# 令和元年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

## Ⅰ　概　要

令和元年７月２３日（火）に前橋高校，高崎高校，太田高校，渋川高校の４校を会場として実施し，参加者は５０９名（１９校）であった。数学コンテストは平成１０年度から始められ，今年で２２回目の開催となった。各受賞者数は，最優秀賞１名，優秀賞１３名，奨励賞２３名，アイデア賞５名（昨年は最優秀賞１名，優秀賞５名，奨励賞２６名，アイデア賞９名）の計４２名であった。

コンテストは，例年どおり数学的な発想を問う６題の問題から４題を選択し，３時間で解答する形式で行われ，解答の際には電卓や定規・コンパスの使用を認めている。

今回は，ある大きさの多角形の枠内に１円玉を重ならないように並べる方法を考察する問題や，複数のチームで行う試合の組合せを図示しながら考える問題，さらに，与えられた３点を辺上に持つ正三角形を作図する問題などに取り組んでもらった。また，大問４では，日付と曜日の関係をもとに，あるケーキ店が設定する「スペシャルデー」について数理的に考察する問題を出題した。これらの問題では，まず試行錯誤を十分行うことが重要であり，試行錯誤した中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。コンテスト会場では，参加した生徒たちが問題文の内容について検討を重ねて見通しを立て，イメージをふくらませながら解答に取り組む様子が多く見られた。ほとんどの生徒が３時間の解答時間中，集中して最後まで粘り強く問題に向き合っていた。答案の中には，論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また，正解に至らない答案の中にも，発想のユニークなものが数多く見られた。

本コンテストは，３時間集中して数学の問題を考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど，既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を提供しているものであり，このことは数学のみならず，今後様々な教科を学習していく上でも良い経験になっていると思われる。今後も，本コンテストの特徴を維持しながら更に内容を発展させ，生徒が数学を楽しむ機会となるよう一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

| 学年(中等) | １年(４年) | ２年(５年) | ３年(６年) |
|---|---|---|---|
| 男 | １８２ | １９３ | ２４ |
| 女 | ５９ | ４９ | ２ |
| 計 | ２４１ | ２４２ | ２６ |

合　計　５０９名

※次のページ以降に令和元年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です(13：00 ～ 16：00)。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，全て解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することがあります。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓を用いることができます。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚を全て提出してください。

## Ⅱ　問題及び解答例

**1**　下の図Ⅰ，図Ⅱについて，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，作図に当たっては，問題用紙の上に解答用紙を重ね，図Ⅰや図Ⅱの点を解答用紙に複写した上で，コンパスと定規を用いて作図すること。また，作図に用いた線は消さないこと。

(1)　図Ⅰの 3 点 A，B，C について，この 3 点が頂点以外の各辺に 1 つずつ存在するような正三角形を，次の手順によって作図する。

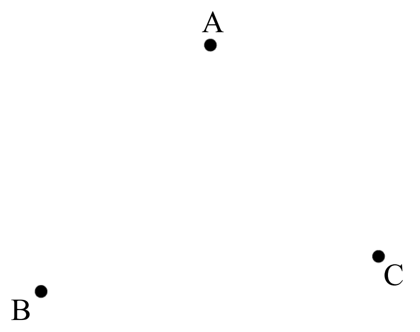
手順①　線分 AB を 1 辺とする正三角形 ABP′を作図する。ただし点 P′は，直線 AB によって分けられた 2 つの領域のうち，点 C と異なる側にあるものとする。

手順②　手順①で作図した△ ABP′の各辺の垂直二等分線の交点を中心とし，3 点 A，B，P′を通る円を作図する。

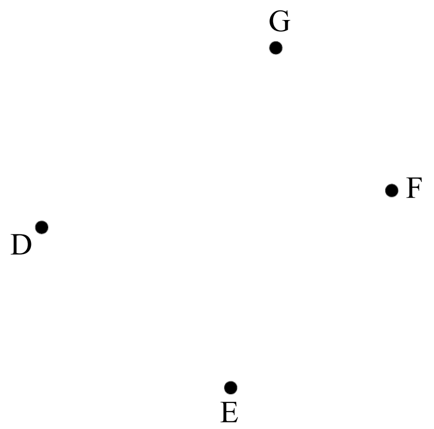
ここまでの手順を参考にして，3 点 A，B，C が頂点以外の各辺に 1 つずつ存在するような正三角形 PQR を作図するとともに，②以降の作図の手順を示しなさい。また，作図した△ PQR が正三角形であることを証明しなさい。

