令和３年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

令和３年７月２７日（火）に，参加を希望する生徒が在籍する学校（県内１８校）において実施し，参加者数は過去最多となる５１３名であった。昨年度は，新型コロナウイルス感染症の影響により，会場でのコンテストは実施せず，代替事業としてコンテスト問題の公表のみを行ったが，今年度からは，より多くの生徒が安心してコンテストに参加できるよう，各参加者が在籍する高校で実施する形式とした。

コンテストは平成１０年度から始められ，今年度で２４回目の開催となった。各受賞者数は，最優秀賞１名，優秀賞１２名，奨励賞１８名，始動人アイデア賞１１名（一昨年度は最優秀賞１名，優秀賞１３名，奨励賞２３名，アイデア賞５名）の計４２名であった。

コンテストは，例年どおり数学的な発想を問う６題の問題から４題を選択し，３時間で解答する形式で行われ，解答の際には定規，コンパス，はさみ，電卓の使用を認めている。

群馬県では，今年度から教育イノベーションの一環として，ＳＴＥＡＭ教育の実践を推進しており，この数学コンテストもＳＴＥＡＭ教育推進に関する行事として実施することとなった。今回は，この観点を踏まえた問題として，実社会との関連を意識した図形の問題や，芸術的なデザインについて数理的に考察する問題を出題した。これらの問題の解決を通して，新しい社会を切り拓くための創造性の基礎を養うきっかけとなればと考えている。答案の中には，論理的に整理された素晴らしいものも見られた。また，正解に至らない答案の中にも，発想のユニークなものが数多く見られた。

本コンテストは，３時間集中して数学の問題を考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど，既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を提供しているものであり，このことは数学のみならず，今後様々な教科を学習したり，教科横断の探究的な学習を進めていく上でも良い経験になっていると思われる。今後も，本コンテストの特徴を維持しながら更に内容を発展させ，生徒が数学を楽しむ機会となるよう一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年(中等)	１年(４年)	２年(５年)	３年(６年)
参加生徒数	２４２	２６１	１０

合　計　５１３名

※次のページ以降に令和３年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから６ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です(13：00 ～ 16：00)。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の問題番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，賞を授与することがあります。
6　必要があれば，定規，コンパス，はさみ，電卓を用いることができます。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚をすべて提出してください。

Ⅱ　問題及び解答例

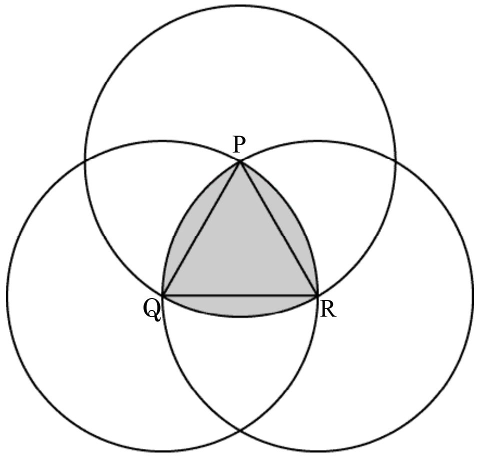
1　以下の(a)～(c)の手順で構成される図形「ルーローの三角形」について考える。

(a)　1辺の長さが r の正三角形PQRをかく。

(b)　各頂点を中心とする，半径 r の円をかく。

(c)　すべての円が重なる部分の図形に注目し，これを，幅 r のルーローの三角形と呼ぶ。

また，(a)の正三角形の頂点P，Q，Rを，ルーローの三角形の「頂点」と呼ぶ。



次の(1), (2)の問いに答えなさい。

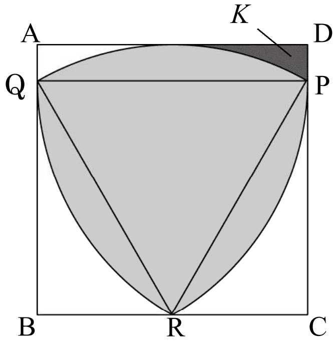
ただし，$\pi = 3.14$，$\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.73$ とする。

(1)　地下の下水道等の入り口に用いられるマンホールの蓋は，一般的に円形のものが多いが，ルーローの三角形の形状でこの蓋を作ると，円形のものより小さく作れるため，材料費を安く抑えることができると言われている。

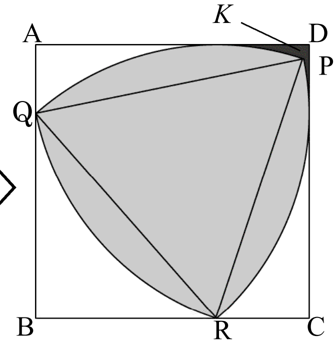
幅 r のルーローの三角形の面積を S_1，直径 r の円の面積を S_2 としたとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を小数第4位を四捨五入して答えなさい。

(2)　幅 r のルーローの三角形は，1辺の長さ r の正方形の中で，4辺と接しながら回転することができる。この性質を利用し，ルーローの三角形の形状をしたロボット掃除機が販売されており，円形の掃除機に比べて，部屋の隅にある届きにくい部分の面積を，より小さくできると言われている。

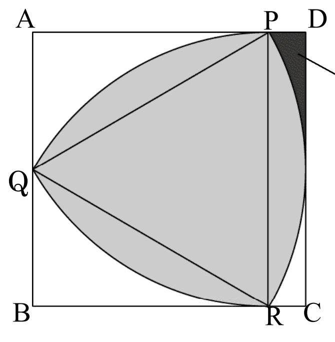
以上の状況についてモデル化したのが，下の図Ⅰ～図Ⅲである。幅2のルーローの三角形PQRが，1辺の長さ2の正方形ABCDの中で反時計回りに回転する。ここで，頂点Qが辺AB上，頂点Rが辺BC上にあるときを考える。正方形の中で，ルーローの三角形と重なっていない4つの部分のうち，その周に頂点Dを含む部分の図形を K とする。頂点Pと頂点Dとの距離が最小となるとき，図形 K の面積を求めなさい。



