

令和元年度
群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページから3ページまであります。また、解答用紙は4枚あります。
- 2 制限時間は3時間です(13:00~16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 3 解答は、全て解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙には、選択した問題の番号、コンテスト番号、氏名を必ず記入してください。問題番号、コンテスト番号、氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は、採点の対象外となることがあります。
- 5 解答には、必ず途中の考え方などを書いてください。論理性、表現力、アイデアの観点で評価します。正解でなくても、アイデア賞を授与することがあります。
- 6 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。また、必要があれば、電卓を用いることができます。
- 7 コンテスト終了後、解答用紙4枚を全て提出してください。

1 下の図 I，図 II について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，作図に当たっては，問題用紙の上に解答用紙を重ね，図 I や図 II の点を解答用紙に複写した上で，コンパスと定規を用いて作図すること。また，作図に用いた線は消さないこと。

(1) 図 I の 3 点 A，B，C について，この 3 点が頂点以外の各辺に 1 つずつ存在するような正三角形を，次の手順によって作図する。

手順① 線分 AB を 1 辺とする正三角形 ABP' を作図する。ただし点 P' は，直線 AB によって分けられた 2 つの領域のうち，点 C と異なる側にあるものとする。

手順② 手順①で作図した $\triangle ABP'$ の各辺の垂直二等分線の交点を中心とし，3 点 A，B， P' を通る円を作図する。

ここまでの手順を参考にして，3 点 A，B，C が頂点以外の各辺に 1 つずつ存在するような正三角形 PQR を作図するとともに，②以降の作図の手順を示しなさい。また，作図した $\triangle PQR$ が正三角形であることを証明しなさい。

(2) 図 II の 4 点 D，E，F，G について，この 4 点が頂点以外の各辺に 1 つずつ存在するような正方形 STUV を作図するとともに，その作図の手順を示しなさい。また，作図した四角形 STUV が正方形であることを証明しなさい。

図 I

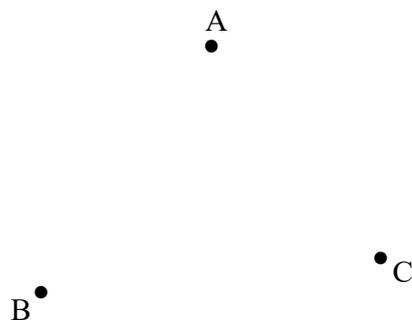
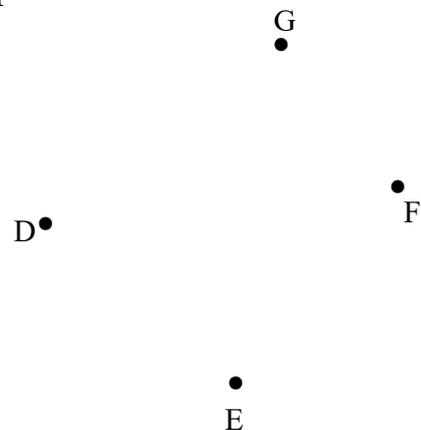


図 II



2 ライバル校との定期戦に向けて，各種目でチーム編成を行う。バスケットボールでは，120 人の生徒によって 1 チーム 10 人で 12 チームをつくる。この 120 人の生徒の中には，ドリブルが得意な生徒，パスが得意な生徒，シュートが得意な生徒がそれぞれ 60 人おり，ドリブルのみが得意な生徒は 15 人，パスのみが得意な生徒は 22 人，シュートのみが得意な生徒は 29 人，ドリブル・パス・シュートの全てが得意な生徒は 6 人いる。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

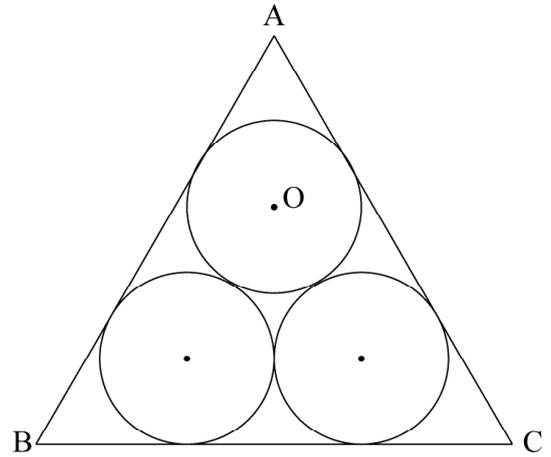
(1) ドリブルとパスの 2 つのみが得意な生徒の人数，パスとシュートの 2 つのみが得意な生徒の人数，シュートとドリブルの 2 つのみが得意な生徒の人数を，それぞれ求めなさい。

(2) ドリブルとパスの 2 つのみが得意な生徒，パスとシュートの 2 つのみが得意な生徒，シュートとドリブルの 2 つのみが得意な生徒をそれぞれ 1 人ずつ集めて「グループ」をつくる。この「グループ」は何組できるか，求めなさい。

