令和５年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

令和５年度群馬県高校生数学コンテストは、７月２６日（水）に，参加を希望する生徒が在籍する学校（県内２４校）において実施し，参加者数は５７８名であった。令和３年度から，集合会場でのコンテストは実施せず，より多くの生徒が安心してコンテストに参加できるよう，各参加者が在籍する高校で実施する形式とした。

コンテストは平成１０年度から始められ，今年度で２６回目の開催となった。各受賞者数は，最優秀賞１名，優秀賞９名，始動人アイデア賞１３名，奨励賞１９名（昨年度は最優秀賞１名，優秀賞３名，始動人アイデア賞１５名，奨励賞１６名）の計４２名であった。

コンテストは，例年どおり数学的な発想を問う６題の問題から４題を選択し，３時間で解答する形式で行われ，解答の際には定規，コンパス，はさみ，電卓の使用を認めている。

群馬県では，教育イノベーションの一環として，ＳＴＥＡＭ教育の実践を推進しており，この数学コンテストもＳＴＥＡＭ教育推進に関する行事として実施している。コンテスト問題では，この観点を踏まえ，実社会との関連を意識した問題や，身近な事象について数理的に考察する問題を出題した。これらの問題の解決を通して，新しい社会を切り拓くための創造性の基礎を養うきっかけとなればと考えている。答案の中には，論理的に整理された素晴らしいものも見られた。また，正解に至らない答案の中にも，発想のユニークなものが数多く見られた。

本コンテストは，３時間集中して数学の問題を考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど，既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を提供しているものと考える。このことは，数学のみならず，今後様々な教科を学習したり教科横断の探究的な学習を進めたりしていく上でも良い経験になっていると思われる。今後も，本コンテストの特徴を維持しながら更に内容を発展させ，生徒が数学を楽しむ機会となるよう一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年（中等）	１年（４年）	２年（５年）	３年（６年）
参加生徒数	２６７	３０２	９

合　計　５７８名

※次のページ以降に令和５年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

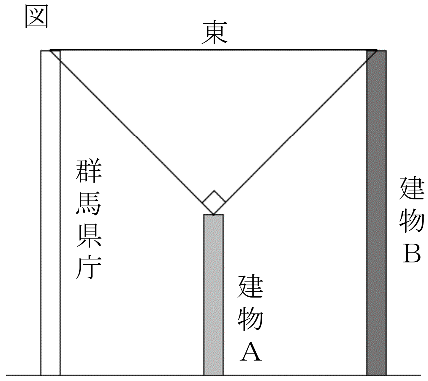
注　意　事　項

１　問題は，１ページから６ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
２　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
３　解答は，該当の問題番号が示された解答用紙に記入し，コンテスト終了後は，解答用紙を必ず４枚提出してください（残りの解答用紙は持ち帰ってください）。
４　解答用紙には，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていないものは，採点の対象外となることがあります。
５　解答には，途中の考え方などを簡潔・明瞭・的確に書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても賞を授与することがあります。
６　必要があれば，定規，コンパス，電卓を用いることができます。

Ⅱ　問題及び解答例

1　吉野くんは，群馬県庁，建物Ａ，建物Ｂの付近を散策していた。吉野くんが，建物Ａから西方向へ 200m 進んだ地点Ｏから建物Ａの方向を眺め，図のように，それぞれの建物の屋上の中央を頂上として３つの建物の頂上を結ぶと，その形が直角二等辺三角形に見えた。また，群馬県庁と建物Ｂの高さがちょうど同じに見え，建物Ａの高さが建物Ｂの高さのちょうど半分に見えることに気付いた。また，地点Ｏから南方向へ 100m 進んだ地点Ｓから３つの建物を眺めると，手前から建物Ｂ，建物Ａ，群馬県庁の順に建物が一直線上に並んでおり，群馬県庁と建物Ｂの頂上が重なって同じ高さに見えた。

図



建物Ｂの高さが 60m であることが分かっているとき，次の(1)，(2)の問に答えなさい。

ただし，地点Ｏ，地点Ｓや建物が建っている地点の標高を０ｍ，吉野くんの目線の高さも０ｍとし，吉野くんと各建物との間に障害物はないものとする。また，建物の位置を示す際には，地点Ｏから見て，次の（例）にしたがって示すこと。

（例）建物Ａの建っている地点A_0は，地点Ｏから見て，東方向 200m の地点にあるので，(200，0)と示す。また，ある建物Ｘの建っている地点X_0が，地点Ｏから見て，西方向 76m，北方向 139m の地点にあるとき，(−76，139)と示す。

(1)　建物Ｂは地点Ｏから見てどの位置にあるか，求めなさい。
　ただし，小数第一位を四捨五入して答えること。

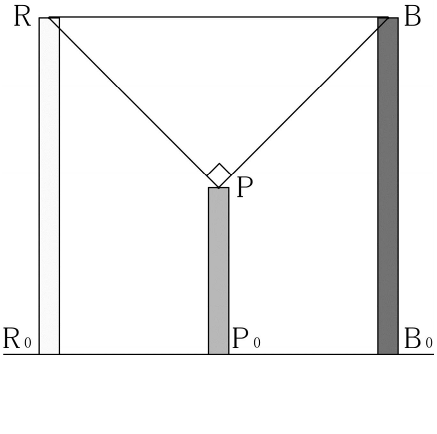
(2)　建物Ａおよび群馬県庁の高さと，群馬県庁は地点Ｏから見てどの位置にあるかをそれぞれ求めなさい。
　ただし，それぞれの解答は，小数第一位を四捨五入して答えること。

［解答例］

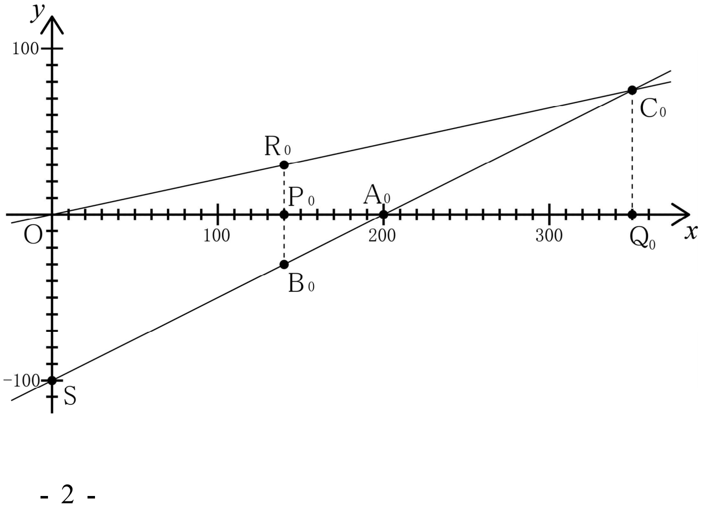
群馬県庁を建物Ｃとし，各建物の頂上部分をＡ，Ｂ，Ｃ，地上部分をA_0，B_0，C_0とする。地点Ｏを原点，東方向を x 軸正の向き，北方向を y 軸正の向きとして，座標平面上で考えることとする。B_0，C_0から x 軸に垂線を下ろし，垂線と x 軸との交点をそれぞれP_0，Q_0とする。

題意より，図Ⅰのように，点B_0を通り x 軸に垂直な平面上に直角三角形ＰＢＲを描くことができ，$B_0P_0 = P_0R_0 = 30$ であることがわかる。以上の状況を xy 平面上に示すと，図Ⅱのようになる。

図Ⅰ



図Ⅱ



(1)　$\triangle A_0OS \backsim \triangle A_0P_0B_0$ より，$A_0O : A_0P_0 = OS : P_0B_0$