図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ

［解答例］

(1)　ルーローの三角形の構成手順より

$S_1 =$（半径 r，中心角 60° の扇形）$\times 3 -$（正三角形PQR）$\times 2$

$$= \pi r^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 - r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$= \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} r^2$$

S_2は直径 r の円の面積だから

$$S_2 = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}r^2$$

よって

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2(\pi - \sqrt{3})}{\pi}$$

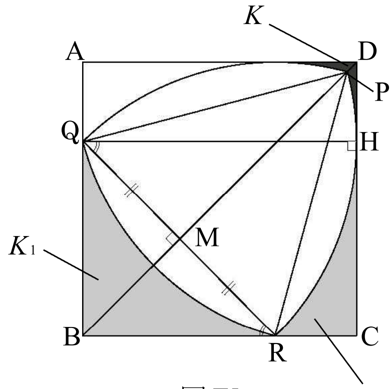
$\pi = 3.14$，$\sqrt{3} = 1.73$ として計算し，小数第 4 位を四捨五入すると，
求める値は　0.898

(2)　線分 QR の中点を M とすると，図Ⅰ～図Ⅲにおいて

$$\mathrm{BM} + \mathrm{MP} + \mathrm{PD} \geqq \mathrm{BD} \quad \cdots ①$$

が成り立ち，等号が成立するのは点 B，M，P，D がこの順で一直線上にあるときである。

また，$\angle \mathrm{QBR} = 90^\circ$ より，頂点 B は線分 QR を直径とする円の円周上にあるから，BM = 1 である。よって①は，$\mathrm{PD} \geqq 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}$ と変形できる。



図Ⅳ

図Ⅳのように，頂点 P が対角線 BD 上にあるとき，点 M も対角線 BD 上にあり，①の等号が成立して，頂点 P と頂点 D との距離は，最小値 $2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}$ となる。

このとき，BM ⊥ QR だから，三角形 QBR は直角二等辺三角形であり，$\mathrm{BQ} = \mathrm{BR} = \sqrt{2}$ である。ルーローの三角形 PQR と正方形 ABCD の辺 CD が接する点を H とすると，QH ⊥ CD で QH // BC であるから，$\angle \mathrm{HQR} = \angle \mathrm{BRQ} = 45^\circ$ となる。

正方形の中で，ルーローの三角形と重なっていない 4 つの部分のうち，その周に頂点 B を含む図形を K_1，頂点 C を含む図形を K_2 とすると，図Ⅳより，

(K_1 の面積) = (三角形 QBR) − {(頂点 P を中心とする扇形 PQR) − (正三角形 PQR)}

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

(K_2 の面積) = (長方形 QBCH) − {(三角形 QBR) − (頂点 Q を中心とする扇形 QRH)}

$$= \sqrt{2} \cdot 2 - 1 - \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= -1 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$$

よって，

(K の面積) = (正方形 ABCD) − K_1 − K_2 × 2 − (ルーローの三角形 PQR)

$$= 2 \cdot 2 - \left(1 + \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right) - \left(-1 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 - \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \cdot 2^2$$

$$= 5 - 4\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$\pi = 3.14$，$\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.73$ として計算し，小数第 4 位を四捨五入すると，
求める値は　0.043

［出題の意図］

「ルーローの三角形」という図形についての問題です。問題文からルーローの三角形の特徴を正しく捉え，適切な図をかいて考察することができるかを問いました。(2)でロボット掃除機を取り上げましたが，このように，数理的な性質に注目して，工業製品をデザインすることがよくあります。他の応用例について調べ，数学の立場から考察してみてください。

［講評］

513 名中 373 名が選択し，(1)，(2)をともに正解したのは 6 名，(2)は 14 名が正解しました。

(1)では，S_2を求める際に，半径を r として計算した誤答が多くありました。(2)では，頂点 P が対角線 BD 上にあるときに頂点 P と頂点 D との距離が最小になることを証明していなくても正解としましたが，解答例のように不等式を用いて証明した優れた解答もありました。K の面積を求めるには，$\angle \mathrm{BRQ} = 45^\circ$ と $\mathrm{QH} \perp \mathrm{CD}$ に気づけるかどうかがポイントです。$\angle \mathrm{PQH} = 15^\circ$ に注目した優れた解答もありました。

なお，正方形の中でルーローの三角形が回転したときの頂点 P の軌跡を考え，正方形の隅で頂点 P が届かない部分の面積を求めると，およそ 0.017 となります。どのように求めたらよいか，高校数学の知識も活用して，考えてみてください。

2　中国で発明された羅針盤が，ヨーロッパで改良され，活用され始めた頃，X 国のある商人が新しい航路を発見し，新たな国際貿易を始めた。

この商人による A 国，B 国，C 国との貿易は，次のような「交換」によって行われる。

> A 国：香辛料 1 袋と羊毛 1 袋を持っていくと，刀 2 本と交換することができる。
> B 国：羊毛 1 袋と刀 1 本を持っていくと，香辛料 3 袋と交換することができる。
> C 国：刀 1 本と香辛料 1 袋を持っていくと，羊毛 4 袋と交換することができる。