(2)　図Ⅱの 4 点 D，E，F，G について，この 4 点が頂点以外の各辺に 1 つずつ存在するような正方形 STUV を作図するとともに，その作図の手順を示しなさい。また，作図した四角形 STUV が正方形であることを証明しなさい。

図Ⅰ




図Ⅱ




［解答例］

(1)　②以降の作図の手順を示す。

手順③　線分 BC を一辺とする正三角形 BCQ′を作図する。ただし，点 Q′は直線 BC によって分けられた 2 つの領域のうち，点 A と異なる側にあるものとする。

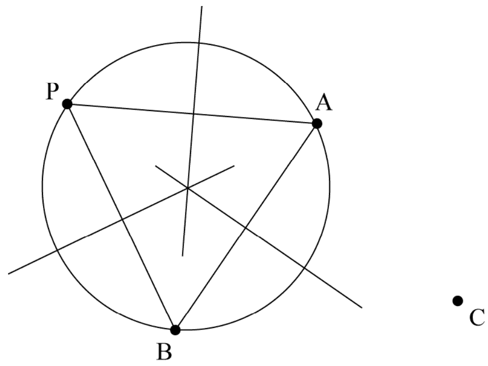
手順④　手順②と同様に，△ BCQ′の外接円を作図する。

手順⑤　点 P′を含む弧 AB 上に任意の点 P をとり，直線 PA，PB を引く。

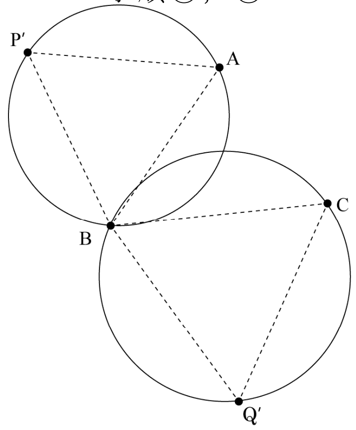
手順⑥　直線 PA と直線 QC　の交点を R とする。

以上の手順で得られる△ PQR が，題意を満たす正三角形 PQR である。

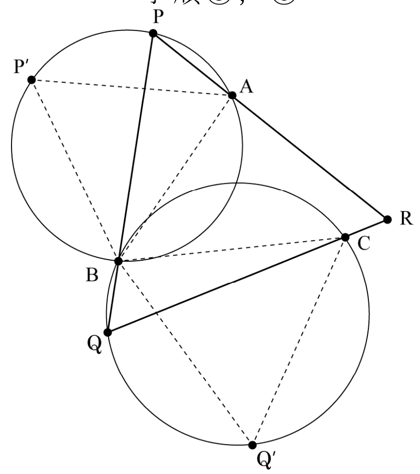
手順①，②まで



手順③，④




手順⑤，⑥




〔証明〕

△ $ABP'$ は正三角形であるから，　$\angle AP'B = 60^\circ$

円周角の定理より，　$\angle AP'B = \angle APB = 60^\circ$

同様に，　$\angle BQ'C = \angle BQC = 60^\circ$

よって△ PQR において，$\angle PRQ = 60^\circ$　となるから，△ PQR は正三角形である。

また，点 P，Q，R のとり方により，点 A，B，C はそれぞれ，辺 PR，PQ，QR 上にあることが分かる。したがって，△ PQR は題意を満たす正三角形であることが示された。

