令和２年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

令和２年度群馬県高校生数学コンテストは，新型コロナウイルス感染症拡大防止の観点から，例年実施している県内４会場での開催を中止としたが，その代替事業として，例年と同様のコンテスト問題を作成して県内各校に配布するとともに，各問題の解説動画をＷｅｂ上で公開するという形式で実施した。

コンテスト問題は，例年どおり，数学的な発想を問う６題の問題から４題を選択し，３時間で解答する状況を想定し，解答の際に電卓や定規・コンパスを使用できることを前提とした問題となっている。

また，公開した解説動画では，各問題の解答を説明するだけでなく，解答に至るための考え方などについて，ポイントを絞って丁寧に説明した。数学コンテストは，思考力や発想力を問う問題に触れる経験を通して，高校生が数学の知識・技能を積極的に活用する態度を養うとともに，数学的な見方や考え方のよさを改めて認識してもらうことを目的として実施しており，解説動画の公開がその一助になればと考えている。

本コンテストは，３時間集中して数学の問題を考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど,既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を提供していると考える。今年度は県下一斉でのコンテストの実施ができなかったが，ある県立学校では，配布された問題を用いて学校独自のコンテストを行ったとの報告もあった。

本県では，数学を含めた複数の学問分野を横断的に学び，未来の社会を切り拓くための新たな価値を見いだす力を養う「ＳＴＥＡＭ教育」を推進している。本コンテストについても，これまでに培ってきたノウハウを生かしながら，ＳＴＥＡＭ教育の観点を取り入れつつ，更に内容を発展，充実させていきたいと考えている。

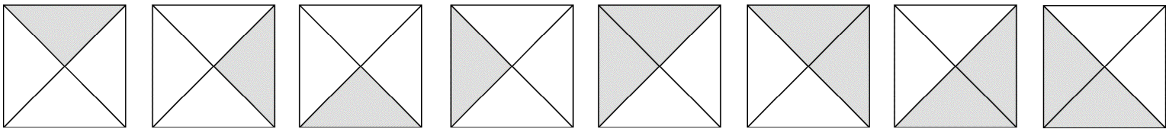
※次のページ以降に令和２年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。
2　標準解答時間は３時間です。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，氏名等を記入してください。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓を用いることができます。

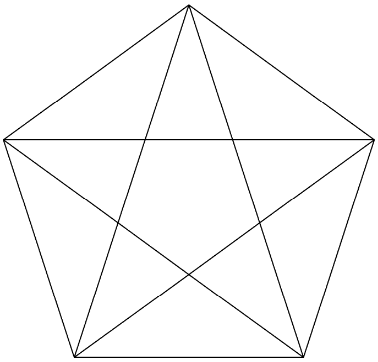
Ⅱ　問題及び解答例

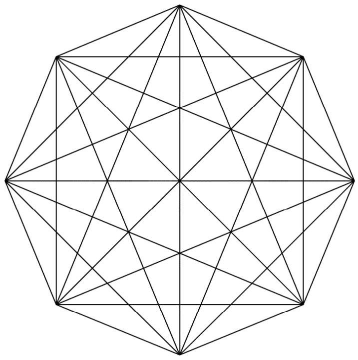
1　次の図のように，正方形にすべての対角線を引いたとき，辺または対角線で囲まれた三角形は，8個できることがわかる。



次の(1)，(2)の正多角形にすべての対角線を引いたとき，辺または対角線で囲まれた三角形の個数を求めなさい。必要があれば，後の【参考】を活用してもよい。

(1)　正五角形　　　　　　　　　　　　　(2)　正八角形





【参考】

異なる n 個のものから r 個を選ぶ方法の総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と表す。${}_n\mathrm{C}_r$ は，次の式で求めることができる。

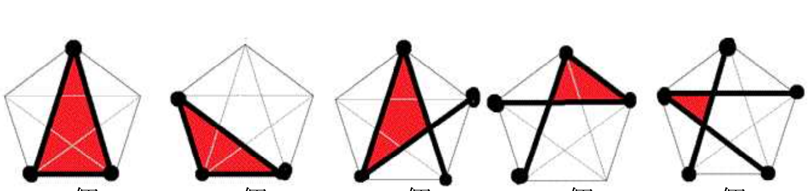
$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} $$

例：異なる5つの点から3つの点を選ぶ方法の総数は，${}_5\mathrm{C}_3 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$ 通り

[解答例]

(1)　三角形は，対角線または辺のうちの3本を用いて作られる。1つの三角形に対し，それを作る3本の対角線または辺の組は1通りである。したがって，正五角形から三角形を作ることのできる3本の選び方を数えればよい。

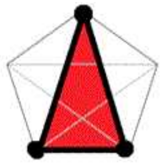
三角形の辺を作る線分の両端となる正五角形上の頂点の個数は，次のように，3個，4個，5個の場合がある。