いま，この商人が，香辛料 1840 袋，羊毛 1840 袋，刀 1840 本を保有しているものとする。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1)　A 国，B 国，C 国との交換を 1 回ずつ行ったとき，商人の保有する香辛料，羊毛，刀はそれぞれいくつになるか求めなさい。

(2)　A 国，B 国，C 国との交換を何回か行ったとき，香辛料が 2021 袋以上になったが，羊毛と刀の数は変わらなかったという。このとき商人は，A 国，B 国，C 国との交換を，それぞれ最小で何回行ったか，求めなさい。

[解答例]

(1)　交換を 1 回ずつ行うと，香辛料は 1 袋，羊毛は 2 袋増え，刀は増えない。
したがって，香辛料は 1841 袋，羊毛 1842 袋，刀 1840 本となる。

(2)　刀について，B 国または C 国で交換する度に 1 本減り，A 国へ行くと 2 本増える。羊毛について，A 国または B 国で交換する度に 1 袋減り，C 国へ行くと 4 袋増える。刀と羊毛は元の量から変化しないことより，A 国，B 国，C 国へそれぞれ x，y，z 回行ったとすると，以下の方程式が成り立つ。

$y + z = 2x$，$x + y = 4z$

これを解くと，$(x,\ y,\ z) = (5k,\ 7k,\ 3k)$が得られる。（$k$ は自然数）

このとき，香辛料が増えた量は$-x + 3y - z$だから，k を用いて表すと

$-x + 3y - z = -5k + 3(7k) - 3k = 13k$　（袋）　である。

香辛料が 2021 袋以上になることから，$1840+13k \geqq 2021$　より　$k \geqq 13.9\cdots$

k が自然数であることより，最小の k は 14

$k = 14$ のとき，　$(x,\ y,\ z) = (70,\ 98,\ 42)$

すなわち，A 国と 70 回，B 国と 98 回，C 国と 42 回交換を行えばよい。

ここで，各国を訪れる順番がどのようであったとしても，羊毛と刀は最大で 168 袋と 140 本しか減らないので，貿易の途中でなくなってしまうことはない。

[出題の意図]

与えられた条件を整理して，数理的に表現し，問題を解決できるかどうかを問う問題として出題しました。何回か貿易を行った場合の品物の個数を考える実験的な試行をもとに，一般化して数式を作って解決するという過程は，数学の問題を考える上で基本となる考え方です。

[講評]

513 名中 479 名が選択し，143 名が正解しました。

(1)は多くの解答が正解でした。(2)では 3 つの貿易品の個数変化を表にして回数を数える方法，条件に合う最小回数を見つけてその貿易ルーティーンを繰り返す方法や，数式で個数を表す方法など様々な解答がありました。論理的に整理された解答を正解としました。また，ユニークな方法や地道な努力によって正解の回数を導き出せたものについても正解としました。不正解の中には，あと一歩だったものも多くありました。

3　一直線に伸びた道沿いに，1 番地から 200 番地までの区画が，順番に等間隔で割り振られている町がある。現在，2 番地や 3 番地など，番地が素数である区画のすべてに家が建っており人が住んでいるが，それ以外の番地の区画は空き地となっている。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，必要があれば，後の【参考】を活用してもよい。

(1)　競合する 2 つの食パン店 A，B が，この町の空き地にそれぞれ 1 店舗ずつ出店しようとしており，次の≪条件 1≫のもとで，出店予定地を明日同時に申請することになっている。

≪条件 1≫
- ・全家庭が毎日，自宅から最寄りの店舗で 1 斤ずつ食パンを買う。
- ・2 店から等距離にある家の住民は，無作為にどちらかの店を選ぶ。
- ・相手の店の出店予定地を事前に知ることはできない。
- ・他の町からの来客は考えない。

2 店 A，B は，相手の店よりも有利となるように最適な出店予定地を申請するものとする。あなたが A 店の店主であれば，どの区画に出店すべきと考えるか。出店予定地として申請する番地を答え，その番地を選んだ根拠を示しなさい。

(2)　2 店 A，B で協議した結果，2 店は統合して 1 店舗を出店することになった。統合した店舗は次の≪条件 2≫のもとで，出店予定地を決める。

≪条件 2≫
- ・全家庭が毎日 1 斤ずつ食パンを買う。
- ・この町の住民は，家と店舗の間を最短距離で往復する。
- ・他の町からの来客は考えない。

このとき，全町民の平均移動距離が最小となるような店舗の番地をすべて答えなさい。また，その根拠を示しなさい。

【参考】200 以下の素数

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199

［解答例］

(1)　この町には 46 軒の家が建っている。A が出店するべき番地は，B がどこに出店したとしても必ず全体の半数以上（すなわち 23 軒以上）の客を確保できる場所である。

いくつか例を挙げて考える。

A が 1 番地に出店するとする。このとき，もし B が 4 番地に出店してしまうと，3 以上の番地に住む町民はすべて B の客となってしまう。したがって，A は 1 番地に出店するべきではない。

A が 4 番地に出店するとする。このとき，もし B が 6 番地に出店してしまうと，7 以上の番地に住む町民はすべて B の客となってしまう。したがって，A は 4 番地に出店するべきではない。

以降も同様に考えると，A が出店するべきは，全 46 軒を 23 軒ずつに分けた地点，すなわち 84，85，86，87，88 番地である。この 5 か所のいずれかであれば，B がどこに出店したとしても必ず 23 軒以上からの客を確保できる。

