

令和5年度

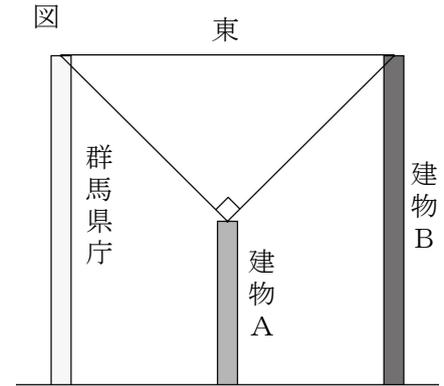
群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページから6ページまであります。また、解答用紙は6枚あります。
- 2 制限時間は3時間です(13:00~16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 3 解答は、該当の問題番号が示された解答用紙に記入し、コンテスト終了後は、解答用紙を必ず4枚提出してください(残りの解答用紙は持ち帰ってください)。
- 4 解答用紙には、コンテスト番号、氏名を必ず記入してください。コンテスト番号、氏名のいずれかが記入されていないものは、採点の対象外となることがあります。
- 5 解答には、途中の考え方などを簡潔・明瞭・的確に書いてください。論理性、表現力、アイデアの観点で評価します。正解でなくても賞を授与することがあります。
- 6 必要があれば、定規、コンパス、電卓を用いることができます。

- 1 吉野くんは、群馬県庁、建物A、建物Bの付近を散策していた。吉野くんが、建物Aから西方向へ200m進んだ地点Oから建物Aの方向を眺め、図のように、それぞれの建物の屋上の中央を頂上として3つの建物の頂上を結ぶと、その形が直角二等辺三角形に見えた。また、群馬県庁と建物Bの高さがちょうど同じに見え、建物Aの高さが建物Bの高さのちょうど半分に見えることに気付いた。また、地点Oから南方向へ100m進んだ地点Sから3つの建物を眺めると、手前から建物B、建物A、群馬県庁の順に建物が一直線上に並んでおり、群馬県庁と建物Bの頂上が重なって同じ高さに見えた。



建物Bの高さが60mであることが分かっているとき、次の(1)、(2)の問に答えなさい。

ただし、地点O、地点Sや建物が建っている地点の標高を0m、吉野くんの目線の高さも0mとし、吉野くんと各建物との間に障害物はないものとする。また、建物の位置を示す際には、地点Oから見て、次の(例)にしたがって示すこと。

(例) 建物Aの建っている地点A₀は、地点Oから見て、東方向200mの地点にあるので、(200, 0)と示す。また、ある建物Xの建っている地点X₀が、地点Oから見て、西方向76m、北方向139mの地点にあるとき、(-76, 139)と示す。

- (1) 建物Bは地点Oから見てどの位置にあるか、求めなさい。
ただし、小数第一位を四捨五入して答えること。
- (2) 建物Aおよび群馬県庁の高さと、群馬県庁は地点Oから見てどの位置にあるかをそれぞれ求めなさい。
ただし、それぞれの解答は、小数第一位を四捨五入して答えること。

2 クラスでの席替えなどに用いられる「あみだくじ」について、次の(1), (2)の問に答えなさい。

(1) 図 I のような縦線 6 本のあみだくじについて考える。隣り合う縦線どうしを結ぶ水平な横線を何本か引き、①～⑥のすべてが同じ番号に行きつくようなあみだくじを完成させなさい。

なお、横線は何本引いてもよいものとするが、できるだけ本数が少ない解答を高く評価することとする。

(2) (1) のような通常のアミダクジのルールに加えて、新たなルールである「ワープ」の機能を考える。

図 II のように、○を 2 つ、あみだくじの縦線上に、横線と重ならないように配置する。○は「ワープ」を表し、横線を通ることなく、○から○へと相互に移動することができる。

図 II は①～④のすべてが同じ番号へ行きつくようにした例である。

図 I の縦線 6 本のあみだくじについて、①～⑥のすべてが同じ番号に行きつくよう、あみだくじに○ 2 つと水平な横線を何本か引くとき、横線は最低何本必要であるか、その理由を含めて答えなさい。

図 I

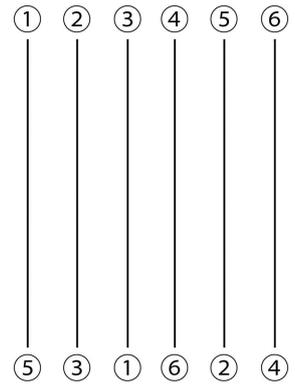
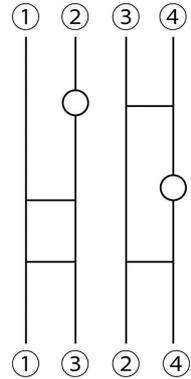