3個　　3個　　4個　　4個　　5個

以降，「3本の対角線を作る，正五角形上の頂点の個数」で場合分けをして考えることにする。

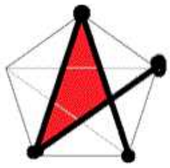
［1］　3 個の頂点から作る三角形



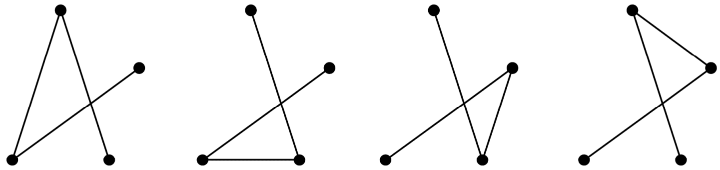
正五角形の 5 つの頂点から 3 つの頂点を選ぶ方法は，
${}_5C_3 = 10$ 通り
また，選んだ 3 つの頂点を結んだ 3 本の線分で作ることのできる三角形は 1 通りである。

したがって，3 個の頂点で作ることのできる三角形の数は $10 \times 1 = 10$ 個。

［2］　4 個の頂点から作る三角形

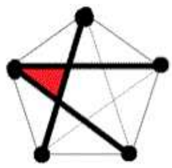


正五角形の 5 つの頂点から 4 つの頂点を選ぶ方法は，
${}_5C_4 = 5$ 通り
また，選んだ 4 つの頂点を結んだ 3 本の線分で作ることのできる三角形は，以下のように 4 通りである。

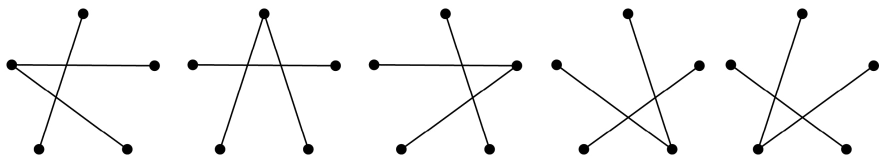


したがって，4 個の頂点で作ることのできる三角形の数は $5 \times 4 = 20$ 個。

［3］　5 個の頂点から作る三角形



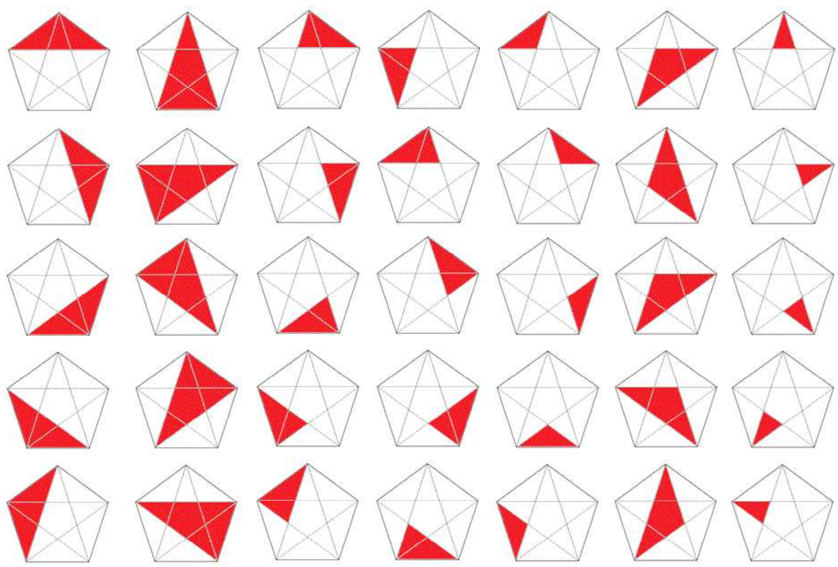
正五角形の 5 つの頂点から 5 つの頂点を選ぶ方法は 1 通り。
また，選んだ 5 つの頂点を結んだ 3 本の線分で作ることのできる三角形は，以下のように 5 通りである。



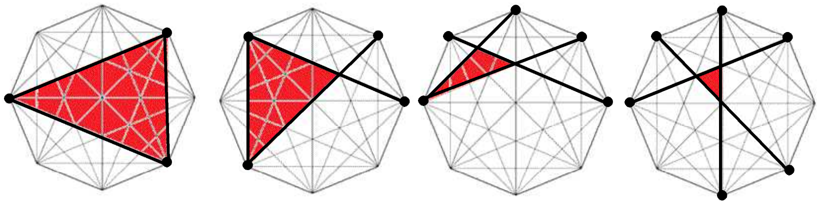
したがって，5 個の頂点で作ることのできる三角形の数は $1 \times 5 = 5$ 個。

［1］～［3］より，正五角形において辺または対角線で囲まれた三角形の個数は，
$10 + 20 + 5 = 35$　個

【参考（全 35 個）】



(2)　(1)と同様に，三角形の辺を作る線分の両端となる正八角形上の頂点の個数を考えると，次のように，3 個，4 個，5 個，6 個の場合がある。



3 個　　4 個　　5 個　　6 個

以降，(1)と同様に，「3 本の対角線を作る，正八角形上の頂点の個数」で場合分けをして考えることにする。

［1］　3 個の頂点から作る三角形

正八角形の 8 つの頂点から 3 つの頂点を選ぶ方法は，${}_8C_3 = 56$ 通り。

また，選んだ 3 つの頂点を結んだ 3 本の線分で作ることのできる三角形は 1 通りであるから，3 個の頂点で作れる三角形の数は，$56 \times 1 = 56$ 個。

［2］　4 個の頂点から作る三角形

正八角形の 8 つの頂点から 4 つの頂点を選ぶ方法は，${}_8C_4 = 70$ 通り。

また，選んだ 4 つの頂点を結んだ 3 本の線分で作ることのできる三角形は 4 通りであるから，4 個の頂点で作れる三角形の数は，$70 \times 4 = 280$ 個。

