900円となるよう，それぞれの分担額を相談している。それぞれの分担額を決めたときに，1人または2人組で支払った方が得だと判断できる場合，その1人または2人組は，3人組での注文をやめてしまう（例えば，Aさんの分担額が2000円の場合，Aさんは3人組での注文をやめてしまう）。

3人組での注文をやめてしまう人が出ないように分担額を決めるとき，Aさん，Bさん，Cさんは，それぞれいくら支払うべきか，理由を含めて答えなさい。

［解答例］

Aさん，Bさん，Cさんがそれぞれa円，b円，c円ずつ支払うとすると，
$a+b+c=5900$が成り立つ。ここからはその内訳を考える。

もし，$a>1800$とするならば，Aさんは3人組よりも単独で注文するほうが安く購入できるため，$0\leqq a\leqq 1800$であることが必要である。同様に，$0\leqq b\leqq 2100$，$0\leqq c\leqq 2900$であることが必要である。

また，もし，$a+b>3600$とするならば，AさんとBさんは，Cさんを加えて3人組で注文するよりも，2人組で注文するほうが安く購入できるため，$0\leqq a+b\leqq 3600$であることが必要である。同様に，$0\leqq b+c\leqq 4400$，$0\leqq c+a\leqq 3800$であることが必要である。

以上をまとめると，

$a+b+c=5900$　…①
$0\leqq a\leqq 1800$　…②
$0\leqq b\leqq 2100$　…③
$0\leqq c\leqq 2900$　…④
$0\leqq a+b\leqq 3600$　…⑤
$0\leqq b+c\leqq 4400$　…⑥
$0\leqq c+a\leqq 3800$　…⑦

①より，$a+b=5900-c$であるから，⑤から$0\leqq 5900-c\leqq 3600$となる。④と合わせると，$2300\leqq c\leqq 2900$を得る。

同様に，$2100\leqq b\leqq 2100$，$1500\leqq a\leqq 1800$を得る。
したがって，$b=2100$である。

このとき，⑤および$1500\leqq a\leqq 1800$から，$1500\leqq a\leqq 1500$を得る。
したがって，$a=1500$である。

さらに，⑦および$2300\leqq c\leqq 2900$から，$2300\leqq c\leqq 2300$を得る。
したがって，$c=2300$である。

以上より，Aさん，Bさん，Cさんはそれぞれ1500円，2100円，2300円ずつ支払うべきである。

［出題の意図］

現実の世界で起こりそうな問題を，数学を用いて解決することをテーマとして出題しました。「3人組から抜けてしまうことがない」という状況を不等式で正しく表せるか

がポイントでした。皆さんの日常の中での困りごとが，数学によって解決できる例が多々あります。数学を活用してみることで，数学を学習するモチベーションがさらに高まることを期待しています。

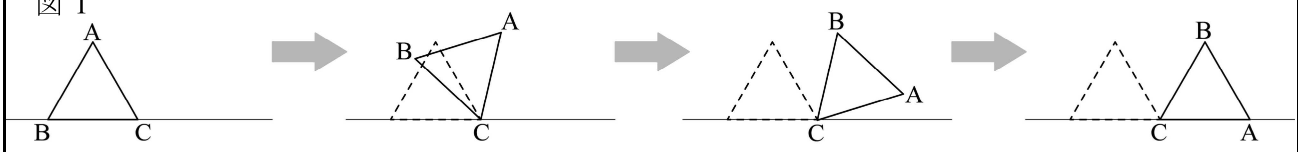
［講評］

474 名中 349 名が選択し，70 名が正解しました。

正しい分担額の組を求めることはもちろんですが，「答えがその組しかないこと」をきちんと説明できていた答案を正解としました。正解者は，問題の状況を正しく不等式で表現し，それを解くことで分担額の組が 1 組しかないことを示していました。数学においては，過不足なく答えを求めることや，求めた答えに過不足がないことを説明することが大切となります。そのための武器の一つとして，数式が活用されるのです。正解者の中には，不等式を効率的に解いた答案や，独創的な切り口によって正しく不等式を立てた答案など，素晴らしいものがありました。また，正解には至らなかったものの，さまざまな数値を代入して調整することで，3 人組から抜けてしまう人が出ないような分担額の組を見つけることのできた答案も数多くありました。何か難しそうな数学の問題に直面したときに，いろいろな数値を代入して傾向をつかむなどの「実験」は，問題解決に向けた大きな手がかりとなります。今回の試行錯誤の経験を今後に活かしてほしいと思います。