図 II



- 3 ある島国には、図のような位置にA島～D島がある。
この島国にはこの4島の他に、3島A, B, Cを結んだ△ABCの内側に首都島Pがあり、3島B, C, Dを結んだ△BCDの内側に人工島Qがある。

島の間の距離を測ると、BC, CD, DB間は距離が等しく、BP, PQ, QB間も距離が等しいことが分かっている。次の(1), (2)の問に答えなさい。

ただし、問題で扱うすべての船の速度は常に一定で、船は島の間を真っ直ぐ進むものとする。また、島は点として考えてよいものとし、それぞれの島における停泊時間は考えなくてもよいものとする。

- (1) 島を結ぶ定期船〔ア〕,〔イ〕を就航させた。

〔ア〕首都島Pを出発し、

$P \Rightarrow A \Rightarrow P \Rightarrow B \Rightarrow P \Rightarrow C \Rightarrow P$

と巡って首都島Pに返ってくる定期船

〔イ〕首都島Pを出発し、

$P \Rightarrow Q \Rightarrow D \Rightarrow Q \Rightarrow P \Rightarrow A \Rightarrow P$

と巡って首都島Pに返ってくる定期船

この定期船〔ア〕,〔イ〕が同時に首都島Pを出発したとき、すべての航路を巡って首都島Pに戻る時間が同じであることが分かった。その理由を説明しなさい。

- (2) 次の【条件】を満たすような新首都島Rを人工的に作る計画が立ち上がった。

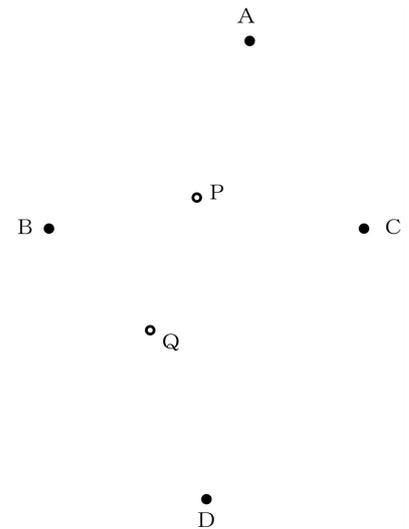
【条件】

新首都島Rの位置は、

$R \Rightarrow A \Rightarrow R \Rightarrow B \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow R$

と巡る定期船〔ウ〕が、最も短い時間で一巡できるような位置とする。

図



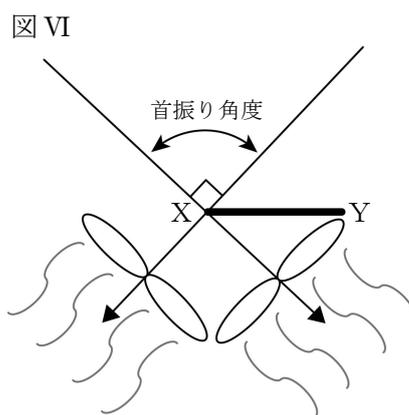
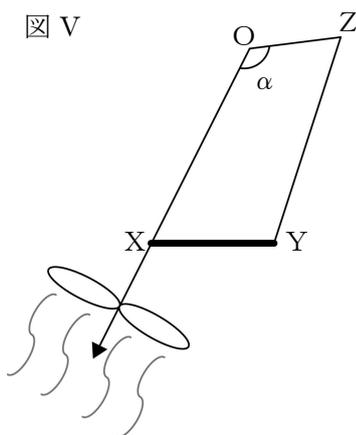
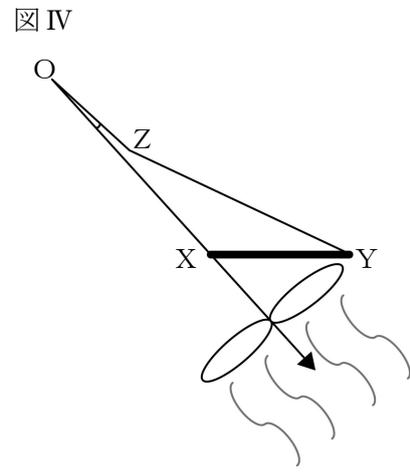
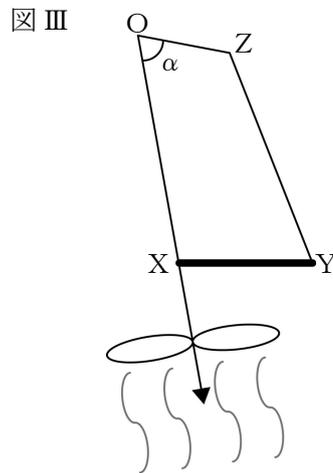
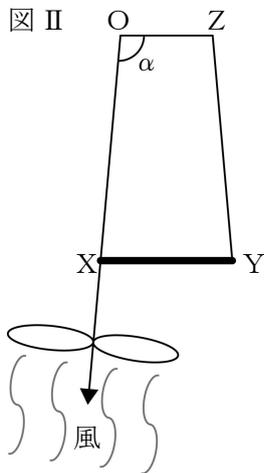
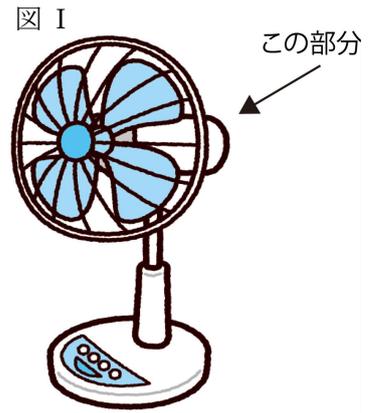
この【条件】を満たすような新首都島Rの位置を、コンパスと定規を用いて作図し、なぜその位置が【条件】を満たすのか説明しなさい。