(2)　作図の手順を示す。

手順①　線分 DE を直径の両端とする円 $C_1$，線分 GF を直径の両端とする円 $C_2$ を作図する。

手順②　線分 DE の垂直二等分線と円 $C_1$ との交点のうち，直線 DE によって分けられた 2 つの領域のうち，点 G と同じ側にある点を M とおく。

手順③　線分 GF の垂直二等分線と円 $C_2$ との交点のうち，直線 GF によって分けられた 2 つの領域のうち，点 D と同じ側にある点を N とおく。

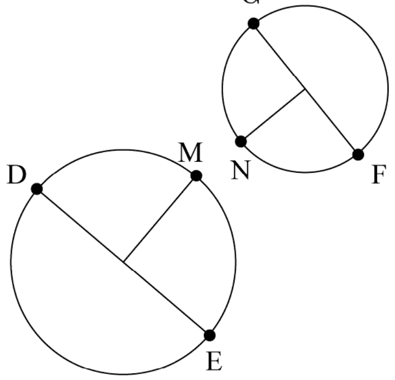
手順④　直線 MN と円 $C_1$ との交点のうち，直線 DE によって分けられた 2 つの領域のうち，点 G と異なる側にある点を T とおく。

手順⑤　直線 MN と円 $C_2$ との交点のうち，直線 GF によって分けられた 2 つの領域のうち，点 D と異なる側にある点を V とおく。

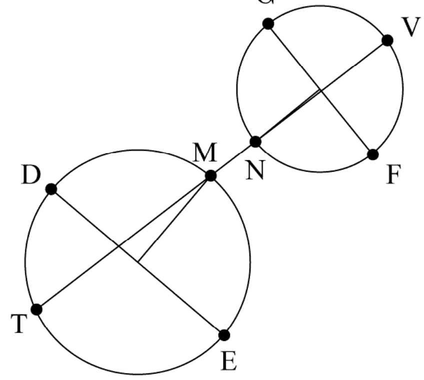
手順⑥　直線 TD と直線 VG の交点を S とし，直線 TE と直線 VF の交点を U とする。

以上の手順で得られる四角形 STUV が，題意を満たす正方形 STUV である。

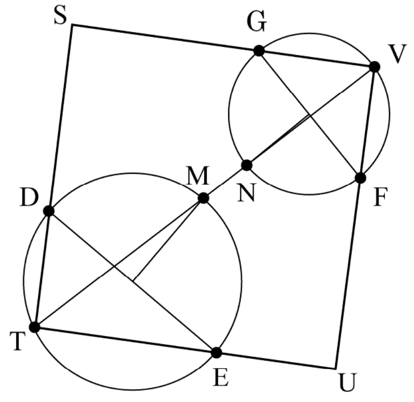
手順①，②，③




手順④，⑤




手順⑥



〔証明〕
直径に対する円周角なので，　∠ DTE ＝∠ GVF ＝ 90°
手順②，③，④，⑤のように点 M，N，T，V をとると，点 M，N はそれぞれ，弧 DE，GF を 2 等分する点であるから，中心角と円周角の関係により，
∠ MTE ＝∠ NVF ＝∠ MTD ＝∠ NVG ＝ 45°
よって，∠ TUV ＝∠ TSV ＝ 90°　となる。
したがって，四角形 STUV は全ての角が 90°であるから長方形であることがわかり，△ TUV と△ TSV は直角二等辺三角形であるから，四角形 STUV は正方形である。

［出題の意図］

条件を満たす正三角形や正方形を作図する問題です。作図に当たっては，正三角形や正方形の持つ図形的な性質を，いかにコンパスと定規で再現するかがポイントとなります。(1)では，どのようにして 60°の角を 3 つ同時に作るかを考える問題であり，(2)では，90°の角を 4 つ作りながら 4 辺の長さを等しくしなければならないという，数学的思考力を必要とする問題でした。特に(2)では，できあがる正方形のイメージを先に固めてから，正方形の持つ様々な性質を踏まえた作図を考えると，解答の糸口がつかめるかもしれません。

［講評］

509 名中 181 名が選択し，2 名が正解しました。

方針が立たないまま作図に取り組んでいる解答もありましたが，多くの解答は円周角の定理や平行線，垂線などを駆使して，(1)，(2)の問題に取り組んでいました。(1)では，自分の作図した図形が正しいと思い込み，論理的な検証が不十分な解答が多く見られました。また，(2)では 4 点 D，E，F，G を通るように垂線をつなげて，4 つの角が 90°の四角形を作り，正方形であるという解答がほとんどでした。図形的な性質を注意深く考え，判断する力が必要であると感じました。