［3］　5 個の頂点から作る三角形

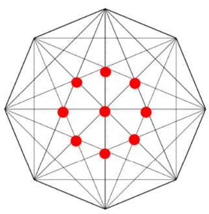
正八角形の 8 つの頂点から 5 つの頂点を選ぶ方法は，${}_8C_5 = 56$ 通り。

また，選んだ 5 つの頂点を結んだ 3 本の線分で作ることのできる三角形は 5 通りであるから，5 個の頂点で作れる三角形の数は，$56 \times 5 = 280$ 個。

［4］　6 個の頂点から作る三角形

正八角形の 8 つの頂点から 6 つの頂点を選ぶ方法は，${}_8C_6 = 28$ 通り。

ここで，選んだ 6 つの頂点を結んだ 3 本の線分（対角線）で三角形を作るときに，線分が 1 点で交わるときには三角形ができないので，その場合について考える。



図のように，3 本の対角線が交わる点が 8 個，4 本の対角線が交わる点が中央に 1 個あることがわかる。中央の点を通る 3 本の対角線の選び方は，${}_4C_3 = 4$ 通りであるから，上記の 28 通りのうち，$8 + 4 = 12$ 通りは三角形ができないことになる。したがって，6 個の頂点で作れる三角形の数は，$28 - 12 = 16$ 個。

［1］～［4］より，正八角形において辺または対角線で囲まれた三角形の個数は，

$56 + 280 + 280 + 16 = 632$　個

［出題の意図］

正多角形の辺または対角線で囲まれた三角形の個数を数えるといったシンプルな問題です。(1)では具体的に数え上げることもできますが，(2)の正八角形の場合は数が多くなりすぎてしまい難しいと思います。そこで，漏れや重複がないように数え上げる工夫が必要となります。数学 A で学習する順列や組合せの考え方を使いますが，ただ公式に当てはめただけでは解くことはできません。三角形の個数を数えるためには，何を数えればよいのか，という見方が重要になります。今回の場合は，三角形を作ることができるような対角線の引き方，つまり，「3 本の対角線の両端の点の選び方を数える」ことがこの問題の解法の鍵となります。すぐに答えが出なくても，試行錯誤をしながら本質を見極める力をつけてもらいたいと思い，この問題を出題しました。

2　秒針，分針（長針），時針（短針）があり，目盛りが 1 分ごとにふってあるアナログ時計について，次の(1),(2)の問いに答えなさい。

(1)　この時計の秒針は，1 秒経った瞬間に 1 目盛りずつ動く。また，分針は 60 分，時針は 12 時間で 1 周するように，それぞれなめらかに動いている。0 時 0 分 0 秒に動き始めてから，ちょうど 12 時間経った 12 時 0 分 0 秒までのこの時計の動きについて，次の①，②の問いに答えなさい。

①　秒針と分針が目盛りの上で重なることがあるか，その理由とともに答えなさい。

②　分針と時針が目盛りの上で重なることがあるか，その理由とともに答えなさい。

(2)　この時計が壊れてしまい，動きがおかしくなってしまった。0 時 0 分 0 秒に時計が動き始めると，秒針は 1 秒ごとに 1 目盛り，3 目盛り，5 目盛り，7 目盛り…，と動き，以下 1 目盛りから順にこの動きを繰り返している。分針は秒針が 12 の目盛りに止まった瞬間に 1 目盛り動き，時針は秒針が 12 の目盛りに止まった瞬間に $\frac{1}{12}$ 目盛り動く。分針，時針ともに，秒針が 12 の目盛りを通過するだけでは動かないものとする。壊れた時計と正確な時計が 0 時 0 分 0 秒に同時に動き出したとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　壊れた時計が，動き出してから初めて 3 時 33 分 0 秒を指したとき，正確な時計は何時何分何秒を指しているか，求めなさい。

②　壊れた時計が，5 時 55 分 55 秒を指すことはあるか。指すことがあれば，そのときに正確な時計が指している時刻を 1 つ求めなさい。指すことがなければ，指さない理由を説明しなさい。

［解答例］

(1)　①　分針が目盛りの上にあるとき，秒針は必ず 12 の目盛りの上にある。よって，次に分針と秒針が目盛りの上で重なるのは 0 時 0 分 0 秒の時で，12 の目盛の上で重なる。以後，1 時間ごとに 12 の目盛りの上で重なる。

②　分針と時針の動きを分析すると，分針は 1 分で $360^\circ \div 60 = 6^\circ$，時針は 1 分で $360^\circ \div 720 = 0.5^\circ$ 動くことがわかる。t 分後に分針と時針が重なっているとすると，

$6t - 0.5t = 360n$（t，n は整数，$0 \leqq t \leqq 720$，$0 \leqq n \leqq 11$）

と表せる。

この式より，$t = \dfrac{360}{11}n$　となるが，この式が成り立つのは，$t = 720$，$n = 11$ のときのみである。

したがって，0 時 0 分 0 秒の次に分針と時針が重なるのは，12 時 0 分 0 秒のときで，12 の目盛りの上で重なる。

(2)　まず，壊れた秒針の動きを分析する。

秒針が 4 秒間で進む 16 目盛りを 1 セットとする。16 と 60 の最小公倍数を考えると，15 セット後の 60 秒で 240 目盛り進み，秒針はこのとき 12 の目盛りの上に戻ってくることになる。よって，この壊れた時計は，60 秒（240 目盛り）を周期として繰り返し動いていることがわかる。