なお，B も同様に考え，84，85，86，87，88 番地のいずれかに申請することにな

る。したがって，この 5 つの番地には優劣がつかない。
よって，A が出店するべき番地は 84，85，86，87，88 番地のいずれかである。

(2)　統合した店舗が出店する番地を x 番地とする。全家庭の移動距離の平均が最小となるのは、全家庭の移動距離の合計が最小となるときである。この全家庭の移動距離の合計を y とすると

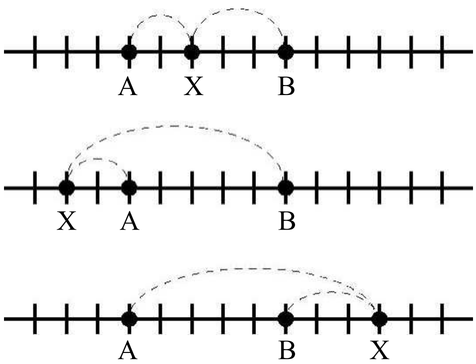
$$y = |x-2| + |x-3| + |x-5| + \cdots + |x-197| + |x-199| \quad \cdots ①$$

と表せる。

ここで，一般に $a < b$ のとき，

$|x-a| + |x-b| \geqq b-a$　が成り立つ。

この不等式において等号が成立するのは，$a \leqq x \leqq b$ のときである。



したがって，①において，

$|x-2| + |x-199| \geqq 199-2 = 197$　（等号成立は，$2 \leqq x \leqq 199$ のとき）
$|x-3| + |x-197| \geqq 197-3 = 194$　（等号成立は，$3 \leqq x \leqq 197$ のとき）
$|x-5| + |x-193| \geqq 193-5 = 188$　（等号成立は，$5 \leqq x \leqq 193$ のとき）
⋮
$|x-83| + |x-89| \geqq 89-83 = 6$　（等号成立は，$83 \leqq x \leqq 89$ のとき）

が成立する。y が最小となるのは，x が全ての等号成立の条件の共通範囲を考えて，$83 \leqq x \leqq 89$ を満たすときである。したがって，統合した店舗が出店するべき番地は，84，85，86，87，88 番地である。

［出題の意図］

ものごとを簡略化して考えることを「モデル化」といいます。町への出店を「モデル化」して，よりよい方法を考察する問題として出題しました。

(1)は競合する 2 つの店舗の立地について考える問題でした。競合する相手の店の位置をいろいろずらしながら最適な立地を見つけられるかがポイントでした。結果として 2 つの店舗がほとんど同じ場所に出店することになります。しかし，この町の客にとっては 2 つの店舗が隣接していることは，必ずしも望ましいとはいえません。2 つの店舗が 50 番地や 150 番地あたりにあるほうが助かる客も多いはずです。ところで，皆さんは特定の地域にコンビニエンスストアが集まっているのを見たことがあるでしょうか。これは「モデル化」されたこの問題のような結果が，現実の世界でも起こっているのかもしれません。

(2)は，1 つの店舗の立地について考える問題でした。客の移動距離の合計を，関数として捉えることができるかどうかがポイントでした。意思決定に説得力をもたせる際

に，数学的な考え方が役立っているのです。

素数の番地に家が建っているということで，家が多く集まる箇所とまばらな箇所がありますが，その粗密と出店すべき番地とは無関係で，むしろ家の軒数で出店すべき番地が決まるということは意外に思えるかもしれません。また，(1)と(2)では，設定が異なるにもかかわらず，選択すべき番地が全く同じであったことも興味深い結果ではないでしょうか。

皆さんの日常の中に数学的な考え方が用いられていることは数多くあります。ぜひ，身の回りで活用されている数学を探してみてください。この問題に更に興味がある人は「ゲーム理論」や「オペレーションズ・リサーチ」という分野を調べてみてください。

［講評］

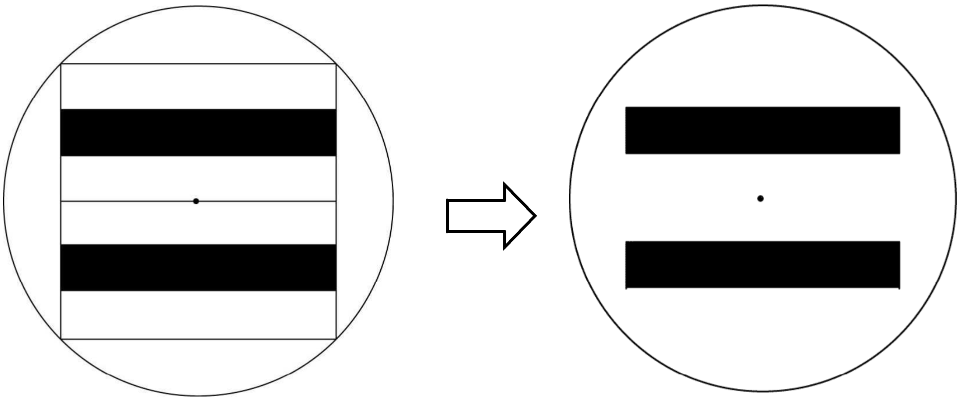
513名中323名が選択し，20名が正解しました。

(1)では，224名が正しい番地を選ぶことができました。B店の出店位置をずらして実験しながら，Bがどこに出店したとしても確実に23軒以上からの客を確保できる場所を探した解答が多く見られました。84，85，86，87，88番地のいずれかであれば，どこであってもよいことを説明した素晴らしい解答もありました。

(2)の正解者は20名と少なかったものの，移動距離の合計の変化に着目した解答や，絶対値を含む関数の特徴に着目した解答が見られました。いずれも必要なことがわかりやすく的確に述べられており，素晴らしい解答ばかりでした。