**2**　ライバル校との定期戦に向けて，各種目でチーム編成を行う。バスケットボールでは，120 人の生徒によって 1 チーム 10 人で 12 チームをつくる。この 120 人の生徒の中には，ドリブルが得意な生徒，パスが得意な生徒，シュートが得意な生徒がそれぞれ 60 人おり，ドリブルのみが得意な生徒は 15 人，パスのみが得意な生徒は 22 人，シュートのみが得意な生徒は 29 人，ドリブル・パス・シュートの全てが得意な生徒は 6 人いる。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　ドリブルとパスの 2 つのみが得意な生徒の人数，パスとシュートの 2 つのみが得意な生徒の人数，シュートとドリブルの 2 つのみが得意な生徒の人数を，それぞれ求めなさい。

(2)　ドリブルとパスの 2 つのみが得意な生徒，パスとシュートの 2 つのみが得意な生徒，シュートとドリブルの 2 つのみが得意な生徒をそれぞれ 1 人ずつ集めて「グループ」をつくる。この「グループ」は何組できるか，求めなさい。

(3)　12 チーム全てに，ドリブルが得意な生徒，パスが得意な生徒，シュートが得意な生徒が同じ人数ずついるようにチーム編成できることを証明しなさい。

［解答例］

(1)　ドリブルとパスの 2 つのみが得意な生徒の人数，パスとシュートの 2 つのみが得意な生徒の人数，シュートとドリブルの 2 つのみが得意な生徒の人数をそれぞれ，a，b，c とおくと，条件より

$$\begin{cases} 15 + a + c + 6 = 60 \\ 22 + a + b + 6 = 60 \\ 29 + b + c + 6 = 60 \end{cases}$$

これらを解いて，$a = 23$，$b = 9$，$c = 16$

(2)　(1)より，パスとシュートの 2 つのみが得意な生徒の人数が 9 人で最も少ない。この 9 人をもとに「グループ」をつくるので，「グループ」は 9 組できる。

(3)　まず，(2)のようにして「グループ」を 9 組取り出す。この「グループ」は 1 組 3 人で，ドリブル，パス，シュートが得意な生徒が 2 人ずついる。これを 3[2]と表すことにする。

次に，ドリブルのみが得意な生徒，パスのみが得意な生徒，シュートのみが得意な生徒から 1 人ずつ取り出して「グループ」をつくる。この「グループ」は 1 組 3 人で 15 組でき，ドリブル，パス，シュートが得意な生徒が 1 人ずついる。これを 3[1]と表す。

さらに，パスのみが得意な生徒と，シュートとドリブルの 2 つのみが得意な生徒から 1 人ずつ取り出して「グループ」をつくる。この「グループ」は 1 組 2 人で 7 組でき，ドリブル，パス，シュートが得意な生徒が 1 人ずついる。これを 2[1]と表す。

また，シュートのみが得意な生徒と，ドリブルとパスの 2 つのみが得意な生徒から 1 人ずつ取り出して「グループ」をつくる。この「グループ」は 1 組 2 人で 14 組でき，ドリブル，パス，シュートが得意な生徒が 1 人ずついる。これも 2[1]と表す。

最後に，3 つ全てが得意な生徒を 1 人ずつ「グループ」とすると，この「グループ」は 1 組 1 人で 6 組できる。これを 1[1]と表す。

以上より，3[2]が 9 組，3[1]が 15 組，2[1]が 21 組，1[1]が 6 組できる。これらの「グループ」を利用して，3[2]，3[1]，2[1]，2[1]の組合せで 9 チーム，3[1]，3[1]，2[1]，1[1]，1[1]の組合せで 3 チームつくることによって，全てのチームが 1 チーム 10 人で，ドリブル，パス，シュートが得意な生徒が 5 人ずついるように編成できることが分かる。

［出題の意図］

集合と組分けに関する問題です。それぞれの特徴をもつ生徒の人数を全て確認し，条件を満たすように振り分けるのがポイントです。正確かつシンプルなアイデアで，論理的にその手順を表現できるかどうかを問う問題として出題しました。