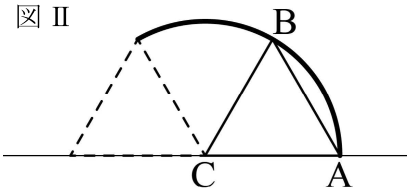
6　図Ｉのように，1辺の長さが2の正三角形が，ある直線に接しながら，滑ることなく回転している。正三角形の1辺が接している直線を離れ，次の辺が直線に接するまでの動作を「1回だけ転がる」と呼ぶことにする。図Ｉは，1回だけ転がったときの例である。また，図形が転がるときに，図形上のある点Aが通った道筋を「点Aの軌跡」と呼ぶことにする。図Ⅱの太線は，図Ｉで正三角形が1回だけ転がったときの「点Aの軌跡」を表している。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

図Ｉ



（1回だけ転がった）

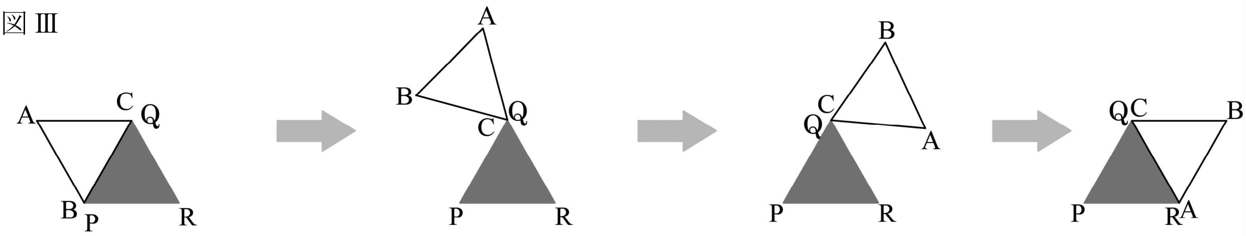
図Ⅱ



(1)　図Ｉの最初の状態から正三角形が3回だけ転がったとき，点Aの軌跡の長さを求めなさい。

次に，1辺の長さが2の正三角形が，同じ大きさの正三角形の辺に接しながら，滑ることなく回転する場合を考える。図Ⅲは，辺BCと辺PQが接している正三角形ABCと正三角形PQRについて，△PQRを固定して，△ABCが「1回だけ転がる」様子を示した例である。

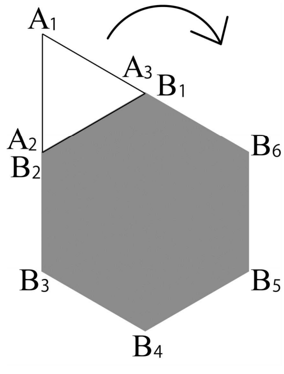
図Ⅲ



(2)　図Ⅲの最初の状態から正三角形が3回だけ転がったとき，点Aの軌跡の長さを求めなさい。

(3)　図Ⅳのように，1辺の長さが2の正三角形 $A_1A_2A_3$ と，1辺の長さが2の正六角形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ が，辺 A_2A_3 と辺 B_2B_1 で接している。(1)，(2)と同様に，正三角形が正六角形の周りを滑ることなく回転する場合を考える。辺 A_1A_2 上（頂点を<u>含む</u>）のどこかに点Pをとり，正六角形を固定して，△$A_1A_2A_3$ が元の位置に戻るまで，図Ⅳの矢印の方向に転がりながら1周するとき，点Pの軌跡の長さが最も短くなるようなPの位置を求めなさい。

