

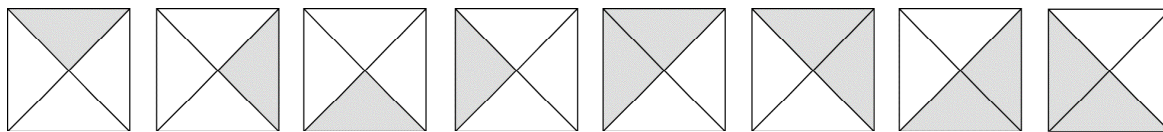
令和2年度
群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページから3ページまであります。
- 2 標準解答時間は3時間です。6問中4問を選択して解答してください。
- 3 解答は、解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙には、選択した問題の番号、氏名等を記入してください。
- 5 解答には、必ず途中の考え方などを書いてください。
- 6 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。また、必要があれば、電卓を用いることができます。

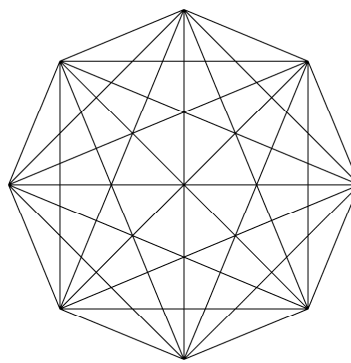
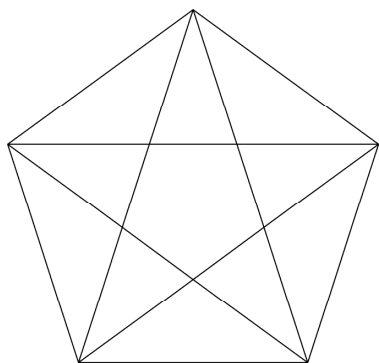
- 1 次の図のように、正方形にすべての対角線を引いたとき、辺または対角線で囲まれた三角形は、8個できることがわかる。



次の(1), (2)の正多角形にすべての対角線を引いたとき、辺または対角線で囲まれた三角形の個数を求めなさい。必要があれば、後の【参考】を活用してもよい。

(1) 正五角形

(2) 正八角形



【参考】

異なる n 個のものから r 個を選ぶ方法の総数を ${}_n C_r$ と表す。 ${}_n C_r$ は、次の式で求めることができる。

$${}_n C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1}$$

例：異なる 5 つの点から 3 つの点を選ぶ方法の総数は、 ${}_5 C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ 通り

- 2 秒針、分針（長針）、時針（短針）があり、目盛りが 1 分ごとにふってあるアナログ時計について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) この時計の秒針は、1 秒経った瞬間に 1 目盛りずつ動く。また、分針は 60 分、時針は 12 時間で 1 周するように、それぞれなめらかに動いている。0 時 0 分 0 秒に動き始めてから、ちょうど 12 時間経った 12 時 0 分 0 秒までのこの時計の動きについて、次の①, ②の問いに答えなさい。

- ① 秒針と分針が目盛りの上で重なることがあるか、その理由とともに答えなさい。
 ② 分針と時針が目盛りの上で重なることがあるか、その理由とともに答えなさい。

(2) この時計が壊れてしまい、動きがおかしくなってしまった。0 時 0 分 0 秒に時計が動き始めると、秒針は 1 秒ごとに 1 目盛り, 3 目盛り, 5 目盛り, 7 目盛り..., と動き、以下 1 目盛りから順にこの動きを繰り返している。分針は秒針が 12 の目盛りに止まった瞬間に 1 目盛り動き、時針は秒針が 12 の目盛りに止まった瞬間に $\frac{1}{12}$ 目盛り動く。分針、時針ともに、秒針が 12 の目盛りを通過するだけでは動かないものとする。壊れた時計と正確な時計が 0 時 0 分 0 秒に同時に動き出したとき、次の①, ②の問いに答えなさい。

- ① 壊れた時計が、動き出してから初めて 3 時 33 分 0 秒を指したとき、正確な時計は何時何分何秒を指しているか、求めなさい。
 ② 壊れた時計が、5 時 55 分 55 秒を指すことはあるか。指すことがあれば、そのときに正確な時計が指している時刻を 1 つ求めなさい。指すことがなければ、指さない理由を説明しなさい。