ここで，m を 14 以下の自然数として，m セット後の動きの中で，進んだ目盛りの和が 60 の倍数となる場合（12 の目盛りに止まる場合）を考える。60 の倍数は偶数であり，m セット後には，1 秒で 1 目盛り，2 秒で 4 目盛り，3 秒で 9 目盛り，4 秒で 16 目盛り進むので，セットの途中で 60 の倍数となるためには，合計が偶数となるとき，つまり m セット＋ 2 秒（$16m + 4$ 目盛り）である必要がある。

$60 - 4 = 56 \neq 16m$，$120 - 4 = 116 \neq 16m$，$180 - 4 = 176 = 16 \times 11$ であるから，11 セット＋ 2 秒，すなわち 46 秒後に秒針が 12 の目盛りに止まることがわかる。

以上より，壊れた時計の秒針は，実際の時間の 46 秒後と 60 秒後に 12 の目盛りに止まり，このときに分針がそれぞれ 1 目盛りずつ進むので，正確な時計の分針が 1 目盛り進んだとき，壊れた時計の分針は 2 目盛り進んでいることがわかった。

①壊れた時計が 3 時 33 分 0 秒を指したとき，壊れた時計の分針は 213 目盛進んでいる。すなわち，正確な時計では分針が 106 目盛り進み，46 秒経過した状況である。よって，正確な時計は 1 時 46 分 46 秒を指している。

②壊れた時計は 240 目盛りが周期なので，240 目盛りまである時計を考える。この時計で正確な時計の秒針が指す 55 秒の目盛に対応するのは，55，115，175，235 の目盛である。これらはすべて奇数である。壊れた時計の秒針が進んだ目盛りの和が奇数となるためには，m セット＋ 1 秒（$16m + 1$ 目盛り）または m セット＋ 3 秒（$16m + 9$ 目盛り）のどちらかである必要がある。

55，115，175，235 の目盛りの付近を調べてみると

$m = 3$ のとき　$16 \times 3 = 48$　　$48 + 1 = 49$，$48 + 9 = 57$

$m = 7$ のとき　$16 \times 7 = 112$　　$112 + 1 = 113$，$112 + 9 = 121$

$m = 10$ のとき　$16 \times 10 = 160$　　$160 + 1 = 161$，$160 + 9 = 169$

$m = 14$ のとき　$16 \times 14 = 224$　　$224 + 1 = 225$，$224 + 9 = 233$

となり，いずれも 55，115，175，235 の目盛りを指すことはない。

以上より，壊れた時計が 5 時 55 分 55 秒を指すことはない。

［出題の意図］

この問題は，日常生活の中で目にするアナログ時計を用いた問題です。アナログ時計には秒針，分針，時針があり，それぞれが 360°を周期に動いています。それぞれの動きをイメージしてみると色々と面白い関係が見いだせます。この問題は，規則を見つけ，状況を整理しながら適切に処理する力を問う問題です。今回は普通の時計の動きだけでなく，初めて見る規則（壊れた時計）について，状況を把握し規則性を発見できるかがポイントになります。規則を見つけた後はすべてを書き出すのではなく，偶数，奇数などによる絞り込みの工夫が考えられます。日常生活の中で何気なく見過ごしてしまっていることに目を向けてみると，色々な疑問がわいてくることがあります。そのような，日常生活の『なぜ？』に数学を用いて考察してみると面白いのではないでしょうか。

3　次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　四角形ABCDが円に内接しており，AB＝BC＝１，CD＝DA＝２である。このとき，四角形ABCDの面積を求めなさい。

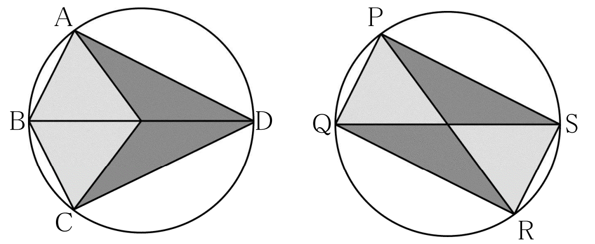
(2)　六角形ABCDEFが円に内接しており，AB＝BC＝CD＝１，DE＝EF＝FA＝２である。このとき，六角形ABCDEFの面積を求めなさい。

(3)　六角形ABCDEFが円に内接しており，AB＝BC＝CD＝DE＝１，EF＝FA＝２である。このとき，六角形ABCDEFの面積を求めなさい。

［解答例］

(1)　四角形ABCDは対称性から対角線BDが円の直径となっており，∠BAD＝∠BCD＝90°である。したがって，図のように四角形ABCDを４分割して組み替えた四角形PQRSを考えると，PQRSは長方形であることがわかる。ABCDとPQRSは面積が等しいので，四角形ABCDの面積は，