4　次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

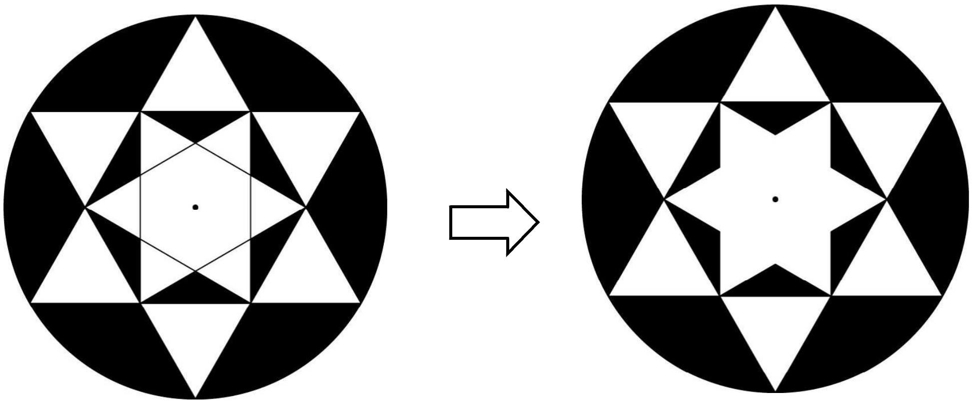
(1)　半径6の円に正方形が内接している。図Ⅰのように，この正方形の向かい合う2辺を6等分し，正方形を6つの長方形に分けて，そのうちの2カ所に色を塗った。この図形を，円の中心を軸としてコマのように高速で回転させたとき，色がついているように見える部分（色が塗られた長方形が通過している領域）の面積を求めなさい。ただし，図Ⅱのように図中の線はないものとして考えること。



図Ⅰ　　　　　　　　　　　　　　図Ⅱ

(2)　図Ⅱの図形を，円の中心を軸としてコマのように高速で回転させると，円内の部分によって色の濃さの見え方に違いが出ることがわかった。回転しているときに見える円全体の様子を，コンパスや鉛筆を用いて，絵に描いて示しなさい。ただし，回転しているときに見える色の濃さの違いがわかるように，濃淡を明確に表現すること。

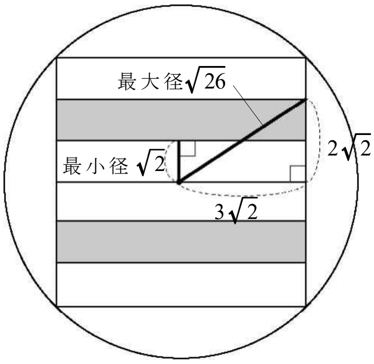
(3)　半径6の円の円周を6等分し，その円周上の点を結んだ線分や，その線分の交点どうしを結んでできた線分によってできた図形について，図Ⅲのように色を塗りわけた。この図形を，円の中心を軸としてコマのように高速で回転させたときに見える円全体の様子を，コンパスや鉛筆を用いて，色の濃さの違いがわかるように，絵に描いて示しなさい。また，回転しているときに見える図形の特徴を，円の中心からの距離や色の濃さに着目して，詳細に説明しなさい。ただし，図Ⅳのように図中の線はないものとして考えること。



図Ⅲ　　　　　　　　　　　　　　図Ⅳ

［解答例］

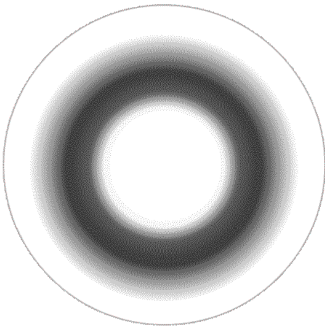
(1) 色がついているように見える部分について，中心から最も遠いところまでの距離（最大径）と中心から最も近いところまでの距離（最小径）を求める。円の半径が 6 であることから，円に内接する正方形の 1 辺は$6\sqrt{2}$であるから，以下の図から，三平方の定理を用いて最大径と最小径を求めることができる。



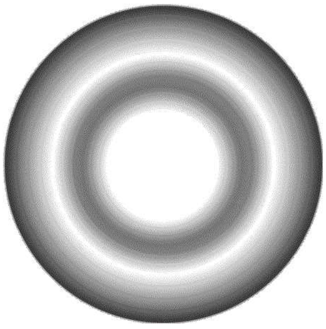
よって，最大径が$\sqrt{26}$，最小径が$\sqrt{2}$ のドーナツ状の部分の面積を求めればよいので，最大径の円の面積から最小径の円の面積を引けばよいので

$\pi(\sqrt{26})^2 - \pi(\sqrt{2})^2 = 24\pi$

(2)（例）



(3)（例）



中心からの距離を r とすると、色の詳細は以下のとおり。

（ｉ）$0 \leqq r < 2$ のとき、白色。

（ⅱ）$2 \leqq r \leqq 3$ のとき、r が大きくなるにしたがって色が濃くなる。

（ⅲ）$3 < r \leqq 2\sqrt{3}$ のとき、r が大きくなるにしたがって色が淡くなる。
　$r = 2\sqrt{3}$ のときはほぼ白色。

（ⅳ）$2\sqrt{3} < r \leqq 6$ のとき、r が大きくなるにしたがって色が濃くなる。
　$r = 6$ のとき最も色が濃い。

［出題の意図］

Science（科学）,Technology（技術）,Engineering（工学）,Art（芸術）,Mathematics（数学）など，複数の学問分野を統合して問題解決をしたり，新たな価値を見いだしたりするための力を育成する STEAM 教育が進められています。今回の問題は，数学と芸術の分野を融合した問題として，答案に絵を描いてもらうことを意図して出題しています。