ここで，$A_0O = 200$，$OS = 100$，$P_0B_0 = 30$ より，$A_0P_0 = 60$

したがって，$P_0(140,\ 0)$，$B_0(140,\ -30)$ である。

ゆえに，建物Ｂは $(140,\ -30)$ の位置にある。

(2)　$\triangle AOA_0$ は図Ⅲのような直角三角形である。

図Ⅲ

$\triangle AOA_0 \backsim \triangle POP_0$ より，$AA_0 : PP_0 = OA_0 : OP_0$

ここで，$PP_0 = 30$，$OA_0 = 200$，$OP_0 = 140$ より，$AA_0 = 42.857\cdots$

ゆえに，建物Ａの高さは 43m である。

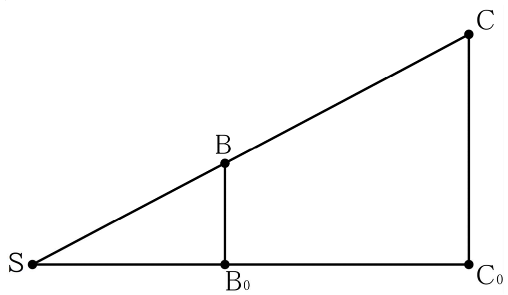
図Ⅱより，$R_0(140,\ 30)$ であるから，直線 OC_0 の方程式は $y = \frac{30}{140}x$ であり

直線 SC_0 の方程式は $y = \frac{100}{200}x - 100$ である。

C_0 はこの 2 直線の交点であるから，$C_0(350,\ 75)$ である。

また，$\triangle CSC_0$ は図Ⅳのような直角三角形である。

図Ⅳ



$\triangle BSB_0 \backsim \triangle CSC_0$ より，$SB_0 : SC_0 = BB_0 : CC_0$

ここで，$SB_0 : SC_0 = OP_0 : OQ_0 = 140 : 350$，$BB_0 = 60$ より，$CC_0 = 150$

ゆえに，建物Ｃすなわち群馬県庁の高さは 150m である。

以上より，建物Ａの高さは 43m であり，

群馬県庁の位置は $(350,\ 75)$，高さは 150m である。

［出題の意図］

見る角度によって本数や見え方が変わる，いわゆる「おばけ煙突」などをヒントに，この問題を出題しました。方位角（水平方向になす角度），仰俯角（鉛直方向になす角度，今回の問題では仰角）の関係から，相似の性質を利用して３つの建物の位置や高さについて考察する問題です。「見える」高さは相対的な関係であるという点に注意が必要な問題でした。

問題に提示された図はどの平面上にあると考えればよいのか，そこに気が付くと手かがりを得ることができます。今回の問題において高さが与えられているのは建物Ｂであ

るため，建物Ｂを含む平面で考察すると建物Ａや群馬県庁についての位置や高さを求めることができます。また，実際に「建物が存在する位置」と，ある平面上に「建物が見える位置」が異なる位置であるため，記号の使い方にも注意が必要です。自分の思考を整理したり，答案として説明したりする際にどのように記号を用いるのが適当かを考えながら，記号の設定をするとよいでしょう。

［講評］

578名中246名が解答し，1名が正解しました。問題文において，建物の位置を座標を用いて表しているので，それにしたがって図（座標平面）で示すとそれ以降も考えやすかったと思います。仰角をもとに相似の関係を利用しながら解答しようとする答案が多くみられ，数学Ｉ「図形と計量」等で得られた考え方を試みているのはとても良かったと思います。正解者以外には３６名が建物Ｂを含む平面において問題文の図を正しく考察することができており，建物Ｂの位置を求めることができた解答は多くありました。一方で，建物Ａを基準にしたときに建物Ｂと群馬県庁が「等距離にみえる」ことから「等距離に位置する」と考えてしまっているものが多く，方位角の関係を上手く捉えられていない答案がほとんどでした。問題文から得られる図をしっかりと考察することや，文字を適切に利用することが大切であると，改めて感じました。

2　クラスでの席替えなどに用いられる「あみだくじ」について，次の(1)，(2)の問に答えなさい。

(1)　図Ⅰのような縦線６本のあみだくじについて考える。隣り合う縦線どうしを結ぶ水平な横線を何本か引き，①～⑥のすべてが同じ番号に行きつくようなあみだくじを完成させなさい。

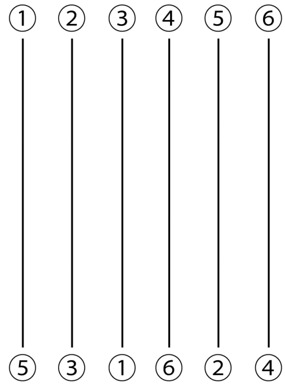
なお，横線は何本引いてもよいものとするが，できるだけ本数が少ない解答を高く評価することとする。

(2)　(1)のような通常のあみだくじのルールに加えて，新たなルールである「ワープ」の機能を考える。

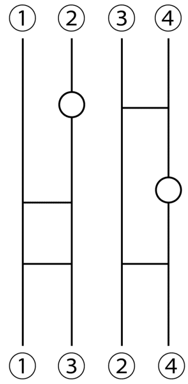
図Ⅱのように，○を２つ，あみだくじの縦線上に，横線と重ならないように配置する。○は「ワープ」を表し，横線を通ることなく，○から○へと相互に移動することができる。図Ⅱは①～④のすべてが同じ番号へ行きつくようにした例である。

図Ⅰの縦線６本のあみだくじについて，①～⑥のすべてが同じ番号に行きつくよう，あみだくじに○２つと水平な横線を何本か引くとき，横線は最低何本必要であるか，その理由を含めて答えなさい。

図Ⅰ

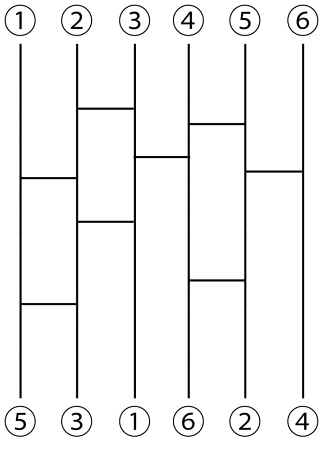


図Ⅱ



［解答例］

(1)　［例］



(2)　まず，あみだくじの横線は，直前の縦線にある２つの番号を入れ替える操作を表しており，ワープとは，任意の２つの数字を入れ替える操作であることに注意する。

次に，あみだくじの上の番号①②③④⑤⑥と下の番号⑤③①⑥②④のうち，番号の大小が入れ替わっている２数の組は，(①，③)，(①，⑤)，(②，③)，(②，⑤)，(②，⑥)，(③，⑤)，(④，⑤)，(④，⑥)の８組であることに着目する。

これらのことから，必要な横線の本数の最小値を求めるためには，上記の８組それぞれに対し，ワープを用いて数字を入れ替えた後，上下の番号の大小が入れ替わっている２数の組がそれぞれ何組あるかを考えれば十分である。

(i) ワープを(①，③)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を⑤①③⑥②④としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，⑤)，(②，③)，(②，⑤)，(②，⑥)，(③，⑤)，(④，⑤)，(④，⑥)の7組であり，横線は少なくとも7本は必要である。

(ii) ワープを(①，⑤)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を①③⑤⑥②④としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(②，③)，(②，⑤)，(②，⑥)，(④，⑤)，(④，⑥)の5組であり，横線は少なくとも5本は必要である。

(iii) ワープを(②，③)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を⑤②①⑥③④としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，②)，(①，⑤)，(②，⑤)，(③，⑤)，(③，⑥)，(④，⑤)，(④，⑥)の7組であり，横線は少なくとも7本は必要である。

(iv) ワープを(②，⑤)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を②③①⑥⑤④としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，②)，(①，③)，(④，⑤)，(④，⑥)，(⑤，⑥)の5組であり，横線は少なくとも5本は必要である。

(v) ワープを(②，⑥)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を⑤③①②⑥④としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，③)，(①，⑤)，(②，③)，(②，⑤)，(③，⑤)，(④，⑤)，(④，⑥)の7組であり，横線は少なくとも7本は必要である。

(vi) ワープを(③，⑤)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を③⑤①⑥②④としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，③)，(①，⑤)，(②，③)，(②，⑤)，(②，⑥)，(④，⑤)，(④，⑥)の7組であり，横線は少なくとも7本は必要である。