　$1 \times 2 = 2$　である。

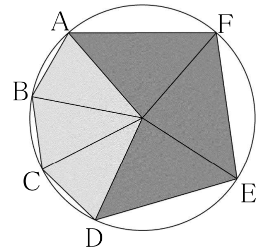


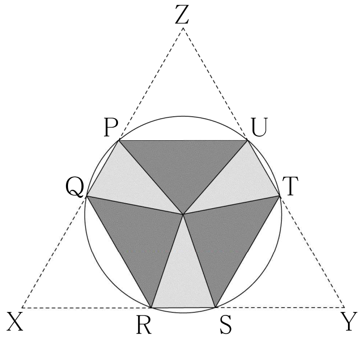
(2)　(1)と同様に，六角形ABCDEFを分割して組み替えた六角形PQRSTUを考えると，この２つの六角形も面積が等しいことがわかる。ここで，直線PQと直線RSとの交点をX，直線RSと直線TUとの交点をY，直線TUと直線PQとの交点をZとする。

　六角形PQRSTUは，その対称性からすべての内角の大きさが等しいので，１つの内角の大きさは $720 \div 6 = 120^\circ$ である。このことから，△XYZは１辺の長さが５の正三角形，△XRQ，△YTS，△ZPUはそれぞれ１辺の長さが２の正三角形となる。したがって求める面積は，

$$5\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-3\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13\sqrt{3}}{4}$$

である。



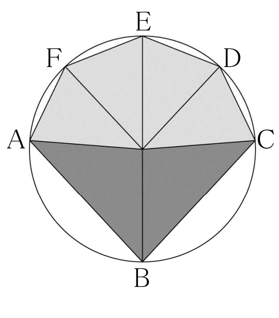


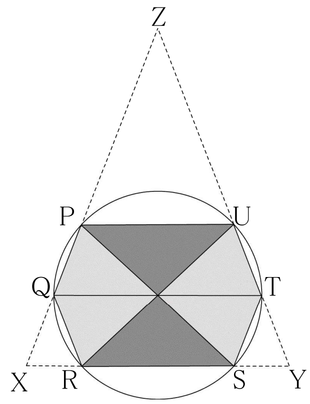
(3)　(2)と同様に，六角形ABCDEFを分割して組み替えた六角形PQRSTUを考えると，この２つの六角形も面積が等しいことがわかる。直線PQと直線RSとの交点をX，直線RSと直線TUとの交点をY，直線TUと直線PQとの交点をZとすると，六角形PQRSTUの対称性や平行線の性質から，△ZXY，△ZPU，△QXR，△TSYは，それぞれ二等辺三角形となることがわかる。

　ここで，△XRQ∽△XPS であるから

　$1 : (XR + 2) = XR : 2$

これを解いて，$XR = -1 + \sqrt{3}$





また，$\triangle QPU \backsim \triangle RXU$ であるから，

$1 : PZ = \sqrt{3}-1 : 2$

これを解いて，$PZ = \sqrt{3}+1$

Zから辺XYに下ろした垂線の長さを h とすると

$h = \sqrt{(\sqrt{3}+3)^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+6\sqrt{3}}$

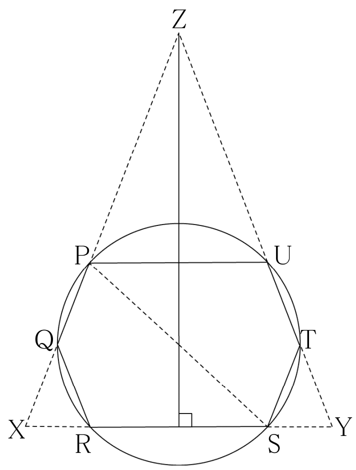
また，$\triangle ZXY = 2\sqrt{3} \cdot h \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}\,h$

さらに，$\triangle ZXY : \triangle ZPU$

$= (2\sqrt{3})^2 : 2^2 = 3 : 1$

$\triangle ZXY : \triangle QXR$

$= (2\sqrt{3})^2 : (\sqrt{3}-1)^2 = 6 : (2-\sqrt{3})$



であるから，求める面積は

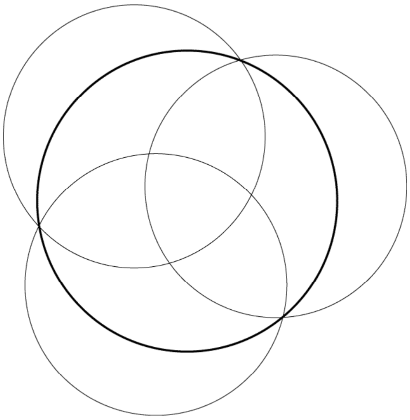
$$\begin{aligned} \triangle ZXY - \triangle ZPU - 2\triangle QXR &= \triangle XYZ - \frac{1}{3}\triangle XYZ - 2\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{6}\triangle XYZ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\triangle XYZ \\ &= h \\ &= \sqrt{9+6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

［出題の意図］

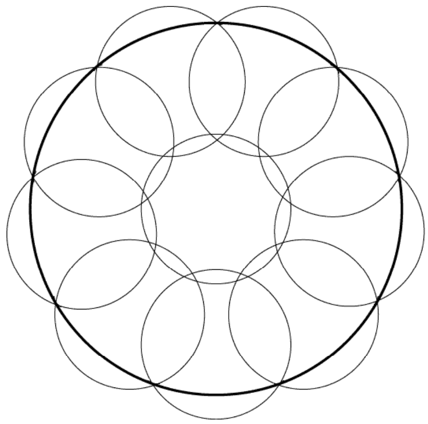
図の対称性に着目し，図形の面積を求める問題で，面積を変化させずに図形を組み替えることがポイントでした。面積を求める際に，少しの工夫で問題が解けることを実感してもらえらばと思います。また，円周角の定理について，『中心角(円周角)の大きさは弦の長さに比例する』と誤解したために，間違った方向で考えてしまった人がいるかもしれません。図形の性質を正しく理解し活用することも，問題を解決するための大切なポイントです。