［講評］

509 名中 456 名が選択し，45 名が正解しました。

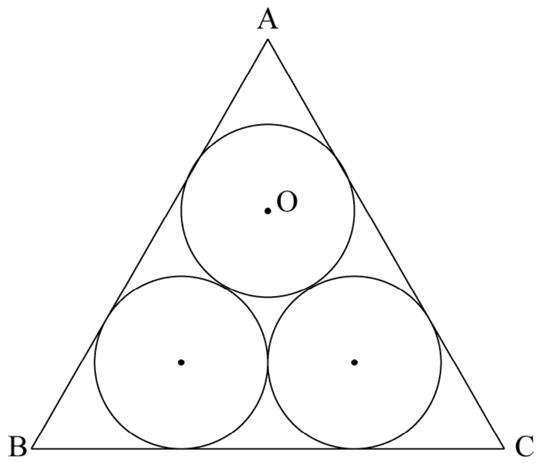
(1)では，図を用いて整理すると状況を把握しやすくなります。(2)では，「グループ」の組合せが何通りできるかを求めた解答についても，今回は正解としました。(3)では，解答者それぞれが独自の視点で編成方法を考えていました。解答例では「グループ」をもとに振り分ける方法を紹介していますが，解答の中には，それ以外の方法で独自の表記や一覧表などを用いて，大変分かりやすく，正確に伝わるよう工夫された解答も見られました。

**3**　多角形の枠の中に，1円玉を重ならないように並べることを考える。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。ただし，1円玉の半径は，1cmである。

(1)　縦 $3\sqrt{2}$ cm，横 $5\sqrt{2}$ cm の長方形の枠の中に，16枚の1円玉を重ならないように並べることは可能であるか。理由も含めて答えなさい。

(2)　図のように，3枚の1円玉が内接する正三角形の枠がある。図に示した円の中心Oと辺BCとの距離を求めなさい。

(3)　縦4cm，横1000cmの長方形の枠の中に，1005枚以上の1円玉を重ならないように並べられることを証明しなさい。ただし，$\sqrt{4\sqrt{3}-3}<1.982$ とする。

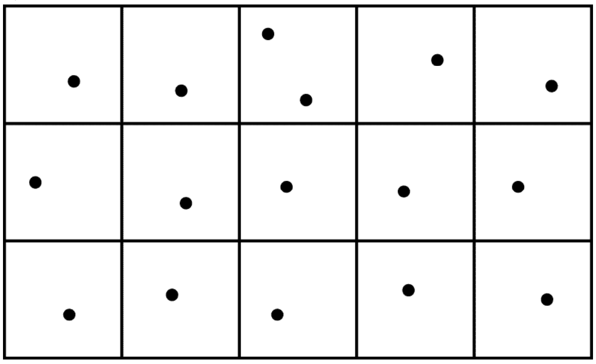



［解答例］

(1)　図Ⅰのように，縦 $3\sqrt{2}$ cm，横 $5\sqrt{2}$ cm の箱は1辺の長さが $\sqrt{2}$ cm の15個の正方形に分割することができる。この15個の正方形の中に16枚の1円玉の中心を入れていくと，中心が2つ入る正方形が少なくとも1つできてしまうことがわかる。

1円玉を重ならないように並べるためには，どの2つの1円玉についても中心間の距離が2cm以上離れていなくてはならないが，図Ⅰの正方形は対角線の長さが2cmであるので，中心が2つ入っている正方形では1円玉が重なってしまうことになる。したがって，16枚の1円玉を重ならないように並べることはできない。