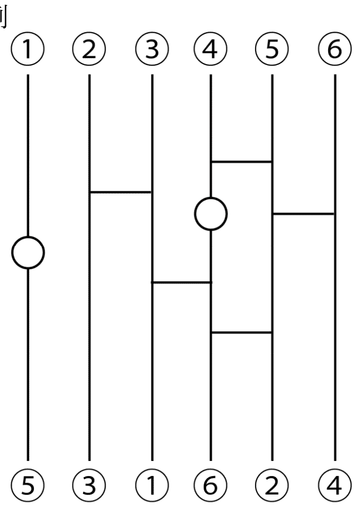
(vii) ワープを(④，⑤)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を④③①⑥②⑤としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，③)，(①，④)，(②，③)，(②，④)，(②，⑥)，(③，④)，(⑤，⑥)の7組であり，横線は少なくとも7本は必要である。

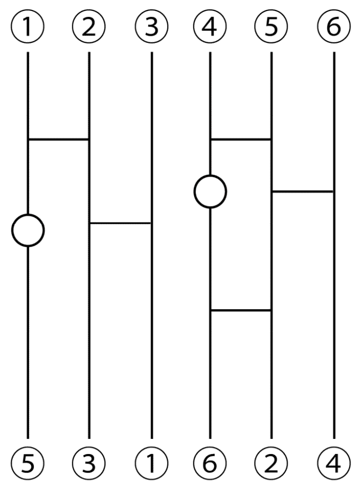
(viii) ワープを(④，⑥)に用いるとき

　上の番号①②③④⑤⑥に対し，下の番号を⑤③①④②⑥としてよく，上下の番号の大小が入れ替わっているのは(①，③)，(①，⑤)，(②，③)，(②，④)，(②，⑤)，(③，⑤)，(④，⑤)の7組であり，横線は少なくとも7本は必要である。

(ii)の例



(iv)の例



以上の議論により，横線の本数が最小となるのは，ワープを(①，⑤)または(②，⑤)に用いたときであり，その本数は5本である。

［出題の意図］

クラスの席替えをするときや何か物事を決めるとき，公平を期すために，あみだくじを用いることがあります。あみだくじは，うまく横線を引くことで，行き先を自由に決めることができます。今回は，そこに「ワープ」という新たな機能を加えることで，どんな変化が起こるのかを体感してもらいました。このような問題を通して，数学的な思考力や論証力を磨いてほしいと考え，この問題を出題しました。

［講評］

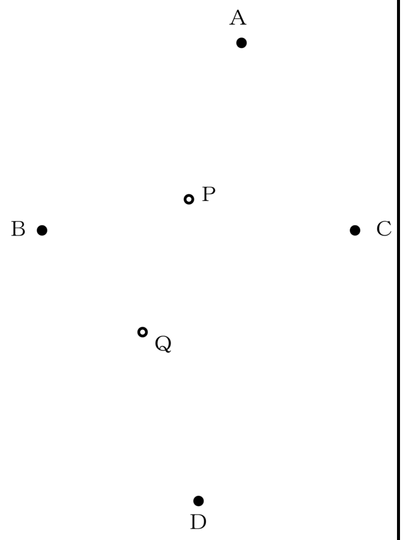
578名中546名が選択し，16名が正解しました。(2)の理由については，あみだくじやワープのルールに基づいて，論理の飛躍や矛盾がなく説明されている解答のみを正解としました。

(1)では，通常のあみだくじと同様の設定であるため，考えやすい問題であったと思います。今回の設定では，くじの上と下での左右の位置関係の異なるものが8組あることから，少なくとも8回は数字の入れ替え，すなわち，横線が必要になります。このことに触れている素晴らしい解答もあり，感心しました。

(2)では，各番号の移動量に着目し，ワープをどの番号の組に用いるとよいかを考えている優れた解答が多数ありました。解答例にも示したとおり，ワープを(①，⑤)または(②，⑤)に用いたときに限り，横線の本数が最小となります。それらの番号が入れ替わるような状態であればどこにワープを置いても構いません。「あらゆる状況に対して５本が最小であることを，論理的に説明できているか」に焦点を当て，評価しました。

3　ある島国には，図のような位置にＡ島～Ｄ島がある。
この島国にはこの４島の他に，３島Ａ，Ｂ，Ｃを結んだ△ＡＢＣの内側に首都島Ｐがあり，３島Ｂ，Ｃ，Ｄを結んだ△ＢＣＤの内側に人工島Ｑがある。
島の間の距離を測ると，ＢＣ，ＣＤ，ＤＢ間は距離が等しく，ＢＰ，ＰＱ，ＱＢ間も距離が等しいことが分かっている。次の(1)，(2)の問に答えなさい。
ただし，問題で扱うすべての船の速度は常に一定で，船は島の間を真っ直ぐ進むものとする。また，島は点として考えてよいものとし，それぞれの島における停泊時間は考えなくてもよいものとする。

図



(1)　島を結ぶ定期船〔ア〕,〔イ〕を就航させた。

〔ア〕首都島Ｐを出発し，

Ｐ⇒Ａ⇒Ｐ⇒Ｂ⇒Ｐ⇒Ｃ⇒Ｐ

と巡って首都島Ｐに返ってくる定期船

〔イ〕首都島Ｐを出発し，

Ｐ⇒Ｑ⇒Ｄ⇒Ｑ⇒Ｐ⇒Ａ⇒Ｐ

と巡って首都島Ｐに返ってくる定期船

この定期船〔ア〕,〔イ〕が同時に首都島Ｐを出発したとき，すべての航路を通って首都島Ｐに戻る時間が同じであることが分かった。その理由を説明しなさい。

(2)　次の【条件】を満たすような新首都島Ｒを人工的に作る計画が立ち上がった。

【条件】

新首都島Ｒの位置は，

Ｒ⇒Ａ⇒Ｒ⇒Ｂ⇒Ｒ⇒Ｃ⇒Ｒ

と巡る定期船〔ウ〕が，最も短い時間で一巡できるような位置とする。

この【条件】を満たすような新首都島Ｒの位置を，コンパスと定規を用いて作図し，なぜその位置が【条件】を満たすのか説明しなさい。
ただし，作図は解答用紙の決められた図に示し，作図に用いた線は消さないこと。

［解答例］

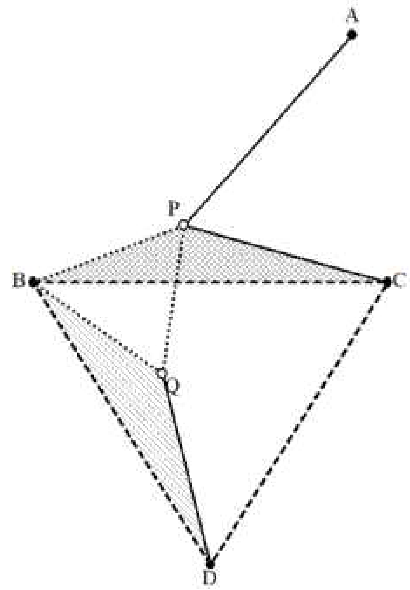
(1)　定期船の速さは一定であり，寄港時間が同じであるため，それぞれの航路の長さが同じになれば帰着時間も同じである。
したがって

$$2PA + 2PB + 2PC = 2(AP + PQ + QD)$$

すなわち

$$PA + PB + PC = AP + PQ + QD$$

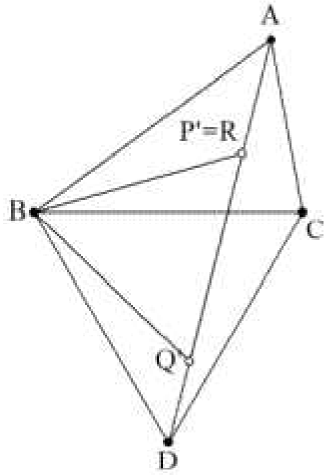
を示せばよい。



共通な辺だから　PA ＝ AP
△ PBQ が正三角形であるから　PB ＝ PQ
したがって，PC ＝ QD を示せばよい。
△ PBC と△ QBD において，
△ BCD が正三角形だから，BC ＝ BD　……①
△ BPQ が正三角形だから，BP ＝ BQ　……②