4　半径 1 の黒色の円板を，半径 r の白色の円板 n 枚を使い，黒い部分が完全に見えなくなるように覆い尽くす方法を考える。図Ⅰは $n = 3$，図Ⅱは $n = 10$ の場合の例である。これらを参考にして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



(1)　$r = \dfrac{1}{2}$ のとき，黒色の円板を覆い尽くすには，白色の円板が少なくとも何枚必要となるか，求めなさい。解答を考えるに当たっては，コンパスと定規を用いてもよい。

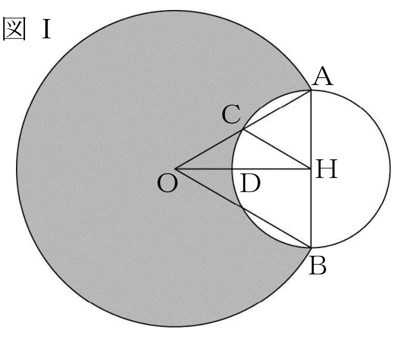
(2)　$n = 9$ のとき，できるだけ小さい r の値を求めなさい。適切な根拠とともに，r の値をより小さく示した解答を良い評価とする。

［解答例］

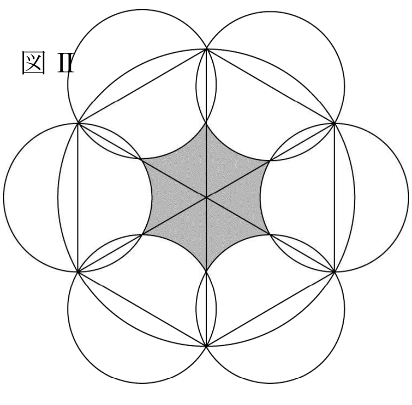
(1)　まずは，半径 1 の黒色円板の円周を，半径 $\dfrac{1}{2}$ の白色円板で覆い尽くすことを考える。ここで，1 つの白色円板で可能な限り大きく，円周を覆うためには，黒色円板と白色円板の重なり合った共通弦の最大値を考えればよい。

図Ⅰからもわかるように，共通弦の最大値は白色円板の直径であるから，△OABは正三角形であることがわかる。したがって，∠AOB＝60°であるから，

図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅱのように白色円板を 6 枚並べることで，黒色円板の円周を完全に覆い尽くすことができる。よって，残りは図Ⅱの黒色部分を覆うことができれば良い。

以下は，この残りの部分が，黒色円板と中心が同じである 1 枚の白色円板で覆うことができることを示す。

図Ⅰの△AOHについて，OA＝1 ，AH＝$\dfrac{1}{2}$ より　OH＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，　OD＝OH－DH＝$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

また，△ACHも正三角形であるから，　$OC=\frac{1}{2}$　より　OC＞OD　とわかる。

すなわち，図Ⅱの黒色部分において，黒色円板の中心から最も離れた点までの距離はOCに等しいので，もう1枚の白色円板を黒色円板の中心に置くことで，この黒色部分は，完全に覆い尽くせることがわかった。

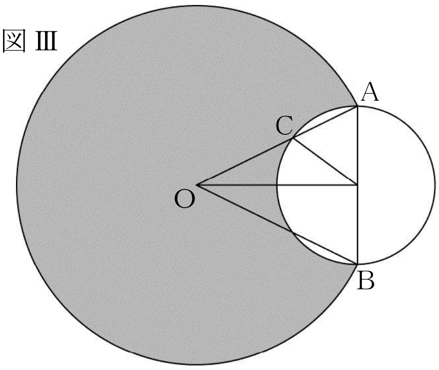
以上より，7枚の白色円板があれば，黒色円板を覆い尽くすことができる。

(2)　$n=9$ のとき，できるだけ小さい半径の白色円板で黒色円板を覆い尽くすことを考える。

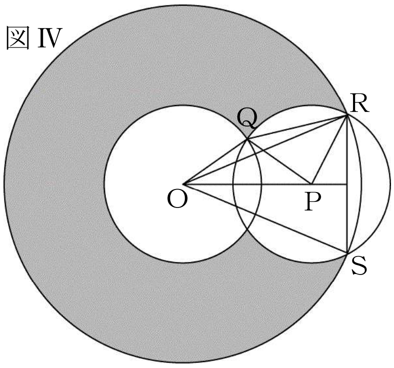
なお，(1)の結果より，$r<\frac{1}{2}$ で考えてよいことがわかる。

図Ⅲのように，(1)と同様の方法で，白色円板の直径で黒色円板の円周を覆い尽くそうとすると　$OC=OA-AC=1-r>\frac{1}{2}$　となり，残り1枚の白色円板だけでは黒色円板の中心部分を覆い尽くすことができないことがわかる。すなわち，白色円板の直径で黒色円板の円周を覆うのではなく，白色円板を黒色円板の中心部分に近づけて考える必要がある。