ただし、作図は解答用紙の決められた図に示し、作図に用いた線は消さないこと。

4 扇風機の首振りを起こすための仕組みについて、図 I で矢印が指す箇所から一部分を取り出し、上方から見てモデル化した機構 L を図 II に示した。機構 L は同一の平面上にあり、曲がることのない 4 本の棒と、それらの結合部（関節と呼ぶ）O, X, Y, Z から成る。

いま、棒の長さが、 $OX = \sqrt{3}$, $XY = 1$, $YZ = \sqrt{3}$, $OZ < 1$ であり、4 本の棒のうち、棒 XY だけが完全に固定されていて動かないものとする。棒どうしが離れたり交差したりしない範囲で、各関節で棒どうしがなす角度を変えることができ、機構 L は図 II のほか、例えば、図 III, 図 IV, 図 V のような形状をとることができる。関節 X から見て、関節 O とちょうど反対方向に羽がついており、関節 O から関節 X の方向に風が吹く。機構 L が様々な形状を取ることで羽の向きが変わり、これにより「首振り」が実現できると考える。

関節 O において機構 L の内側にできる $\angle XOZ$ の大きさを α とする。 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ の範囲で機構 L が動くとき、機構 L がとりうる最大の「首振り角度」が、図 VI のようにちょうど 90° となるような棒 OZ の長さを求めなさい。



5 自然数 1, 2, 3, ……が 1 枚に 1 つずつ順に書かれた正方形のカードが無数にある。図 I のように、1 の数字が書かれたカードから小さい順に、回転させながらカードを並べていくことを考える。

例えば 5 の数字が書かれたカードは、1 の数字が書かれたカードから見て「左に 1, 上に 1」だけ進んだ場所にあり、20 の数字が書かれたカードは、1 の数字が書かれたカードから見て「左に 2, 下に 1」だけ進んだ場所にあることがわかる。次の(1)~(3)の間に答えなさい。

(1) 100 の数字が書かれたカードは、1 の数字が書かれたカードから見てどの場所にあるか答えなさい。

(2) 1 から見て、「右に 726, 上に 2023」だけ進んだ場所にあるカードに書かれた数字を求めなさい。

ただし、答えを導く過程についても説明すること。

(3) 図 II に示した 1029 の数字が書かれたカードに関して、その周囲にある 8 枚のカードに書かれた数字をすべて求め、図 II を完成させたものを、解答用紙に示しなさい。

ただし、答えを導く過程についても説明すること。

図 I

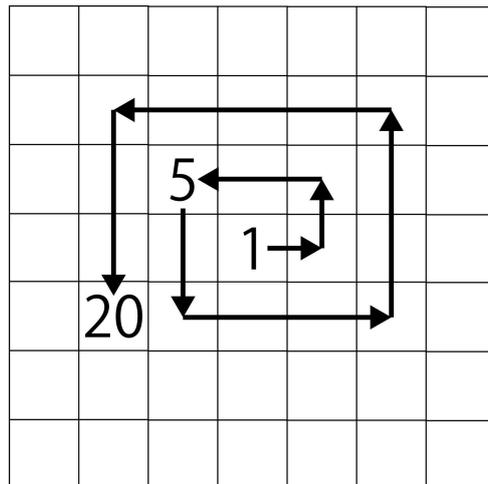
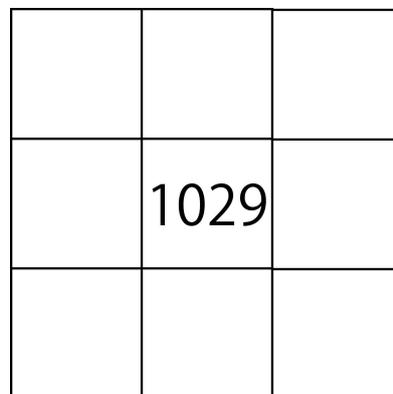


