

令和3年度
群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

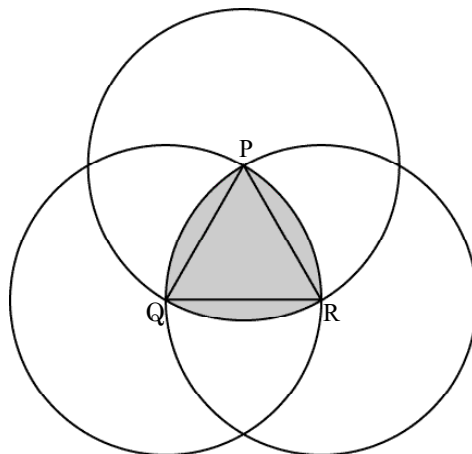
- 1 問題は、1ページから6ページまであります。また、解答用紙は4枚あります。
- 2 制限時間は3時間です(13:00~16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 3 解答は、すべて解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙には、選択した問題の問題番号、コンテスト番号、氏名を必ず記入してください。問題番号、コンテスト番号、氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は、採点の対象外となる場合があります。
- 5 解答には、必ず途中の考え方などを書いてください。論理性、表現力、アイデアの観点で評価します。正解でなくても、賞を授与することがあります。
- 6 必要があれば、定規、コンパス、はさみ、電卓を用いることができます。
- 7 コンテスト終了後、解答用紙4枚をすべて提出してください。

1 以下の(a)~(c)の手順で構成される図形「ルーローの三角形」について考える。

- (a) 1辺の長さが r の正三角形 PQR をかく。
 - (b) 各頂点を中心とする，半径 r の円をかく。
 - (c) すべての円が重なる部分の図形に注目し，これを，幅 r のルーローの三角形と呼ぶ。
- また，(a)の正三角形の頂点 P, Q, R を，ルーローの三角形の「頂点」と呼ぶ。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

ただし， $\pi = 3.14$ ， $\sqrt{2} = 1.41$ ， $\sqrt{3} = 1.73$ とする。



- (1) 地下の下水道等の入り口に用いられるマンホールの蓋は，一般的に円形のものが多いが，ルーローの三角形の形状でこの蓋を作ると，円形のものより小さく作れるため，材料費を安く抑えることができると言われている。

幅 r のルーローの三角形の面積を S_1 ，直径 r の円の面積を S_2 としたとき， $\frac{S_1}{S_2}$ の値を小数第4位を四捨五入して答えなさい。

- (2) 幅 r のルーローの三角形は，1辺の長さ r の正方形の中で，4辺と接しながら回転することができる。この性質を利用し，ルーローの三角形の形状をしたロボット掃除機が販売されており，円形の掃除機に比べて，部屋の隅にある届きにくい部分の面積を，より小さくできると言われている。

以上の状況についてモデル化したのが，下の図I~図IIIである。幅2のルーローの三角形 PQR が，1辺の長さ2の正方形 $ABCD$ の中で反時計回りに回転する。ここで，頂点 Q が辺 AB 上，頂点 R が辺 BC 上にあるときを考える。正方形の中で，ルーローの三角形と重なっていない4つの部分のうち，その周に頂点 D を含む部分の図形を K とする。頂点 P と頂点 D との距離が最小となるときの，図形 K の面積を求めなさい。