解答では，中心からの距離によって同心円をイメージし，その半径において，円周上の黒の割合と白の割合によって生じる色の濃さの違いをどう表現するかがポイントとなりました。

［講評］

513 名中 281 名が選択し、3 名が正解しました。

この問題では，図形をコマのように回転させることから，同心円を用いて考えることがポイントです。

(1)では，最大径と最小径の考え方が求められています。最大径と最小径の考え方は日常生活や身の回りの事柄においても活用できる，大切な考え方です。(1)で正解にならなかった解答では，計算ミスが多かったようです。

(2)では，「色の濃さ」の考え方が要求されています。今回は絵による表現だけで，「色の濃さ」を伝えなければいけないため，根拠となる考え方をしっかりとしておく必要があります。

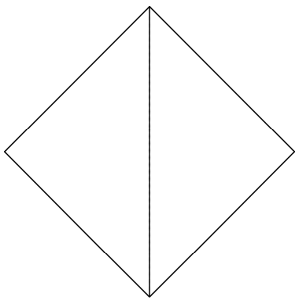
(3)では，(2)と同様に「色の濃さ」が求められています。解答によっては，白と黒が混ざって灰色になるといった色という概念で解答してくれた人もいましたが，今回は，採点規準に $2\sqrt{3}$ でほぼ白色になることをどのように表現・説明するかを採点規準に入れました。このことについてはできている人が多かったですが，「円の中心からの距離に着目して」と問題文にあるにもかかわらず，ほとんどの解答に半径を利用した説明文がなかったのが残念でした。

今回は図形をコマのように回転させるといった出題でしたが，出題された図形以外にも回転させると様々な模様になるものが身の回りには多くあります。好奇心をもって想像したり，普段目にしているものの見方を変えることで，新たな世界が見えてくるかもしれません。

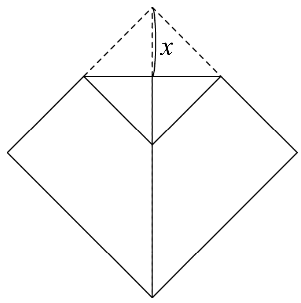
5　次の【五角形の折り方】によって，正方形の折り紙から五角形が折れることが知られている。このことについて，次の(1)～(4)の問いに答えなさい。ただし，必要があれば問題用紙の余白部分を正方形に切り取り，実際に折りながら考察してもよい。

【五角形の折り方】

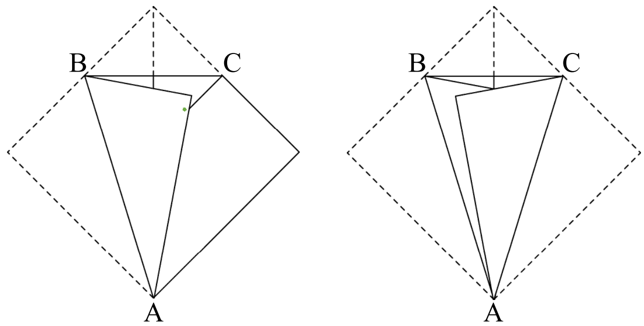
①正方形を対角線で折る。



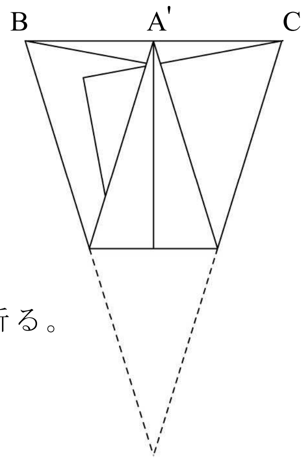
②ある長さ x のところで折り返す。



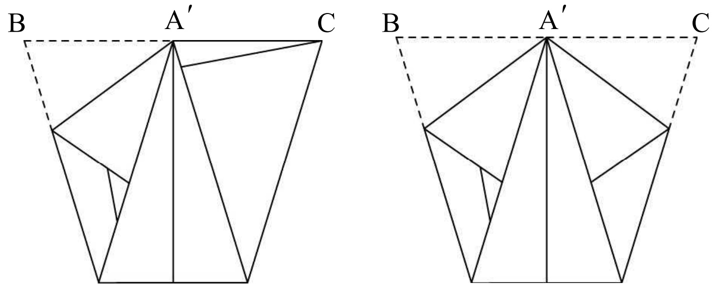
③辺 AB，辺 AC を折り目にして折る。



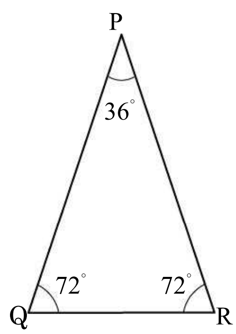
④頂点 A が辺 BC に重なるように折る。



⑤辺 A′B，A′C が④で折った三角形の斜辺と重なるように折る。



(1)　右の二等辺三角形 PQR において，QR ＝ 1 のとき PQ の長さを求めなさい。



(2)　【五角形の折り方】の手順③における△ ABC において，∠ BAC ＝ 36° であれば，手順⑤によってできる五角形は正五角形となることを証明しなさい。

(3)　【五角形の折り方】の手順②において，正方形の頂点と正方形の対角線の交点が重なるように折ってしまうと，できた図形は正五角形にならないことを証明しなさい。

(4)　1 辺の長さが 15 cm の正方形の折り紙を用いて，可能な限り正確な正五角形を折るためには，【五角形の折り方】の手順②における x (cm)をどのような長さにすればよいか，小数第 2 位を四捨五入して求めなさい。