$\angle \mathrm{PBQ} = \angle \mathrm{CBD} = 60^\circ$　だから
$\angle \mathrm{PBC} = 60^\circ - \angle \mathrm{CBQ}$　かつ　$\angle \mathrm{QBD} = 60^\circ - \angle \mathrm{CBQ}$
　したがって，$\angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{QBD}$　……③
①，②，③より２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　$\triangle \mathrm{PBC} \equiv \triangle \mathrm{QBD}$
対応する辺が等しいから　$\mathrm{PC}=\mathrm{QD}$
　以上より，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} = \mathrm{AP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QD}$　が示された。
　したがって，定期船〔ア〕,〔イ〕が同時に首都島Pを出発したとき，すべての航路を通って首都島Pに戻る時間は同じである。

(2)　$2\mathrm{RA}+2\mathrm{RB}+2\mathrm{RC}$ が最小となるような位置に新首都島 R を作ればよい。

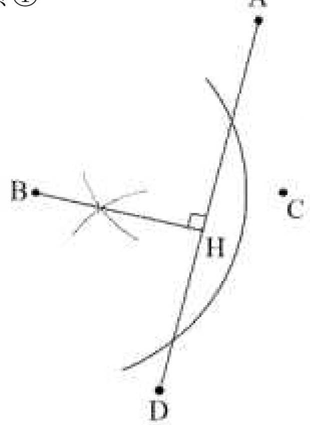


(1)より，$\triangle \mathrm{ABC}$ の内側の任意の点 P' とその点 P' に対して $\triangle \mathrm{BP}'\mathrm{Q}'$ が正三角形となるような $\triangle \mathrm{BCD}$ 内にある点 Q' をと取ると，$\mathrm{P}'\mathrm{A}+\mathrm{P}'\mathrm{B}+\mathrm{P}'\mathrm{C}=\mathrm{AP}'+\mathrm{P}'\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}'\mathrm{D}$
したがって，和　$\mathrm{P}'\mathrm{A}+\mathrm{P}'\mathrm{B}+\mathrm{P}'\mathrm{C}$ が最小となるとき，
和　$\mathrm{AP}'+\mathrm{P}'\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}'\mathrm{D}$ も最小となる。
ここで，「直線　AD 上に４点 A，P'，Q'，D がある」ように
点 P' をとれば，$\mathrm{AP}'+\mathrm{P}'\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}'\mathrm{D}=\mathrm{AD}$ となり，
長さが最小となる。
このときの点 P' が求める点 R となるから，
$\triangle \mathrm{BRQ}'$ が正三角形となるような２点 R，Q' を
線分 AD 上に取ればよい。
（線分 AD の一部を使って，点 B を頂点とする正三角形を作図する）

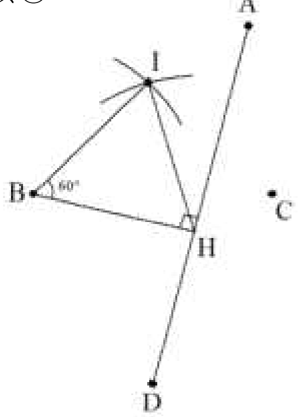
そのような点 R は，次のような手順で作図する。
　①点　B から線分　AD に対し垂線　BH を降ろす。
　②$\triangle \mathrm{BHI}$ が正三角形となるような点　I を，直線　BH から見て点　A 側にとる。このとき　$\angle \mathrm{HBI}=60^\circ$　である。
　③$\angle \mathrm{HBI}$ の二等分線を引き，線分 AD との交点を R とする。このとき $\angle \mathrm{HBR}=30^\circ$ である。

$\triangle \mathrm{HBR}$ は $\angle \mathrm{RHB} = 90^\circ$ の直角三角形だから，$\angle \mathrm{BRH}=60^\circ$ となる。
直線 BH から見て点 D 側に同じことをすれば点 Q' も求められ，
同様の理由から $\angle \mathrm{BQ}'\mathrm{H}=60^\circ$
よって，$\triangle \mathrm{BRQ}'$ は正三角形となり，作図された点 R は条件を満たす。

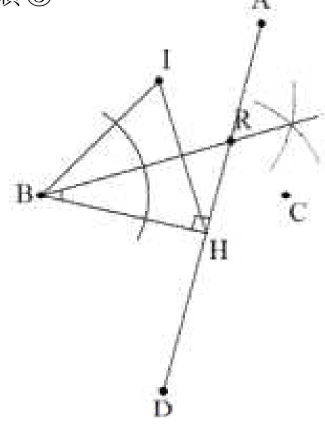
手順①



手順②



手順③



［出題の意図］

三角形の特徴的な点についての問題です。任意の三角形からある特徴をもとに一意に定められる点のことを「心」と呼ぶそうです。高校数学では，三角形の三心（五心）と呼ばれる点を学習しますが，2023 年 8 月 28 日現在，アメリカのエヴァンスビル大学のサイトには 57254 個もの「心」が登録されているそうです。

（https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html）

今回の問題で題材として扱った点は，「フェルマー点」と呼ばれる，各頂点からの距離の和が最短となる点でした。また距離の和が最短となるような経路の問題を「最短シュタイナー問題」といい，実生活においても非常によく活用されています。今回出題したフェルマー点も，例えば電柱をどこに立てれば電線が短くて済むかといった問題や，道路をどのように作れば建設費が安く上がるかといった問題などに活用されています。

今回の問題では，条件を満たす点を高校で学習する「三心」という先入観にとらわれることなく，自分で考え導き出すことができるかという点がポイントでした。特に「距離の和が最短となる」という問題を，(1)の結論を用いて「4 点が一直線上に並ぶ」という点に落とし込めるかが一番の焦点です。最小値問題というテーマは大学入試でも多く出題されていますが，先入観にとらわれることなく，幾何学的な性質を用いて柔軟に考えてもらいたく，この問題を出題しました。

［講評］

578 人中 432 名が選択し，9 名が正解しました。また，(2)の作図において正解者のうち 8 名が直線 AD 上に正三角形 BRQ′ を作るものでした。なお，フェルマー点の作図方法を説明するときには，別の方法で示すことが一般的です。フェルマー点の作図方法については，別途，調べてみてください。

さらに直線 AD 上に正三角形を作図する方法についても，解答で示した方法以外に，点 H を中心とした半径 BH の円を作図して円周角の定理を利用する，といった解答もあり，非常に美しいものでした。

残念ながら不正解だった解答のうち，(2)の点を外心にした解答が 123 名，内心とした解答が 28 名，重心とした解答が 17 名，垂心とした解答が 5 名でした。出題の意図にも書きましたが，既習事項が先入観となり，選択者の 4 割が自由な思考を阻害されてしまったようです。特に求める点は外心であると判断した解答が多く，「各頂点からの距離が等しいならば，各頂点からの距離の和が最小となるだろう」という憶測を論拠としているものが数多く見られました。なんとなくそうなりそうだ，という域を脱していないので，確証をもって正しいと断言できる解答を目指して臨むとよいでしょう。

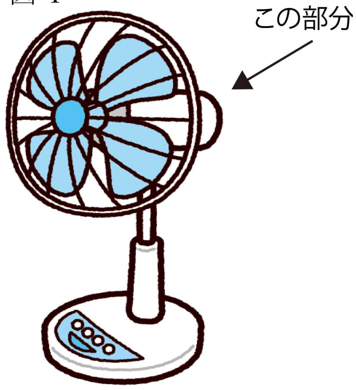
最後におまけの問題を出題して講評を終えます。今回は三角形の各頂点からの距離の和が最小となる点を求めるという問題を出題しましたが，「各頂点」を「各辺」に変えて「△ ABC において，各辺 AB，BC，CA からの距離の和が最小となるような点 P はどこにあるか，求めなさい。」という問題ならば，答えはどうなるでしょうか。ぜひ，考えてみてください。