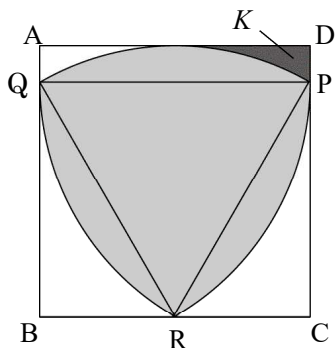


図 I

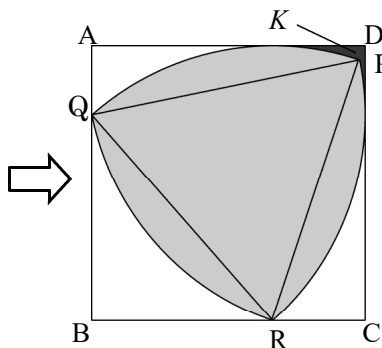


図 II

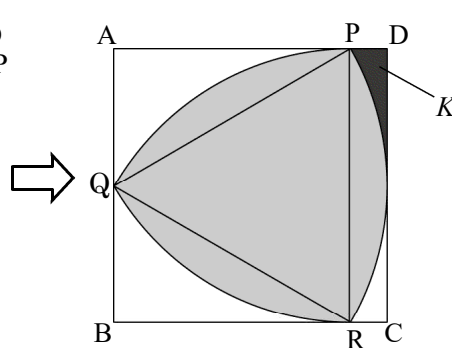


図 III

2 中国で発明された羅針盤が、ヨーロッパで改良され、活用され始めた頃、X国のある商人が新しい航路を発見し、新たな国際貿易を始めた。

この商人によるA国、B国、C国との貿易は、次のような「交換」によって行われる。

A国：香辛料1袋と羊毛1袋を持っていくと、刀2本と交換することができる。

B国：羊毛1袋と刀1本を持っていくと、香辛料3袋と交換することができる。

C国：刀1本と香辛料1袋を持っていくと、羊毛4袋と交換することができる。

いま、この商人が、香辛料1840袋、羊毛1840袋、刀1840本を保有しているものとする。次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) A国、B国、C国との交換を1回ずつ行ったとき、商人の保有する香辛料、羊毛、刀はそれぞれいくつになるか求めなさい。

(2) A国、B国、C国との交換を何回か行ったとき、香辛料が2021袋以上になったが、羊毛と刀の数は変わらなかったという。このとき商人は、A国、B国、C国との交換を、それぞれ最小で何回行ったか、求めなさい。

3 一直線に伸びた道沿いに、1番地から200番地までの区画が、順番に等間隔で割り振られている町がある。現在、2番地や3番地など、番地が素数である区画のすべてに家が建っており人が住んでいるが、それ以外の番地の区画は空き地となっている。このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、必要があれば、後の【参考】を活用してもよい。

(1) 競合する2つの食パン店A、Bが、この町の空き地にそれぞれ1店舗ずつ出店しようとしており、次の《条件1》のもとで、出店予定地を明日同時に申請することになっている。

— 《条件1》 —

- ・全家庭が毎日、自宅から最寄りの店舗で1斤ずつ食パンを買う。
- ・2店から等距離にある家の住民は、無作為にどちらかの店を選ぶ。
- ・相手の店の出店予定地を事前には知ることができない。
- ・他の町からの来客は考えない。

2店A、Bは、相手の店よりも有利となるように最適な出店予定地を申請するものとする。あなたがA店の店主であれば、どの区画に出店すべきと考えるか。出店予定地として申請する番地を答え、その番地を選んだ根拠を示しなさい。

(2) 2店A、Bで協議した結果、2店は統合して1店舗を出店することになった。統合した店舗は次の《条件2》のもとで、出店予定地を決める。

— 《条件2》 —

- ・全家庭が毎日1斤ずつ食パンを買う。
- ・この町の住民は、家と店舗の間を最短距離で往復する。
- ・他の町からの来客は考えない。

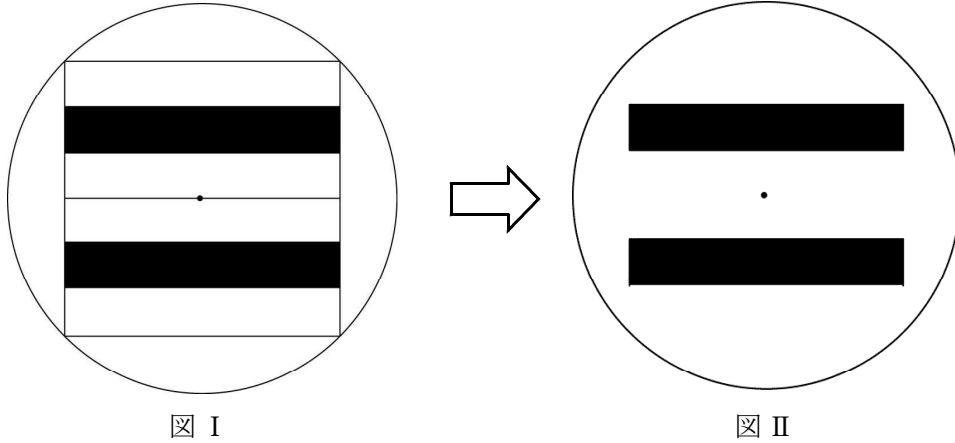
このとき、全住民の平均移動距離が最小となるような店舗の番地をすべて答えなさい。また、その根拠を示しなさい。