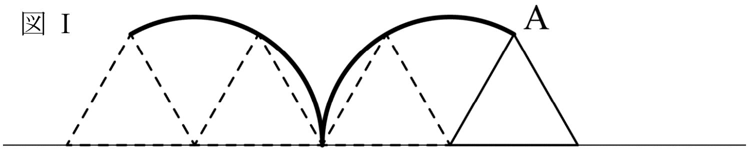
図Ⅳ



［解答例］

(1)　点 A の軌跡は図 I のようになる。1 回目に転がったときと 3 回目に転がったときの軌跡の長さは同じだから，1 回目に転がったときの軌跡の長さを求め，その長さを 2 倍すればよい。なお，2 回目に転がるときは点 A が動かないため，軌跡は考えなくてもよいことに注意する。

図 I



1 回目に転がったときの点 A の軌跡は，半径が 2，中心角が 120°の扇形の弧であるからその長さは

$2 \times 2 \times \pi \times \dfrac{120}{360} = \dfrac{4}{3}\pi$　したがって，求める軌跡の長さは $\dfrac{4}{3}\pi \times 2 = \dfrac{8}{3}\pi$

(2)　求める軌跡は，線分 PQ の垂直二等分線を境目として，

①点 P を中心とした半径 2 の円の弧

②点 Q を中心とした半径 2 の円の弧

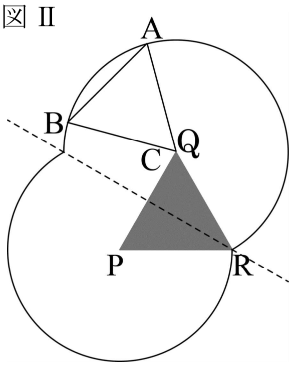
の①，②を組み合わせた図 II のような図形となる。

このとき①，②は，ともに半径 2，中心角 240°の扇形の弧であるから，

$2 \times 2 \times \pi \times \dfrac{240}{360} \times 2 = \dfrac{16}{3}\pi$

したがって，求める軌跡の長さは $\dfrac{16}{3}\pi$

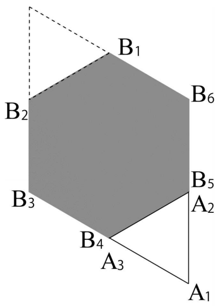
図 II



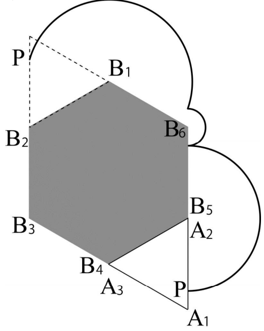
(3)　もとの位置に戻るまでに 6 回転がることになる。このとき，図Ⅲのように，3 回転がった時点で再び辺 A_1A_2 が正六角形と接することになるため，1 ～ 3 回目までの軌跡の長さと 4 ～ 6 回目の軌跡の長さは一致する。つまり，3 回転がるまでの規制の長さの最小値を求めればよい。

頂点 A_1，A_2 以外の辺 A_1A_2 上に自由に点 P をとったとき，軌跡は図Ⅳのようになる。以下，1 回目に転がったときの軌跡，2 回目に転がったときの軌跡，3 回目に転がったときの軌跡をそれぞれ考える。