4　扇風機の首振りを起こすための仕組みについて，図Ⅰで矢印が指す箇所から一部分を取り出し，上方から見てモデル化した機構Ｌを図Ⅱに示した。機構Ｌは同一の平面上にあり，曲がることのない４本の棒と，それらの結合部（関節と呼ぶ）Ｏ，Ｘ，Ｙ，Ｚから成る。

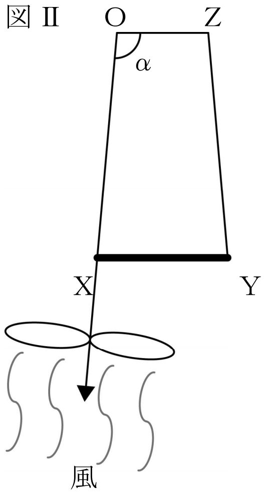
いま，棒の長さが，$OX=\sqrt{3}$，$XY=1$，$YZ=\sqrt{3}$，$OZ<1$であり，４本の棒のうち，棒ＸＹだけが完全に固定されていて動かないものとする。棒どうしが離れたり交差したりしない範囲で，各関節で棒どうしがなす角度を変えることができ，機構Ｌは図Ⅱのほか，例えば，図Ⅲ，図Ⅳ，図Ⅴのような形状をとることができる。関節Ｘから見て，関節Ｏとちょうど反対方向に羽がついており，関節Ｏから関節Ｘの方向に風が吹く。機構Ｌが様々な形状を取ることで羽の向きが変わり，これにより「首振り」が実現できると考える。

関節Ｏにおいて機構Ｌの内側にできる∠ＸＯＺの大きさをαとする。$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$の範囲で機構Ｌが動くとき，機構Ｌがとりうる最大の「首振り角度」が，図Ⅵのようにちょうど90°となるような棒ＯＺの長さを求めなさい。

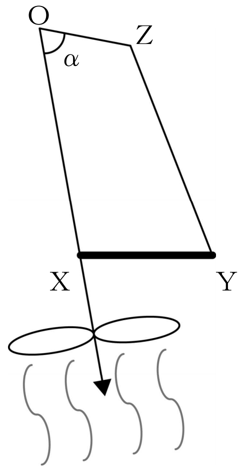
図Ⅰ



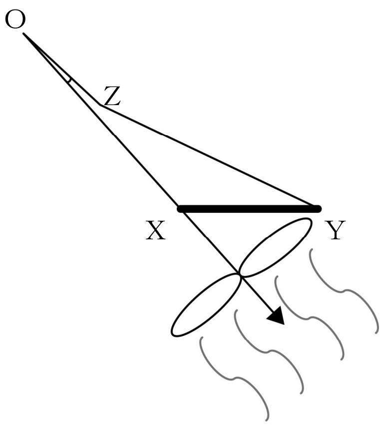
図Ⅱ



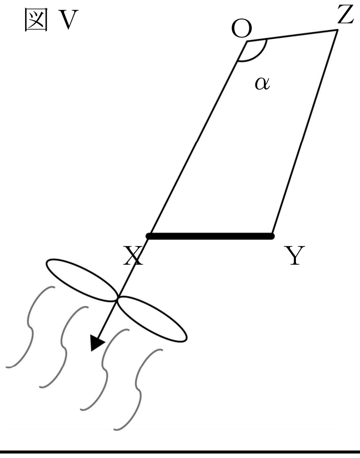
図Ⅲ



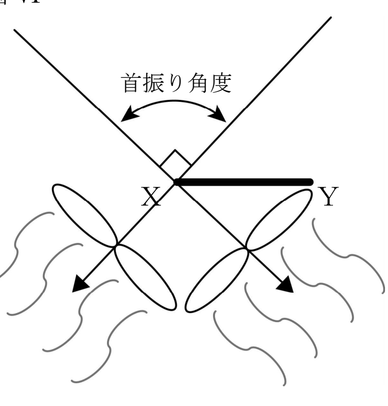
図Ⅳ



図Ⅴ



図Ⅵ



[解答例]

関節Ｏ，Ｚ，Ｙがこの順に一直線上に並び，機構Ｌが△ＯＸＹをなすときの関節Ｏ，Ｚの位置をそれぞれO_1，Z_1として，$\angle XO_1Z_1 = t°$とする。

また，関節Ｚ，Ｏ，Ｘがこの順に一直線上に並び，機構Ｌが△ＸＹＺをなすときの関節Ｏ，Ｚの位置をそれぞれO_2，Z_2とする。

一般に，△ＡＢＣと△ＤＥＦにおいて，ＡＢ＝ＤＥ，ＡＣ＝ＤＦのとき

∠Ａ＜∠Ｄ　ならば　ＢＣ＜ＥＦ　　……（＊）が成り立つ。

ここで，$0° \leqq \alpha < t°$のときに機構Ｌがつくるある形状において，∠ＯＸＹが$\angle O_1XY$より大きな角度をとると仮定する。このとき，（＊）により，

（関節Ｏと関節Ｙの距離）＞（O_1とＹの距離）$= OZ + \sqrt{3}$

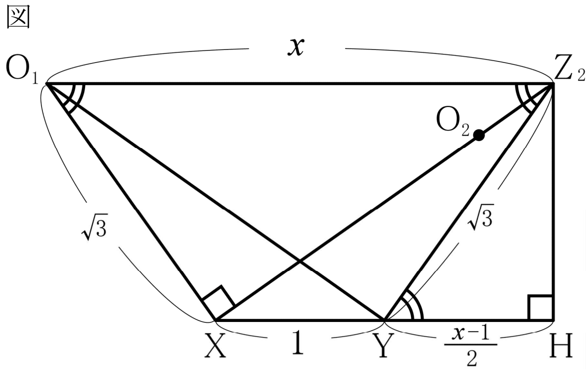
であるが，一方，関節Ｏと関節Ｙは棒ＹＺでつながっているため，

（関節Ｏと関節Ｙの距離）$\leqq OZ + \sqrt{3}$

となり，これは矛盾である。よって，$0° \leqq \alpha < t°$のときに∠ＯＸＹが$\angle O_1ZY$より大きな角度をとることはない。

以上のことに注意すると，図に示した$\angle O_1XZ_2$の大きさが首振り角度となる。以下では，この図について考える。

図



$\angle O_1XZ_2 = 90°$　となるとき

Z_2から直線ＸＹに下ろした垂線の足をＨとすると，

$\angle O_1XZ_2 = \angle YHZ_2$　　……①

また，機構Ｌの対称性により

$\angle Z_2O_1X = \angle O_1Z_2Y$.

$O_1Z_2 /\!/ XY$　より　$\angle O_1Z_2Y = \angle Z_2YH$

よって　$\angle Z_2O_1X = \angle Z_2YH$　　……②

①，②より２組の角がそれぞれ等しいので$\triangle Z_2O_1X \backsim \triangle Z_2YH$

ゆえに，$Z_2O_1 : Z_2Y = O_1X : YH$

ここで，$Z_2O_1 = x$ とおくと，$YH = \dfrac{x-1}{2}$ と表せて

$x : \sqrt{3} = \sqrt{3} : \dfrac{x-1}{2}$　すなわち　$\dfrac{x(x-1)}{2} = 3$

これを解くと，$x > 0$ より　$x = 3$

ゆえに，$XZ_2 = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$　であり

求める棒ＯＺの長さは，$XZ_2 - XO_2 = \sqrt{6} - \sqrt{3}$　（これはＯＺ＜１を満たす）

［出題の意図］

扇風機の首振りを実現する「リンク機構」を題材として，シンプルにモデル化して出題しました。中学校や高校で身につけた平面図形についての知識や技能を，適切に利用して考察できるかを問いました。

実際の扇風機では，羽を回転させるための力を利用し，ある部品によってその力が働く向きを変えることで，棒ＯＺに相当する部品が関節Ｏを中心に回転します。棒どうしは交差することが可能で，棒ＯＺが同じ向きに何周も回転を続けることで，首振りが持続します。羽を回転させるための動力を利用して，同時に首振りも実現する，優れた仕組みです。