図Ⅲ



図Ⅳ



図Ⅳのように，8枚の白色円板で黒色円板の円周をちょうど覆い尽くすような円板の配置を考える。$\angle ROS=45^\circ$，$\angle QOP=22.5^\circ$，$OQ=QP=r$ より $\angle PQR=45^\circ$ であり，△PQRは直角二等辺三角形であることがわかる。よって，$RQ=\sqrt{2}\ r$ となる。

ここで，中心にもう1枚白色円板を置いて，合計9枚で黒色円板を覆い尽くすためには，$OQ+QR\geqq OR$ を満たせばよいので，

$$r+\sqrt{2}\geqq 1 \text{ より，} r\geqq\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

したがって，$r=\sqrt{2}-1$ の白色円板9枚で覆い尽くせることが示された。

［出題の意図］

今回のように，ある図形を，大きさの違う図形で完全に覆い尽くしていくことを図形の「被覆問題」と呼ぶことがあります。令和元年度のコンテスト問題に図形の「充填問題」が出題されていましたが，その問題とは異なり，少しの隙間もなく覆い尽くしていくという所に別の難しさがあったと思います。まずは具体的に作図をしながら，どのようにすれば無駄なく覆い尽くせるかを考えていくと，解答の糸口が見つかるかもしれません。また，今回は円を用いましたが，違った図形（正方形や正多角形）の被覆問題を考えても面白いかもしれません。

5　ある鍵を解除するには，①，②，③，④，⑤の5つの番号を正しい順に並べ替えて入力する必要がある。5つの番号を入力しても解除されなかったときは，5つの数字のうち，間違っていた番号の個数がエラーとして表示される。次のように，1回目から5回目まで左から順に入力した。

1回目：⑤②③④①
2回目：①④⑤②③
3回目：①②③④⑤
4回目：⑤③④①②
5回目：①②③⑤④

これら5回の入力では，いずれも鍵を解除することができなかった。また，これらの入力のうち，3回は「5つの番号がすべてエラー」，2回は「3つの番号のみがエラー」と表示された。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　最初に①を入力することは正しいかどうか，調べなさい。
(2)　3回目の入力は，「5つの番号がすべてエラー」であったことを証明しなさい。
(3)　正しい入力の順を求め，その入力によって鍵が解除されることを証明しなさい。

［解答例］

(1)　最初に①を入力することが正しいと仮定する。5回中どの3回を選んでも，最初に①を入力したものが含まれるが，題意より，3回は「5つすべてエラー」と表示されているので，仮定と矛盾する。したがって，最初に①を入力することは間違いである。

(2)　3回目が3つエラーであったと仮定する。(1)と同様に考えて，2番目に②を入力することと，3番目に③を入力することは間違いであるとわかる。ゆえに3回目の①②③の入力は間違いであり，仮定から4番目の④と5番目の⑤の入力が正しいことになる。ここで1回目を見ると，4番目の④は正しく，5番目の①は間違いとなり，1番目の⑤も間違いになる。2番目の②と3番目の③は間違いであるから，1回目は4つエラーとなり，題意と矛盾する。よって，3回目は5つすべてエラーである。

(3)　5回目が3つエラーであったと仮定すると，4番目の⑤と5番目の④は正しいことになる。このとき，1回目と2回目が5つすべてエラーになり，4回目は少なくとも4つエラーとなる。(2)より3回目は5つすべてエラーであるから，5回目のみが3つエラーとなって題意と矛盾する。よって，5回目は5つすべてエラーである。

1回目が3つエラーであったと仮定すると，3回目が5つすべてエラーであることから，1回目の②③④が間違いであり，1番目は⑤で5番目は①が正しいことになる。このとき4回目を見ると，1番目の⑤が正しくなるから，1回目と4回目が3つエラーの場合になる。ここで4回目の①，②が間違いになるから，2番目が③か3番目が④のどちらかが正しいことになる。2番目は③が正しいと仮定すると3番目の④は間違いになるから，⑤③②④①が正しい番号になる。しかし，4番目の④は間違いであるため，題意と矛盾する。また，3番目は④が正しいと仮定すると2番目の③は間違いになるから，⑤②④③①が正しい番号になる。しかし2番目の②は間違いであるため，題意と矛盾する。よって，1回目は5つすべてエラーである。

以上より，2回目と4回目が3つエラーの場合であり，5番目の番号は②か③のどちらかが正しい。5番目は③が正しいと仮定すると，4回目の⑤，③，②が間違いになり，3番目は④で4番目は①が正しくなる。そうすると現在正しい番号は●●④①③で，1番目の⑤は間違いであるから，②⑤④①③が正しくなる。しかしこのとき，2回目が4つエラーになってしまうから，題意と矛盾する。よって，5番目の番号は

②が正しい。これにより，2回目を見ると①，②，③が間違いであるから，2番目は④で3番目は⑤が正しい。現在判明した正しい番号は，●④⑤●②。1番目の①は間違いであるから，正しい番号は③④⑤①②である。

［出題の意図］

論証の問題です。与えられた状況を論理的に分析し，起こりうる可能性を絞り込んでいくことで，結論を導きます。条件から問題の本質を推理する力やそれを正しく示す力を試すという意図で出題しました。

6　整数の範囲で商と余りを考える除法を行う。例えば，7を2で割ったとき，商は3で余りは1である。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。必要があれば，後の【参考】を活用してもよい。