(3) 12 チーム全てに，ドリブルが得意な生徒，パスが得意な生徒，シュートが得意な生徒が同じ人数ずついるようにチーム編成できることを証明しなさい。

3 多角形の枠の中に、1円玉を重ねないように並べることを考える。次の(1)~(3)の問いに答えなさい。ただし、1円玉の半径は、1cmである。

- (1) 縦 $3\sqrt{2}$ cm, 横 $5\sqrt{2}$ cm の長方形の枠の中に、16枚の1円玉を重ねないように並べることは可能であるか。理由も含めて答えなさい。
- (2) 図のように、3枚の1円玉が内接する正三角形の枠がある。図に示した円の中心Oと辺BCとの距離を求めなさい。
- (3) 縦4cm, 横1000cmの長方形の枠の中に、1005枚以上の1円玉を重ねないように並べられることを証明しなさい。ただし、 $\sqrt{4\sqrt{3}-3} < 1.982$ とする。

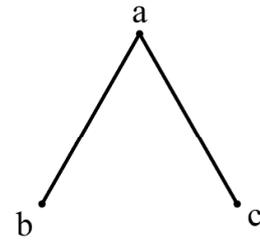


- 4 あるケーキ店では、24日の土曜日を「スペシャルデー」と呼び、商品が3割引となる。特に12月24日の土曜日は「スーパースペシャルデー」と呼び、商品が半額となる。次の(1)~(3)の問いに答えなさい。ただし、「スペシャルデー」は「スーパースペシャルデー」を含むものとする。また、必要があれば、後の【参考】を活用してもよい。
- (1) 2019年において、「スペシャルデー」がある月を全て答えなさい。
- (2) 2019年以降、初めて「スーパースペシャルデー」がある年を西暦で答えなさい。また、その年には12月以外にも「スペシャルデー」はあるか。あればその月を全て答え、ない場合にはその理由を答えなさい。
- (3) 年によって、1年間の「スペシャルデー」の回数は変化する。1年間の「スペシャルデー」の回数、最大値と最小値を求めなさい。

【参考】

- 本日2019年7月23日は、火曜日である。
 - 各月の日数は以下の通りである。
 - ・1月, 3月, 5月, 7月, 8月, 10月, 12月の日数は, 31日である。
 - ・4月, 6月, 9月, 11月の日数は, 30日である。
 - ・2月の日数は28日であるが, うるう年のみ29日である。
 - うるう年になる条件は以下の通りである。
 - ・西暦が4の倍数の年は, うるう年となる。
 - ・西暦が100の倍数の年は, うるう年とならない。ただし, 西暦が400の倍数の年は, うるう年となる。
- (例: 1996年や2000年はうるう年であるが, 1900年はうるう年でない。)

5 いくつかのチームで試合を行う。右の図は、ある3つのチーム a, b, c が行った試合の組み合わせを図で表したものである。この図を参考にして、次の(1), (2)の問いに答えなさい。ただし、同一の試合は2回以上行わないものとする。



※この図は、aとb, aとcは対戦するが、bとcは対戦しないことを表している。

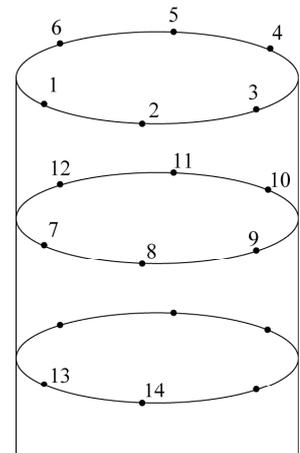
(1) 6つのチーム a, b, c, d, e, f で試合を行ったところ、試合数が次のようになった。この試合の組み合わせを、右の図のように表しなさい。

チーム	a	b	c	d	e	f
試合数	5	4	3	3	2	1

(2) 5つの学校から2チームずつエントリーした10チームと、この5つの学校以外からエントリーした1チームの合計11チームで試合を行った。aとb, cとd, eとf, gとh, iとjをそれぞれ同じ学校のチームとし、この10チーム以外のチームをkとする。次の【条件】を満たすとき、試合数が5となるチームを全て答えなさい。また、その理由も答えなさい。

- 【条件】
- ① 同じ学校のチームどうしは試合を行わない。kはどのチームとも対戦できる。
 - ② k以外の全チームは、試合数が全て異なる数であった。ただし、1度も試合をしないチームもあった。
 - ③ cの試合数は、4であった。

6 上面の半径が1である直円柱において、上面の円周上に等間隔に6つの点をとる。さらに、上面の円と円周上の6つの点を底面の方向に回転させずに平行移動し、長さが1だけ移動するごとに、新たな点を上面と同様に6つずつとる。図のように、それぞれの点について上面から順に



- 1 段目には、1, 2, 3, 4, 5, 6,
- 2 段目には、7, 8, 9, 10, 11, 12,
- 3 段目には、13, 14, …

と各点に番号をつける。次の(1)~(3)の問いに答えなさい。ただし、円柱の高さは十分にあり、点はいくつでもとることができるものとする。

- (1) 次の3つの点を結んでできる三角形の面積を、それぞれ答えなさい。
- ① 3, 5, 11
 - ② 1, 9, 17
- (2) 7, 23の2つの点ともう1つの点を結んでできる三角形のうち、正三角形となるものはあるか。あればもう1つの点を全て求め、正三角形ができないときは、その理由を答えなさい。
- (3) 7, 22の2つの点ともう1つの点を結んでできる三角形のうち、直角三角形となるものはあるか。あればもう1つの点を全て求め、直角三角形ができないときは、その理由を答えなさい。