今後も数学が工学分野で活かされ，様々な技術開発が進んでいくことが期待されます。皆さんもぜひ，その担い手を目指してください。

［講評］

578名中122名が選択しましたが，完全な正解者はいませんでした。

$\alpha = 0^\circ$ のときに∠ＯＸＹが最も大きくなると誤解している解答がかなりの割合を占めました。直感だけで決めつけずに，数学的に考察して正しい判断を下さなければなりません。機構Ｌが△ＯＸＹをなすときに∠ＯＸＹが最も大きくなり，△ＸＹＺをなすときに∠ＯＸＹが最も小さくなることについて厳密な証明を求めてはいませんが，この説明が的確にできている解答もありました。

首振り角度がちょうど90°となるような棒ＯＺの長さを求める際に，ＯＺ＝xとしてxの値を直接求めようとした結果，計算が困難になってしまった解答が数多くありました。四角形O_1XYZ_2が等脚台形であることに注目し，線分Z_2O_1の長さを求めようとすると考えやすくなります。このアイデアにより，棒ＯＺの長さをうまく求めている解答もありました。なお，解答にたどり着くには，解答例で示した以外にもいくつかの方法があります。例えば，「トレミーの定理」を用いた解法も考えられますので，考えてみてください。

5　自然数 1，2，3，・・・・・・が 1 枚に 1 つずつ順に書かれた正方形のカードが無数にある。図Ⅰのように，1 の数字が書かれたカードから小さい順に，回転させながらカードを並べていくことを考える。

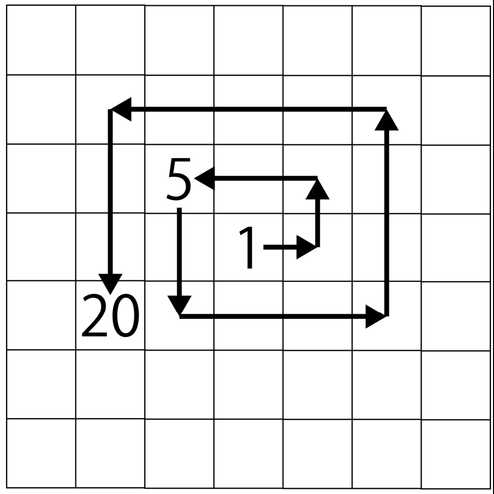
　例えば 5 の数字が書かれたカードは，1 の数字が書かれたカードから見て「左に 1，上に 1」だけ進んだ場所にあり，20 の数字が書かれたカードは，1 の数字が書かれたカードから見て「左に 2，下に 1」だけ進んだ場所にあることがわかる。次の(1)～(3)の問に答えなさい。

(1)　100 の数字が書かれたカードは，1 の数字が書かれたカードから見てどの場所にあるか答えなさい。

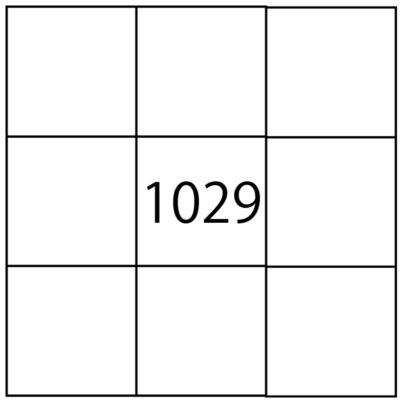
(2)　1 から見て，「右に 726，上に 2023」だけ進んだ場所にあるカードに書かれた数字を求めなさい。
　ただし，答えを導く過程についても説明すること。

(3)　図Ⅱに示した 1029 の数字が書かれたカードに関して，その周囲にある 8 枚のカードに書かれた数字をすべて求め，図Ⅱを完成させたものを，解答用紙に示しなさい。
　ただし，答えを導く過程についても説明すること。

図Ⅰ



図Ⅱ



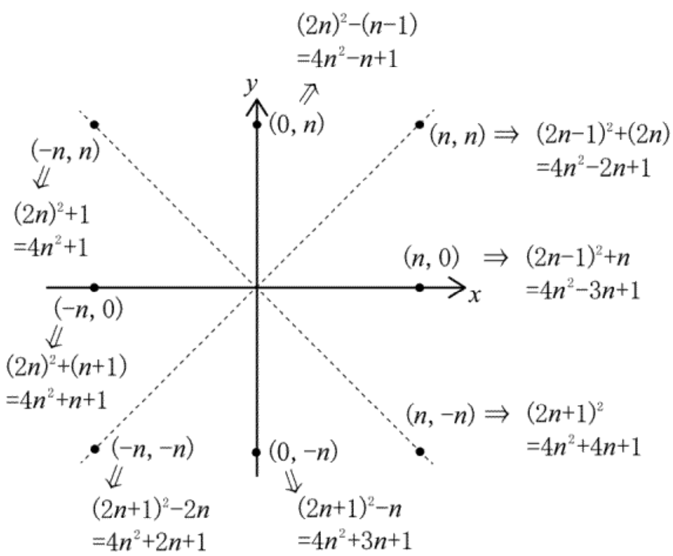
［解答例］

　n を自然数とすると，1 の数字が書かれたカードから見て，上方向と右方向を＋，下方向と左方向を－として，1 のカードがある位置を原点とする xy 平面のように考え，例えば「右に n，下に n」の位置を（n，$-n$）のように表すこととする。このとき，

　（n，$-n$）には，奇数の平方数 $(2n+1)^2$ が書かれたカードがあり，

　（$-(n-1)$，n）上には，偶数の平方数 $(2n)^2$ が書かれたカードがあることが分かる。

　2 つの平方数に着目し，x 軸，y 軸，直線 $y=\pm x$ 上にあるカードの数字を n で表すと，右の図のとおりとなる。



また，$(0,\ 0)$を中心として，内側から n 周目にあるカードについて考えるとき，
$|x| > |y|$ を満たす $(x,\ y)$ にあるカードについては，$|x|$ 周目にある奇数の平方数である $(2|x|-1)^2$ が書かれたカードを基準として数字を捉え，
$|x| < |y|$ を満たす $(x,\ y)$ にあるカードについては，$|y|$ 周目にある偶数の平方数である $(2|y|)^2$ が書かれたカードを基準として数字を捉えることにする。

(1) $(-(n-1),\ n)$上には，偶数の平方数 $(2n)^2$ が書かれたカードがあることから，
$(2n)^2 = 100$ より，$n = 5$
よって，$(-(5-1),\ 5) = (-4,\ 5)$である。
したがって，100 の数字が書かれたカードは，左に 4，上に 5 の位置にある。

(2) $(726,\ 2023)$にあるカードについては，座標 $(x,\ y)$ が $|x| < |y|$ を満たすので，$|y|$ 周目にある偶数の平方数である $(2|y|)^2$ が書かれたカードを基準として数字を捉えることにする。つまり，2023 周目の偶数の平方数 $(2\cdot2023)^2 = 16370116$ の数字が書かれたカードを基準として考える。この 16370116 の数字が書かれたカードは，$(-(2023-1),\ 2023) = (-2022,\ 2023)$の位置にある。
したがって，$(726,\ 2023)$にあるカードには，
$16370116 - 2022 - 726 = 16367368$
より，16367368 が書かれている。

(3) $32^2 = 1024$，$33^2 = 1089$ であるので，$2\cdot16 + 1 = 33$ より，16 周目に 1029 の数字が書かれたカードがあることが分かる。よって，これまでの考え方から，1029 のカードが置かれているのは，$(-16,\ 12)$の位置である。
さらに，1029 が書かれたカードの周囲のカードについて考える。
1029 のカードの右隣$(-16,\ 12)$の位置にあるカードに書かれた数字は，
$(2\cdot15)^2 + 1 + (15 - 12) = 904$
1029 のカードの左隣$(-17,\ 12)$の位置にあるカードに書かれた数字は，
$(2\cdot17)^2 + 1 + (17 - 12) = 1162$
したがって，下の図のような配置になる。