図Ⅰ



(2)　図Ⅱのように，Oから辺BCに垂線を下ろし，垂線の足をD，右下の円の中心をO′，円O′と線分ODの接点をEとする。

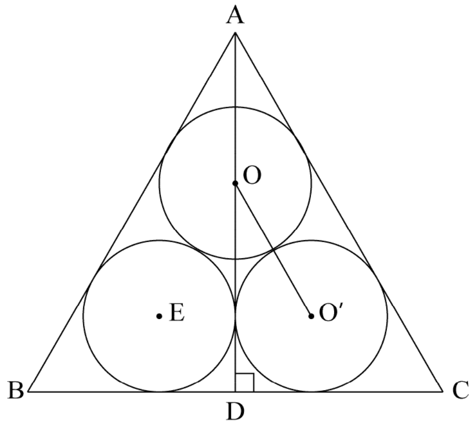
円の半径より　OO′＝2，O′E＝1，ED＝1，

また，O′E ⊥ OE より OE＝$\sqrt{3}$

よって，　OD＝$1+\sqrt{3}$ となる。

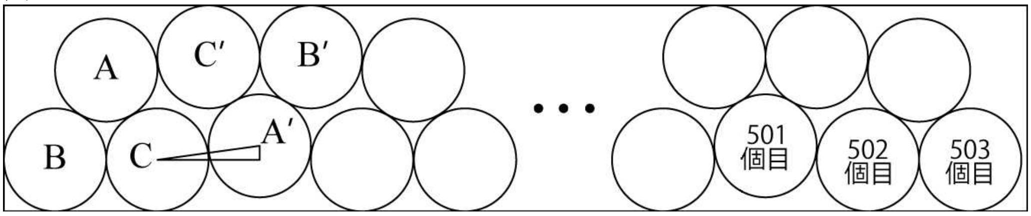
以上より，ODの長さは $1+\sqrt{3}$ （cm）

図Ⅱ

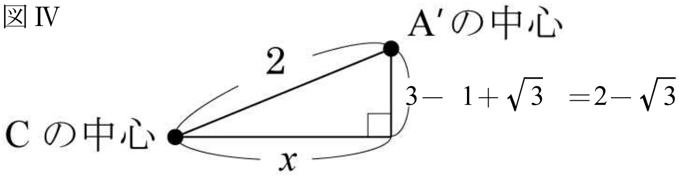


(3)　図Ⅲのように，3 つの円 A，B，C を組にして，この組を上下交互に並べる方法を考える。

図Ⅲ




図Ⅳ




図Ⅳにおいて三平方の定理より $x=\sqrt{4\sqrt{3}-3}<1.982$ となる。

よって，2 － 1.982 ＝ 0.018，0.018 × 2 ＝ 0.036 であるから，図Ⅲの下段で A′のようにずらして並べることにより，揃えて横に並べるよりも，0.036cm 以上「節約」して並べることができる。

図Ⅲの下段で 503 個目まで並べるとき，揃えて並べると横の長さは 1006cm 必要であるが，A′のようにずらした 1 円玉が 501 ÷ 3 ＝ 167 枚あり，これらによって「節約」できた幅は，　0.036 × 167 ＝ 6.012　より，6.012cm 以上あるので，下段に 503 枚並べることが可能である。このとき，上段には 502 枚並んでいることと合わせて考えると，枠の中には少なくとも 1005 枚の 1 円玉を並べることができると分かる。

［出題の意図］

このように隙間なく敷き詰めていく問題は，充填の問題と呼ばれます。円を整列させて長方形の枠の中に並べると無駄なく敷き詰めているように見えますが，実は少しずつずらしながら並べることで，より多くの円を敷き詰めることが可能です。(1)は図形についての見方を確かめる問題，(3)は敷き詰め方の工夫について，(2)をヒントに試行錯誤してもらいたいという意図で出題しました。不可能だと思われたことが少しの工夫で可能になるのは興味深いことではないでしょうか。状況をイメージして，そのイメージに対する数学的な根拠を考えるのが，この問題のポイントです。

［講評］

509 名中 342 名が選択し，4 名が正解しました。

(1)では面積を比較した解答が多く見られました。面積を比較する際には，π の値が与えられていなかったので，工夫が必要となります。解答のように鳩ノ巣原理を用いることで，π を使わずに示すこともできます。(2)はよくできていました。(3)については，1005 という数が 3 の倍数であることを踏まえ，(2)を活用し，少しずつずらす工夫に気付けると，解答が見えてきます。