3 次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

- (1) 四角形ABCDが円に内接しており、 $AB=BC=1$ 、 $CD=DA=2$ である。このとき、四角形ABCDの面積を求めなさい。
- (2) 六角形ABCDEFが円に内接しており、 $AB=BC=CD=1$ 、 $DE=EF=FA=2$ である。このとき、六角形ABCDEFの面積を求めなさい。
- (3) 六角形ABCDEFが円に内接しており、 $AB=BC=CD=DE=1$ 、 $EF=FA=2$ である。このとき、六角形ABCDEFの面積を求めなさい。

4 半径1の黒色の円板を、半径 r の白色の円板 n 枚を使い、黒い部分が完全に見えなくなるように覆い尽くす方法を考える。図Iは $n=3$ 、図IIは $n=10$ の場合の例である。これらを参考にして、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

図 I

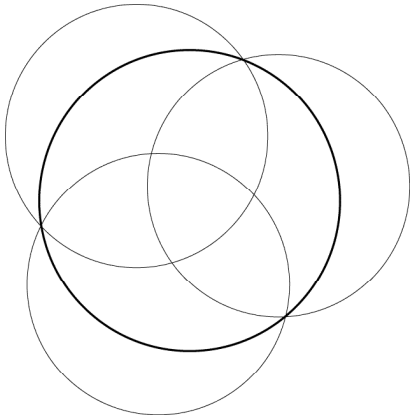
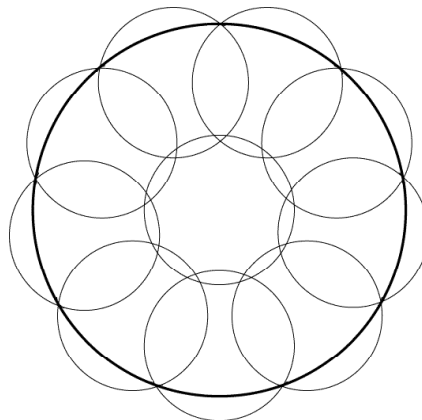


図 II



- (1) $r = \frac{1}{2}$ のとき、黒色の円板を覆い尽くすには、白色の円板が少なくとも何枚必要となるか、求めなさい。解答を考えるに当たっては、コンパスと定規を用いてもよい。
- (2) $n = 9$ のとき、できるだけ小さい r の値を求めなさい。適切な根拠とともに、 r の値をより小さく示した解答を良い評価とする。

5 ある鍵を解除するには、①，②，③，④，⑤の5つの番号を正しい順に並べ替えて入力する必要がある。5つの番号を入力しても解除されなかったときは、5つの数字のうち、間違っていた番号の個数がエラーとして表示される。次のように、1回目から5回目まで左から順に入力した。

1回目：⑤②③④①

2回目：①④⑤②③

3回目：①②③④⑤

4回目：⑤③④①②

5回目：①②③⑤④

これら5回の入力では、いずれも鍵を解除することができなかった。また、これらの入力のうち、3回は「5つの番号がすべてエラー」、2回は「3つの番号のみがエラー」と表示された。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) 最初に①を入力することは正しいかどうか，調べなさい。

(2) 3回目の入力は、「5つの番号がすべてエラー」であったことを証明しなさい。

(3) 正しい入力の順を求め，その入力によって鍵が解除されることを証明しなさい。

6 整数の範囲で商と余りを考える除法を行う。例えば、7を2で割ったとき、商は3で余りは1である。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。必要があれば、後の【参考】を活用してもよい。

(1) 2020^2 を1, 2, 3, ..., 2020^2 のそれぞれの数で割ったとき、商として現れる整数は何種類あるか、求めなさい。

(2) 2^{2020} を1, 2, 3, ..., 2^{2020} のそれぞれの数で割ったとき、商として現れる整数は何種類あるか、求めなさい。

(3) 自然数 m について、 m を1, 2, 3, ..., m のそれぞれの数で割ったとき、商として現れる整数は何種類あるか、求めなさい。

【参考】

a を正の実数とするとき、 a の整数部分を $[a]$ で表す。

例： $[3.5] = 3$ ， $[7] = 7$ ， $[12.96] = 12$