1161	1028	903
1162	1029	904
1163	1028	905

［出題の意図］
数字の書かれたカードを渦巻き状に配置したときのカードの位置について，数学的な規則性を導き出して考察する力を試す問題でした。見つけられる規則は 1 通りだけではないため，様々な視点を持つことでいろいろな手立てを考えることができます。こう

いった活動を通して「数学的な見方・考え方」のよさを実感してもらいたいと思い，出題しました。

(1)の段階で，実際に試行錯誤しながら規則性を考えておくことが重要です。よく観察すると，平方数の配置や数字の増え方，n周目にあるカードの枚数など，多くの気付きがあると思います。それらをもとにして考えると，(2)や(3)を正確に求めていくことができます。見つけた気付きをもとに，カードの位置と書かれた数字の関係を一般化できるかどうかが，より正確に答えを導くポイントだったのではないでしょうか。

［講評］

578名中508名が選択し，37名が正解しました。

(1)は，図Iを利用するなどして，実際に100個の数字を書き並べて考えた人も多かったと思います。解答の中には，数字を書き並べながら規則性を見つけることができていながら「1のカードから見た位置」を間違えて答えているものも見られました。

(2)では，見つけた規則（平方数を用いるものと階差数列を用いるものが多く見られました）を利用して解いている中で，大きい数字に挫折してしまっている解答も多くありました。また，一般化する際に，何をnと置くかが曖昧なためにミスをしてしまっている解答も多かったようです。

(3)は，1029の数字が書かれたカードが，1の数字が書かれたカードに対してどの方向にあるのかを把握できるかどうかがポイントでした。方向が把握できれば，あとは1029が何周目にあるかを導けば，解答できると思います。細かなミスも見られましたが，ここまで挑戦していた多くの解答が，正解にたどり着いていました。

6　図Ⅰのように部屋割りされた建物があり，あなたはこの建物の部屋Ａにいる。部屋Ａから鍵を開けて外に出るためには，次の【条件】を満たしながら，部屋と部屋の間にあるすべての鍵を集めなければならない。

【条件】

（ⅰ）　部屋Ａから出発し，すべての鍵を集めて，再び部屋Ａに戻ってくる。

（ⅱ）　部屋と部屋の間を通る場合，鍵がある場所はその鍵を取りながら通ることができるが，一度鍵を取った場所は再び通ることができない。

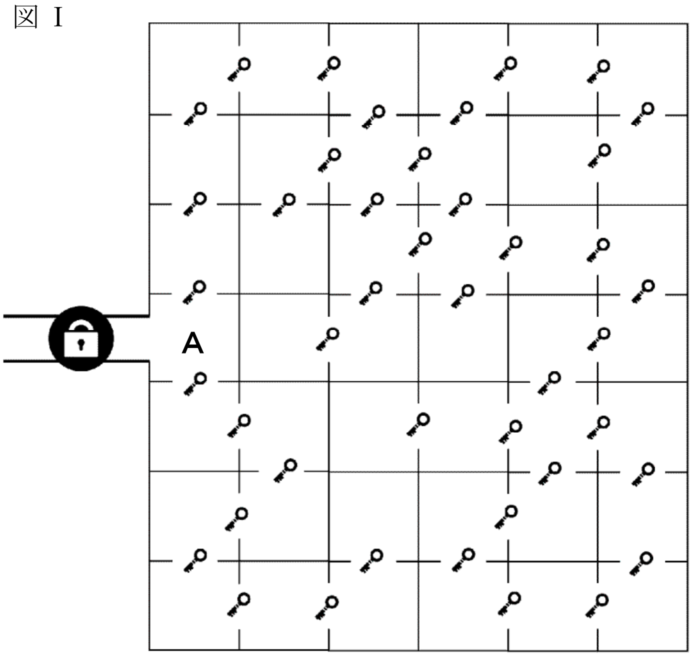
（ⅲ）　同じ部屋は何回通ってもよい。

（ⅳ）　部屋と部屋の間に壁があるところは通ることができないが，図Ⅱのように壁に穴を開けることで，その場所を１度だけ通ることができる。

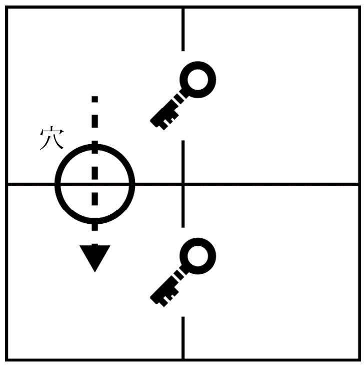
壁に穴を開ける回数をできる限りだけ少なくしてすべての鍵を集めたい。この建物から外に出ることのできる道順を，図Ⅲにならって解答用紙の図に示しなさい。

ただし，答えを導く過程についても説明すること。

図Ⅰ

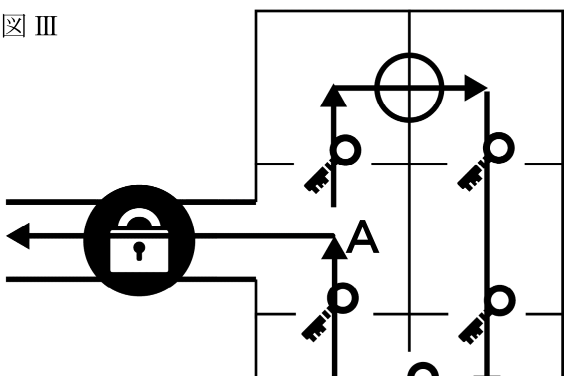


図Ⅱ



※　○の壁に穴を開けると，一度だけ通ることができる。

図Ⅲ

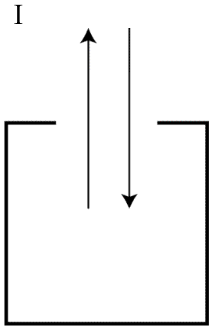


※壁に穴を開けたところを○で示す。

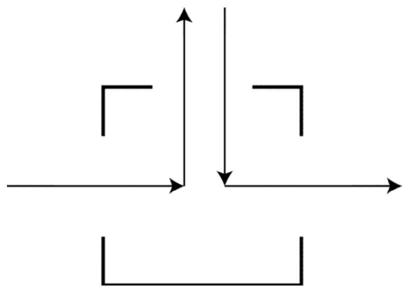
［解答例］

鍵がある場所を一度だけ通り，その場所を再び通らずにすべての鍵を集めるためには，すべての部屋の出入口の数は偶数個でなければならない。なぜなら，一つの部屋に入ったときには，必ず別の出口から出る必要があり，出入口が奇数の場合，図Ⅰ，図Ⅱのように，どこかの出入口を必ず二度通ってしまうことになるからである。

図Ⅰ



図Ⅱ



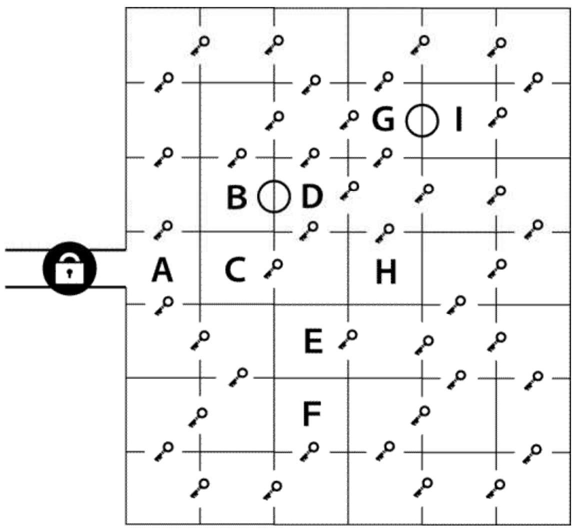
この考えをもとに，与えられた部屋の図で出入口の数が奇数の部屋に着目し，図Ⅲのように部屋Ｂ～Ｉとする。