— 【参考】200以下の素数 —

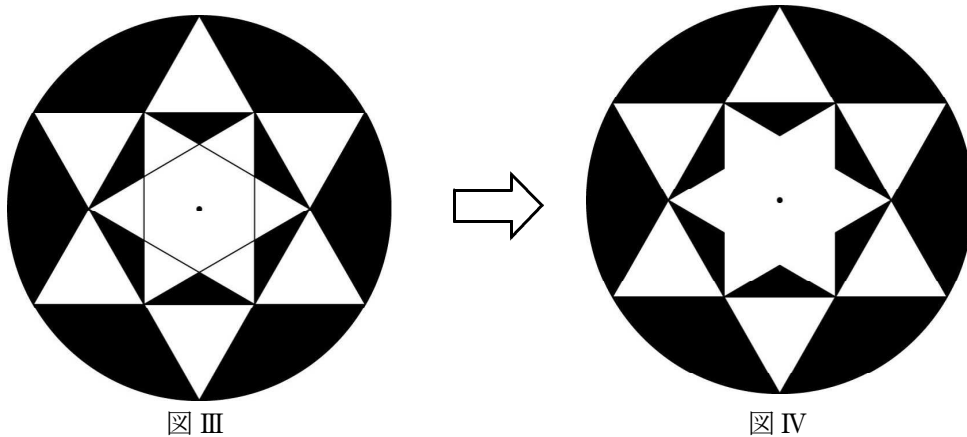
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199

4 次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

- (1) 半径 6 の円に正方形が内接している。図 I のように、この正方形の向かい合う 2 辺を 6 等分し、正方形を 6 つの長方形に分けて、そのうちの 2 カ所に色を塗った。この図形を、円の中心を軸としてコマのように高速で回転させたとき、色がついているように見える部分（色が塗られた長方形が通過している領域）の面積を求めなさい。ただし、図 II のように図中の線はないものとして考えること。



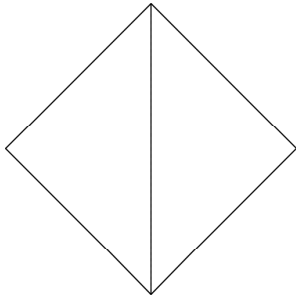
- (2) 図 II の図形を、円の中心を軸としてコマのように高速で回転させると、円内の部分によって色の濃さの見え方に違いが出ることがわかった。回転しているときに見える円全体の様子を、コンパスや鉛筆を用いて、絵に描いて示しなさい。ただし、回転しているときに見える色の濃さの違いがわかるように、濃淡を明確に表現すること。
- (3) 半径 6 の円の円周を 6 等分し、その円周上の点を結んだ線分や、その線分の交点どうしを結んでできた線分によってできた図形について、図 III のように色を塗りわけた。この図形を、円の中心を軸としてコマのように高速で回転させたときに見える円全体の様子を、コンパスや鉛筆を用いて、色の濃さの違いがわかるように、絵に描いて示しなさい。また、回転しているときに見える図形の特徴を、円の中心からの距離や色の濃さに着目して、詳細に説明しなさい。ただし、図 IV のように図中の線はないものとして考えること。



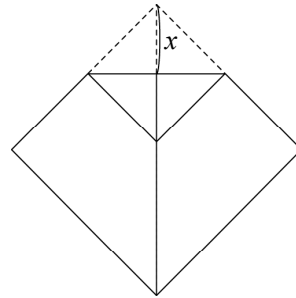
- 5 次の【五角形の折り方】によって、正方形の折り紙から五角形が折れることが知られている。このことについて、次の(1)~(4)の問いに答えなさい。ただし、必要があれば問題用紙の余白部分を正方形に切り取り、実際に折りながら考察してもよい。