(1)　2020^2を1，2，3，・・・，2020^2のそれぞれの数で割ったとき，商として現れる整数は何種類あるか，求めなさい。

(2)　2^{2020}を1，2，3，・・・，2^{2020}のそれぞれの数で割ったとき，商として現れる整数は何種類あるか，求めなさい。

(3)　自然数mについて，mを1，2，3，・・・，mのそれぞれの数で割ったとき，商として現れる整数は何種類あるか，求めなさい。

【参考】

aを正の実数とするとき，aの整数部分を$[a]$で表す。

例：$[3.5]=3$，$[7]=7$，$[12.96]=12$

［解答例］

(1)　2020^2よりも簡単な数値の場合を調べることにより，この問題の解答を考える準備を行う。例えば，4^2のときを考える。

$16\div1=16$		$16\div9=1$	$\cdots7$
$16\div2=8$		$16\div10=1$	$\cdots6$
$16\div3=5$	$\cdots1$	$16\div11=1$	$\cdots5$
$16\div4=4$		$16\div12=1$	$\cdots4$
$16\div5=3$	$\cdots1$	$16\div13=1$	$\cdots3$
$16\div6=2$	$\cdots4$	$16\div14=1$	$\cdots2$
$16\div7=2$	$\cdots2$	$16\div15=1$	$\cdots1$
$16\div8=2$		$16\div16=1$	

割る数について，4を区切りとして考えると，割る数が4以下のときの商は，16，8，5，4となっており，割る数が4以上のときの商は，1，2，3，4となっている。これらの商と割る数は，それぞれのグループで(16，1)，(8，2)，(5，3)，(4，4)という同じセットになっており，4セットずつある。(4，4)は割る数と商が同じであるから，現れる商の数は，$4\times2-1=7$種類である。

4^2の議論から，一般にm^2の商の種類は$2m-1$であると予想し，これが正しいことを示す。まず，割る数がm以下であるとき，商はすべて異なる数となることがわかる。なぜなら，もし割る数が違うのに商が同じであるとした場合，割る数がm以下であるため，割り算の余りが割る数より大きくなる。これは割り算として正しくないので，矛盾である。したがって，割る数がm以下であるとき，商はすべて異なる数になり，m種類であるといえる。また，割る数がm以上であるときは，m以下のときの割る数と商のセットと同じになり，さらに，mで割ったときの重なった商を引いて，m^2の商の種類は，$m+m-1=2m-1$であることがわかる。

以上より，2020^2を割ったとき，商として現れる整数は，$2020\times2-1=4039$種類である。

(2)　(1)から，$2^{2020}=(2^{1010})^2$と考えることによって，$2^{1010}\times2-1=2^{1011}-1$個である。

(3)　(1)で考えたm^2の商の種類から，自然数mの場合に拡張するために，さらに具体的な例で考える。

(1)で考えた$4^2 = 16$の次の数である17について，1～17のそれぞれの数で割ったときの商を考えると，17，8，5，4，3，2，1の7個であり，同様に次の18，19においても商の個数は7個，次の20，21，22，23，24においては8個，25においては9個となる。ここで，(1)での考察からn^2の商の種類は$2n-1$であり，$(n+1)^2$の商の種類は$2(n+1)-1=2n+1$となる。先ほどの具体例から，n^2と$(n+1)^2$の間では，商の種類は$2n-1$または$2n$である。ここで，n^2と$(n+1)^2$の間の数をmとすると，$n=\left[\sqrt{m}\right]$と表せることに注意する。

商の種類が$2n-1$から$2n$に変化するのは，先ほどの例では20のときであり，割る数と商のペアに(4，5)が現れる20が境目となっていることがわかる。このことを一般化すると，$m=\left[\sqrt{m}\right]\left(\left[\sqrt{m}\right]+1\right)$のとき，商の種類が$2\left[\sqrt{m}\right]$に変化するということになる。

したがって，以上をまとめると次のようになる。

自然数mについて，mを1，2，3，･･･，mのそれぞれの数で割ったとき，商として現れる整数は

(i)　$m<\left[\sqrt{m}\right]\left(\left[\sqrt{m}\right]+1\right)$のとき，$2\left[\sqrt{m}\right]-1$　種類

(ii)　$\left[\sqrt{m}\right]\left(\left[\sqrt{m}\right]+1\right)\leqq m$のとき，$2\left[\sqrt{m}\right]$　種類

となる。

［出題の意図］

考え始めるとすぐに，2020^2という数が大きすぎて，それを思考の対象とすることは難しいことがわかります。そのようなときは，簡単な数についてまず実際に表してみることから始めるとよいでしょう。問題解決における数学的な考え方として，その問いを簡単な問題に変えて対象を観察し，試してみることが大切です。思考したものを可視化することによって，思考の対象として認識することが可能となるからです。具体的に書き出すことで，これから探そうとする何らかの規則性や構造を読みとっていくことができるかもしれません。

また，なぜこのような問題が取り上げられるのか，この問題の本質は何だろうかなどと，その問題の背景や他の事象との関連性を考えることも必要です。それは，既習事項とのつながりを明らかにし，今後の学びの基礎にもなるからです。そうすれば，ただ問題を解くだけに終わらず，スパイラルに探究を深め発展させていくことが可能となります。この問題では，問いの背後にある構造を把握して，本質を追究していく思考を創ることをねらいとして出題しました。