図Ⅲにおいて，出入口が 3 個の部屋は，残った壁に必ず穴を開ける必要があるため，既に 2 つの○をつけてあり，この 2 つの○により，部屋Ｂ，Ｄ，Ｇ，Ｉは出入口が偶数となっていることが分かる。

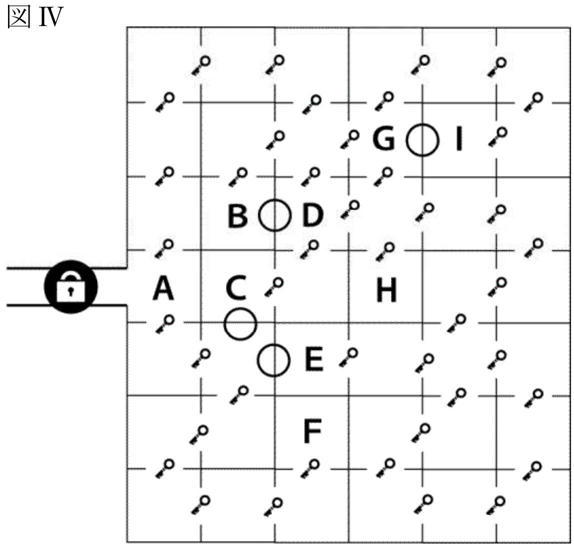
次に，部屋Ｃの出入口を偶数にするための穴の開け方について考える。部屋Ｃの左側に穴を開けると部屋Ａの出入口が 3 つになってしまう。また，部屋Ｃの上側に穴を開けると部屋Ｂの出入口が 3 つになってしまので，さらに部屋Ｂの左側に穴を開けるとＡの上の部屋の出入口が 3 つになってしまう。部屋ＡやＡの上の部屋は左側に穴を開けられないので，出入口を 3 つにすることはできない。したがって，これらは失敗である。

すなわち，部屋Ｃは下側に穴を開けることになる。このとき，Ｃの下の部屋は出入口が 3 つになるため，部屋Ｅの左側も穴を開けることになる。ここまでを示したのが図Ⅳである。

図Ⅲ

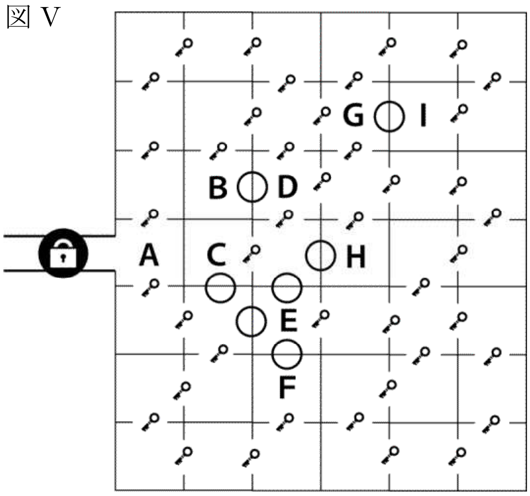


図Ⅳ

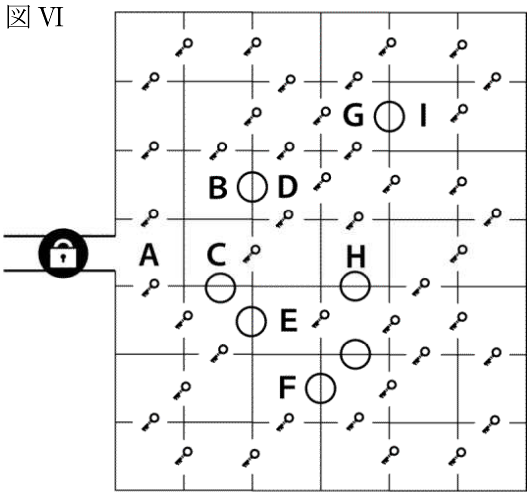


図Ⅳにおいて，部屋Ｆの出入口を偶数にするための穴の開け方を考える。部屋Ｆの左側に穴を開けた場合，Ｆの左側の出入口が 3 つになり，解消しようとするとその下の部屋の出入口が 3 つになるため，これは失敗である。したがって，部屋Ｆの上側または右側に穴を開ける必要がある。その続きを示したのが，図Ⅴ，図Ⅵである。

図Ⅴ



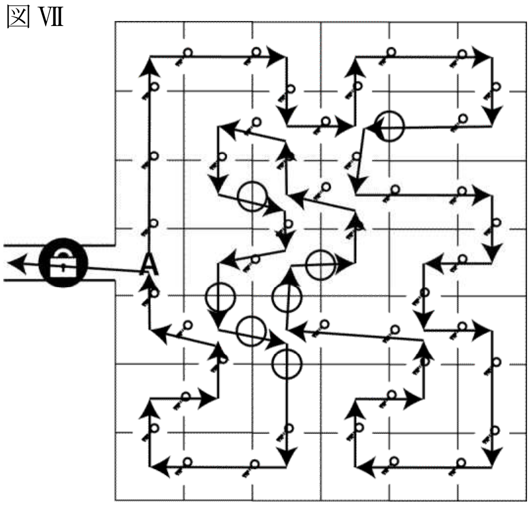
図Ⅵ



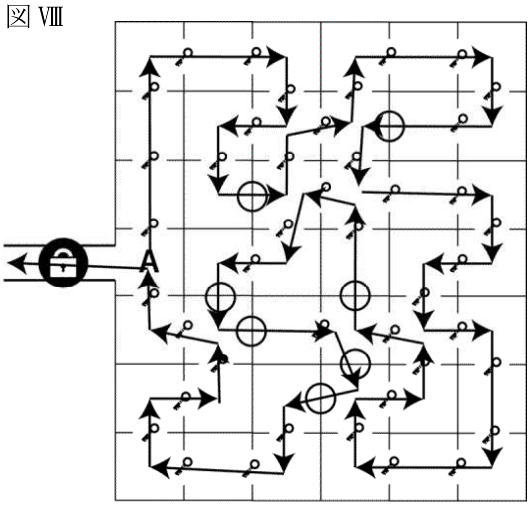
図Ⅴ，図Ⅵはいずれも部屋Ｈの出入口も偶数にすることができている。一方，部屋Ｈの右側に穴を開けた場合，図Ⅴ，図Ⅵよりも穴を開ける回数が多くなってしまうため，図Ⅴ，図Ⅵが穴を開ける最小回数であることが分かる。

以上から，穴を開ける最小回数は 7 回であり，その道順については，以下の図Ⅶ，図Ⅷのとおり。

図Ⅶ



図Ⅷ



［出題の意図］

この問題のテーマとして，「一筆書き」が背景にあります。つまり，部屋Ａから出発してすべての鍵が取れるように一筆書きで部屋Ａに戻ってこれるか，という問題です。落ち着いて考えれば当たり前のことですが，すべての部屋の出入口が偶数個でないと，一筆書きは成立しません。今回は，壁に穴を開けてよいという設定であるため，出入口が奇数個の部屋は必ずどこかの壁に穴を開けて出入口を偶数個にする必要があります。それができれば，あとは道順を考えれば正解となります。

また，この問題のもう一つのポイントとして，適切な説明が求められるところがあります。解答を図示するだけでなく，「なぜ，それが最小回数といえるのか」「なぜ，そこ

に穴を開ける必要があるのか」の2点について，論理の飛躍なく説明する必要がありました。論理的な説明というのは，数学として最も大切な部分であり，難しい部分でもありますが，数学では欠かせない要素ですので，根気強く挑戦してみてください。

［講評］

578名中458名が選択し，3名が正解しました。今回は，論証も含めて完璧に書けた解答を正解としています。経路の図示と穴を開ける最小回数だけ正しい解答は多く見られましたが，「なぜ，それが最小回数といえるのか」「なぜ，そこに穴を開ける必要があるのか」の2点について，論理の飛躍なく説明できていた答案を正解としました。

解答を見ている中で，「出入口の個数を偶数にしなくてはならない」という発想自体は多く見られ，皆さんのひらめきには目を見張るものがありました。試行錯誤の中から生まれる「ひらめき」を，今後も大切にして欲しいと思います。