— 【五角形の折り方】 —

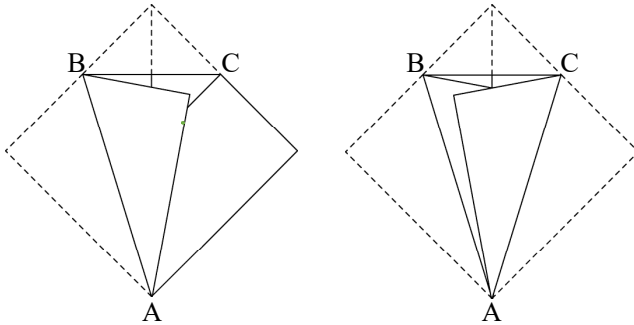
①正方形を対角線で折る。



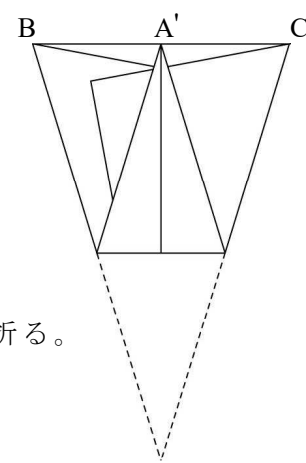
②ある長さ x のところで折り返す。



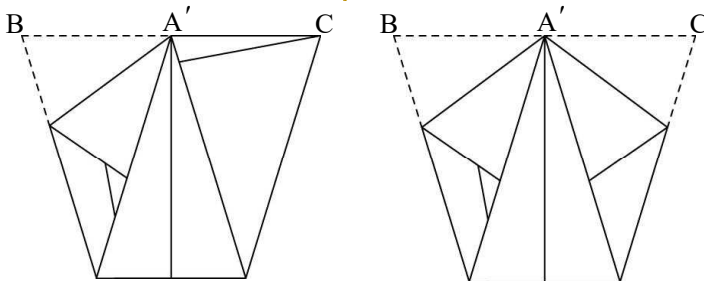
③辺 AB 、辺 AC を折り目にして折る。



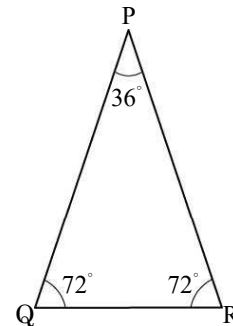
④頂点 A が辺 BC に重なるように折る。



⑤辺 $A'B$ 、 $A'C$ が④で折った三角形の斜辺と重なるように折る。



- (1) 右の二等辺三角形 PQR において、 $QR = 1$ のとき PQ の長さを求めなさい。



- (2) 【五角形の折り方】の手順③における $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC = 36^\circ$ であれば、手順⑤によってできる五角形は正五角形となることを証明しなさい。
- (3) 【五角形の折り方】の手順②において、正方形の頂点と正方形の対角線の交点が重なるように折ってしまうと、できた図形は正五角形にならないことを証明しなさい。
- (4) 1 辺の長さが 15 cm の正方形の折り紙を用いて、可能な限り正確な正五角形を折るためには、【五角形の折り方】の手順②における $x\text{ (cm)}$ をどのような長さにすればよいか、小数第 2 位を四捨五入して求めなさい。
ただし、 $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3.077$ として計算してよい。

6 右の【例】のように、9行×9列のマスのすべてに、1から9までのいずれかの数字を記入する。記入する際には、横の各行に1から9までの異なる数字を記入するものとし、各行の中には同じ数字が記入されないようにする。

すべてのマスに数字を記入した後、縦の列ごとに書かれている数字の合計を求め、9列の合計のうちの最小値を100倍した金額を賞金として獲得できるものとする。

例えば右の【例】では、左から4列目の40が最小値であるため、4000円を賞金として獲得できる。次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) 獲得できる賞金の最大額を求めなさい。

(2) 数字を記入する際のルールを追加し、「縦の各列の中では、記入されたどの2つの数字を選んでも、その差が4以下となる」ようにする。このときに獲得できる賞金の最大額を求め、その額が最大であることを証明しなさい。

	列	【例】								
	↓									
行→		3	5	9	4	1	6	7	2	8
		9	5	1	3	4	7	6	8	2
		6	2	3	8	7	1	4	9	5
		1	8	7	3	5	9	6	2	4
		5	1	3	8	7	2	6	4	9
		8	3	7	2	9	5	1	6	4
		3	9	2	1	6	8	7	4	5
		2	4	1	7	8	5	3	9	6
		6	7	8	4	3	9	2	1	5
合計		43	44	41	40	50	52	42	45	48