図 II



6 図 I のように部屋割りされた建物があり、あなたはこの建物の部屋 A にいる。部屋 A から鍵を開けて外に出るためには、次の【条件】を満たしながら、部屋と部屋の間にあるすべての鍵を集めなければならない。

【条件】

- (i) 部屋 A から出発し、すべての鍵を集めて、再び部屋 A に戻ってくる。
- (ii) 部屋と部屋の間を通る場合、鍵がある場所はその鍵を取りながら通ることができるが、一度鍵を取った場所は再び通ることができない。
- (iii) 同じ部屋は何回通ってもよい。
- (iv) 部屋と部屋の間壁があると通ることができないが、図 II のように壁に穴を開けることで、その場所を 1 度だけ通ることができる。

壁に穴を開ける回数をできる限りだけ少なくしてすべての鍵を集めたい。この建物から外に出ることのできる道順を、図 III にならって解答用紙の図に示しなさい。

ただし、答えを導く過程についても説明すること。

図 I

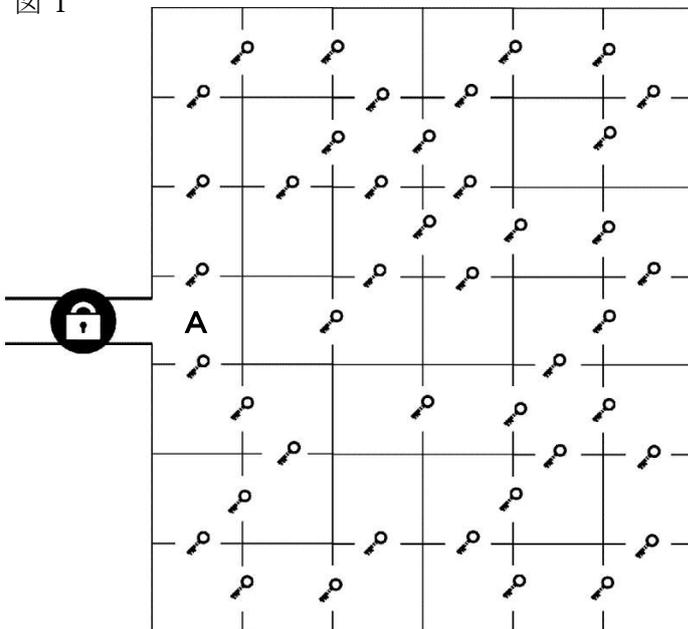
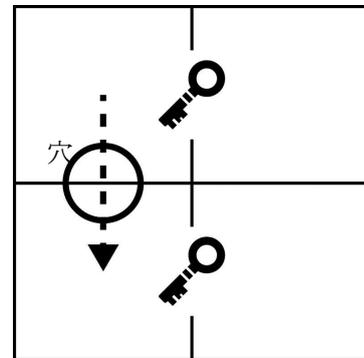
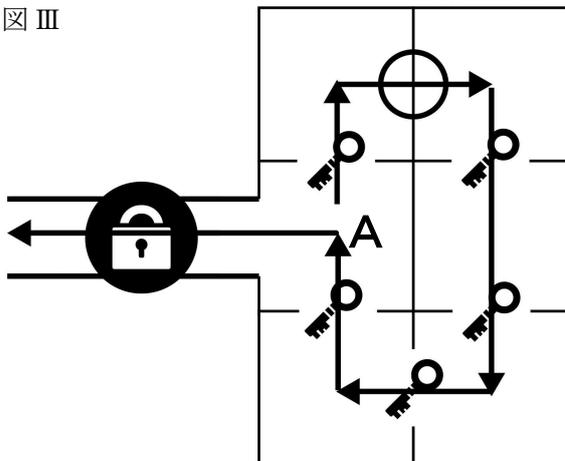


図 II



※ ○の壁に穴を開けると、一度だけ通ることができる。

図 III



※壁に穴を開けたところを○で示す。