ただし，$\sqrt{2} = 1.414$，$\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3.077$ として計算してよい。

［解答例］

(1)　∠ ABC の二等分線と辺 AC との交点を I とし，

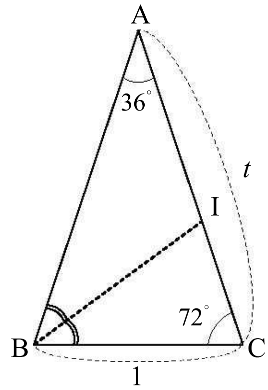
AC ＝ t とおく。BC ＝ BI ＝ AI ＝ 1 より

IC ＝ t － 1

また，△ ABC ∽△ BIC より

t : 1 ＝ 1 : t － 1

t ＞ 0 より，これを解いて，$t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



(2)　五角形 A′DEFG が正五角形であることを示す。

①五角形の内角がすべて等しいことを示す。

∠ CA′G ＝ θ とおくと，図形の折り返しから

∠ CA′G ＝∠ GA′C′＝ θ　であり

図形の対称性から

∠ BA′D ＝∠ DA′B′＝ θ　となる。

また，∠ EAF ＝ 36°より　$4\theta + 36° = 180°$

よって，△ A′GC と△ A′GC′ は二等辺三角形である。

つまり，∠ A′GC ＝∠ A′GC′ ＝∠ A′C′G ＝ 72°

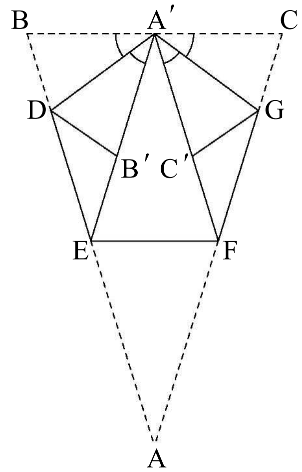
であり，∠ GC′F ＝ 108°，∠ C′GF ＝ 36°となり

△ C′FG も二等辺三角形であることが分かる。

∠ AFE ＝∠ AEF ＝ 72°であり，以上のことから

∠ DA′G ＝∠ A′GF ＝∠ GFE ＝ 108°となり，

この五角形はすべて内角が等しいことが分かる。



②五角形の辺の長さがすべて等しいことを示す。

△ AEF ∽△ ABC であり，相似比は 1 : 2 である

よって，EF : BC ＝ 1 : 2 より，EF ＝ A′C である。

また，A′C ＝ A′G ＝ A′F より，EF ＝ A′G であることが分かる。

さらに，△ C′FG は二等辺三角形であることから

C′F ＝ C′G（＝ GC）

よって，FG ＝ FC － GC ＝ A′F － C′F ＝ A′C′＝ A′G

以上のことから，A′G ＝ GF ＝ EF を示すことができた。

同様に考えて，A′D ＝ DE ＝ EF も示すことができるので，

この五角形の辺の長さはすべて等しいことが分かった。

以上，①，②より，五角形 A′DEFG は正五角形である。

(3)　正方形の頂点と正方形の対角線の交点が重なるように折ったとき，

【五角形の折り方】の手順②における x は

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$

△ ABC において点 A から BC に垂線を下ろし，交点を H とする。

CH ＝ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$　，AH ＝ $\sqrt{2}\,a-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$　と分かる。

CA ＝ $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$ となる。

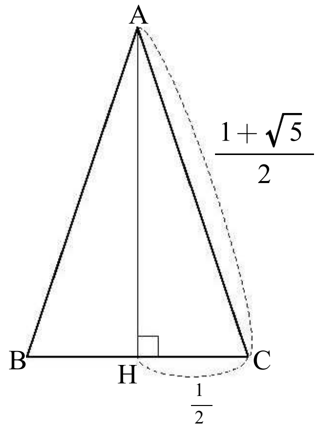
ここで，(1)，(2)より，この手順によって正五角形となるためには，

$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる必要がある。

しかし実際は，$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a : \dfrac{\sqrt{5}}{2}a = 1 : \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ となるため，

できた図形は正五角形にならない。

(4) 正確な正五角形を折るためには手順③でできた△ ABC が，
(1)で考察した△ ABC と相似な三角形となればよい。



このとき，$\mathrm{AH} = \sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$

つまり，

$\mathrm{CH} : \mathrm{AH} = 1 : \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

を満たせばよい。

ここで，【五角形の折り方】の手順②において，
一辺の長さが a の正方形の折り紙をある長さ x のところで折ったすると，

$\mathrm{AH} = \sqrt{2}a - x$，$\mathrm{CH} = x$ となるので

より $x : \sqrt{2}a - x = 1 : \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}a$ となる。

また，$\sqrt{2} = 1.414$，$\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3.077$，$a = 15$ より

$x = 5.2023\cdots$ よって，$x = 5.2$ cm とすればよい。

［出題の意図］

折り紙を数学的に考察する問題です。その中でも，今回は黄金比についても関連させながら考える問題としました。【五角形の折り方】の手順②からも分かるように，x の値を変化させることで様々な二等辺三角形を折ることができます。その中で，辺の比が黄金比となる二等辺三角形を折ることができれば，最終的に正五角形を折ることが可能となります。

(2)の解答過程で気付いたかもしれませんが，【五角形の折り方】の手順で折っていくと△ABCと相似な三角形が数多く現れてきます。これも折り紙の中に現れる数学的な美しさだと思います。