図Ⅲ



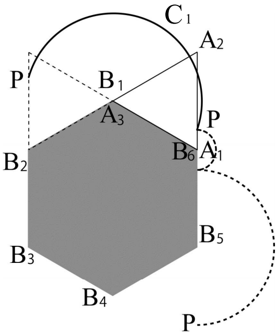
図Ⅳ



(i) 1 回目に転がったときの軌跡 C_1 について

点 B_1 を中心として，半径が PB_1，中心角 180°の扇形の弧である。ここで，点 B_1 は頂点 A_3 と重なるから，$PB_1 = A_3P$

したがって軌跡 C_1 の長さは　πA_3P



(ii) 2 回目に転がったときの軌跡 C_2 について

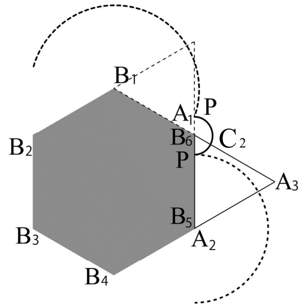
点 B_6 を中心として，半径が PB_6，中心角 180°の扇形の弧である。ここで，点 B_6 は頂点 A_1 と重なるから，

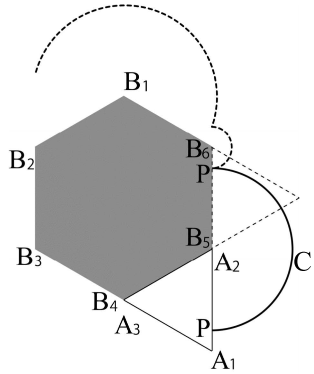
$PB_6 = A_1P$　したがって軌跡 C_2 の長さは　πA_1P

(iii) 3 回目に転がったときの軌跡 C_3 について

点 B_5 を中心として，半径が PB_5，中心角 180°の扇形の弧である。ここで，点 B_5 は頂点 A_2 と重なるから，

$PB_5 = A_2P$　したがって軌跡 C_3 の長さは　πA_2P





(i)〜(iii)より，3 回転がるまでの点 P の軌跡は

$C_1 + C_2 + C_3 = \pi A_3P + \pi A_1P + \pi A_2P$

$= \pi (A_1P + A_2P + A_3P)$

となる。ここで，点 P は線分 A_1A_2 上にあるから，

$A_1P + A_2P = A_1A_2 = 2$

つまり，どのように P をとったとしても，

$C_2 + C_3$ が $C_2 + C_3 = 2$ と一定の値をとることから，

C_2，C_3 に関わらず C_1 が最も短くなれば，点 P の軌跡が最も短くなる。

C_1 が最小となるのは，$A_3P \perp A_1A_2$ となるときである。△ $A_1A_2A_3$ は正三角形であるから C_1 が最小となる点 P は A_1A_2 の中点である。

したがって，点 P の軌跡は線分 A_1A_2 の中点となったときに最も短くなる。

［出題の意図］

転がる図形についての問題です。日常生活で物体が転がるのは自然に起こる現象ですが，数学的に捉えてみると多くの面白い性質を秘めています。よく扱われるのは円についてですが，円を定直線上で転がしたときの円周上の 1 点が描く軌跡「サイクロイド」や円の内部にある 1 点が描く軌跡「トロコイド」などが有名です。また，円の内部を円が転がるときに描く図形「アステロイド」や，円の外部を円が転がるときに描く図形「カージオイド」などがあります。

今回の問題は，転がる図形のイメージができるかどうかという点と，直感的にわかることをしっかり説明できるかどうかという点を重視して出題しました。

［講評］

474 名中 384 名が選択し，65 名が正解しました。その中の 4 名の解答は，(3)について計算に頼ることなく，図形的な性質のみで中点が最小の軌跡を描くことを説明しており，洗練された美しい解答でした。

出題の意図でも示したとおり，(3)は問題文を読んで具体例を書いてみることで，中点や頂点が条件を満たすのではないかと，何となく予想できたと思います。実際多くの解答が「中点のとき」と「頂点のとき」の軌跡の長さを求め，その比較で満足してしまっていました。直感的に答えを見いだす力はとても大切ですが，その直感が正しいかどうかの検証を必ず行うようにしましょう。

なお，(3)は「線分上に任意の点をとり，その点によって分けられる2本の線分を直径とする2つの半円の弧の長さの和は常に一定である」という性質を利用すると，とても簡単に説明することができます。1 名だけですが，この性質を利用した大変素晴らしい解答がありました。