また，(4)からわかるように，x の値が 1 mm でもずれてしまうと正五角形になりません。ぜひ、もう一度自分自身で折り紙を折って，それを確かめてみてください。

［講評］

513 名中 207 名が選択し，1 名が正解しました。

満点に近い解答は数多くありましたが，そのほとんどが(2)の証明問題において「すべての角が等しい」または「すべての辺の長さが等しい」のどちらか一方のみを示した解答になっていました。(3)では，解答例で示したもの以外に，工夫された考え方を用いた解答が数多く見られました。(4)では，三平方を使っている解答が見られましたが，計算が複雑になり，正解にたどり着けないものが多くありました。(1)で扱った辺の比をいかにうまく活用するかがこの問題のポイントでした。

6　右の【例】のように，9行×9列のマスのすべてに，1から9までのいずれかの数字を記入する。記入する際には，横の各行に1から9までの異なる数字を記入するものとし，各行の中には同じ数字が記入されないようにする。

　すべてのマスに数字を記入した後，縦の列ごとに書かれている数字の合計を求め，9列の合計のうちの最小値を100倍した金額を賞金として獲得できるものとする。

　例えば右の【例】では，左から4列目の40が最小値であるため，4000円を賞金として獲得できる。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　獲得できる賞金の最大額を求めなさい。

(2)　数字を記入する際のルールを追加し，「縦の各列の中では，記入されたどの2つの数字を選んでも，その差が4以下となる」ようにする。このときに獲得できる賞金の最大額を求め，その額が最大であることを証明しなさい。

【例】

列↓　行→

	3	5	9	4	1	6	7	2	8
	9	5	1	3	4	7	6	8	2
	6	2	3	8	7	1	4	9	5
	1	8	7	3	5	9	6	2	4
	5	1	3	8	7	2	6	4	9
	8	3	7	2	9	5	1	6	4
	3	9	2	1	6	8	7	4	5
	2	4	1	7	8	5	3	9	6
	6	7	8	4	3	9	2	1	5
合計	43	44	41	40	50	52	42	45	48

［解答例］

(1)　最大値は，4,500円である。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8
45	45	45	45	45	45	45	45	45

　9×9のマスに記入する数の総和は
$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 9 = 405$
であり，この405を各列に割り振ることになる。ここで，$405 \div 9 = 45$ であるから，列の合計が45より大きい列があったとすると他の列が45より小さくなってしまい，賞金が4500円未満となるので，賞金を最大にするためには，各列に均等に合計を割り振る必要がある。

　そこで，例えば左の図のように記入することによって，賞金4,500円が得られる。

(2)　1を記入できる列は5つ以下である。6つ以上あるとすると，そのうちのどこかの列で6以上の数字を記入しなければならない。これは追加のルールに反する。

(i)　1を記入する列が5つのとき

左から5列目までに1を記入して考えればよい。このとき，追加のルールにより5列目までは1から5を記入することになる。左から5列目までの各列の合計の平均は$(1+2+3+4+5)\times 9\div 5=27$であるから，各列の合計の最小値は27以下で，賞金は2,700円以下であることがわかる。

(ii)　1を記入する列が4つのとき

金額を大きくするには，各列の合計を大きくする。1を含む列の合計もできるだけ大きくする必要がある。ゆえに，左から4列目までに1, 3, 4, 5を記入して考えればよい。左から4列目までの各列の合計の平均は$(1+3+4+5)\times 9\div 4=29.25$であるから，各列の合計の最小値は29以下で，賞金は2,900円以下であることがわかる。

(iii)　1を記入する列が3つのとき

左から3列目までに1, 4, 5を記入して考えればよい。左から3列目までの各列の合計の平均は$(1+4+5)\times 9\div 3=30$となるから，賞金は3,000円以下であることがわかる。

(iv)　1を記入する列が2つのとき

左から2列目までに1, 5を記入して考えればよい。左から2列目までの各列の合計の平均は$(1+5)\times 9\div 2=27$となるから，賞金は2,700円以下であることがわかる。

(v)　1を記入する列が1つのとき

賞金は900円である。

以上より，獲得できる賞金は3,000円以下であることが証明された。

例えば，下の図のように記入すると，賞金3,000円が得られる。

1	4	5	2	3	6	7	8	9
1	4	5	2	3	6	7	8	9
1	4	5	2	3	6	7	8	9
4	5	1	3	6	2	7	8	9
4	5	1	3	6	2	7	8	9
4	5	1	3	6	2	7	8	9
5	1	4	6	2	3	7	8	9
5	1	4	6	2	3	7	8	9
5	1	4	6	2	3	7	8	9

30	30	30	33	33	33	63	72	81

［出題の意図］

論証の問題です。各列の合計の平均を考えることで，その中の最小値の上限を確認することがポイントです。獲得賞金が何円以下になるかという必要条件を導き，その上限の賞金が獲得できる例を示すことで十分条件を得ます。起こりうる可能性をすべて確認しながら論理的に検討し，その手順を的確に表現できるかを試す問題として出題しました。

［講評］

513 名中 389 名が選択し，3 名が正解しました。その中の 1 名の解答は，論理的にわかりやすく表現された，完璧な答案でした。

(2)では，多くの解答者が左から 5 列目までで 1 から 5 を記入して考えればよいことに気づいていましたが，解答例の(i)にあたる考察だけで終わりにしたものがほとんどでした。1 が記入される列の個数によって状況が変わるというところまで思考が届くかどうかが，この問題の大きなポイントとなりました。また，獲得賞金が 3,000 円以下であるという必要条件だけで，3,000 円と結論づけてしまう答案も多くありました。必要条件を求めて十分条件を示すことは，真実を証明する方法の 1 つです。数学を学ぶことを通して，論理的な思考の面白さを知り，その力を磨いていってほしいと思います。