**4**　あるケーキ店では，24 日の土曜日を「スペシャルデー」と呼び，商品が 3 割引となる。特に 12 月 24 日の土曜日は「スーパースペシャルデー」と呼び，商品が半額となる。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。ただし，「スペシャルデー」は「スーパースペシャルデー」を含むものとする。また，必要があれば，後の【参考】を活用してもよい。

(1)　2019 年において，「スペシャルデー」がある月を全て答えなさい。

(2)　2019 年以降，初めて「スーパースペシャルデー」がある年を西暦で答えなさい。また，その年には 12 月以外にも「スペシャルデー」はあるか。あればその月を全て答え，ない場合にはその理由を答えなさい。

(3)　年によって，1 年間の「スペシャルデー」の回数は変化する。1 年間の「スペシャルデー」の回数の，最大値と最小値を求めなさい。

【参考】
○本日 2019 年 7 月 23 日は，火曜日である。
○各月の日数は以下の通りである。
・1 月，3 月，5 月，7 月，8 月，10 月，12 月の日数は，31 日である。
・4 月，6 月，9 月，11 月の日数は，30 日である。
・2 月の日数は 28 日であるが，うるう年のみ 29 日である。
○うるう年になる条件は以下の通りである。
・西暦が 4 の倍数の年は，うるう年となる。
・西暦が 100 の倍数の年は，うるう年とならない。ただし，西暦が 400 の倍数の年は，うるう年となる。
（例：1996 年や 2000 年はうるう年であるが，1900 年はうるう年でない。）

［解答例］

(1)　7 月 24 日は水曜日である。
その 31 日後の 8 月 24 日は，曜日が後ろに 3 日分ずれるので，土曜日。
その 31 日後の 9 月 24 日は，曜日が後ろに 3 日分ずれるので，火曜日。
その 30 日後の 10 月 24 日は，曜日が後ろに 2 日分ずれるので，木曜日。
その 31 日後の 11 月 24 日は，曜日が後ろに 3 日分ずれるので，日曜日。
その 30 日後の 12 月 24 日は，曜日が後ろに 2 日分ずれるので，火曜日。
6 月 24 日は 7 月 24 日の 30 日前であり，曜日が前に 2 日分ずれるので，月曜日。
その 31 日前の 5 月 24 日は，曜日が前に 3 日分ずれるので，金曜日。
その 30 日前の 4 月 24 日は，曜日が前に 2 日分ずれるので，水曜日。
その 31 日前の 3 月 24 日は，曜日が前に 3 日分ずれるので，日曜日。
その 28 日前の 2 月 24 日は，曜日がずれないので，日曜日。
その 31 日前の 1 月 24 日は，曜日が前に 3 日分ずれるので，木曜日。
以上より，2019 年において「スペシャルデー」がある月は，8 月のみである。

(2)　(1)より，2019 年 12 月 24 日は火曜日である。2020 年はうるう年であるから，2020 年 12 月 24 日はその 366 日後であり，曜日が後ろに 2 日分ずれるので，木曜日。さらにその 365 日後である 2021 年 12 月 24 日は曜日が後ろに 1 日分ずれるので，金曜日。さらにその 365 日後である 2022 年 12 月 24 日は曜日が後ろに 1 日分ずれるので，土曜日となる。また，2022 年は 2019 年と比べ，全ての日の曜日が後ろに 4 日分ずれているので，2022 年では 9 月と 12 月の 24 日のみが土曜日となる。
したがって，(1)より，2019 年以降，初めて「スーパースペシャルデー」がある年は 2022 年であり，12 月以外のスペシャルデーは 9 月のみである。

(3)　24 日が同じ曜日となる月で分類する。曜日を 0 ～ 6 で表し，1 月 24 日の曜日を 0 とする。ある月の日数を 7 で割った余りの分だけ，翌月の 24 日の曜日がずれること

に注意すると，各月の 24 日の曜日は次のようになる。

【1】うるう年でない年の場合

| | 1 月 | 2 月 | 3 月 | 4 月 | 5 月 | 6 月 | 7 月 | 8 月 | 9 月 | 10月 | 11月 | 12月 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日数 | 31 | 28 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 |
| 余り | +3 | 0 | +3 | +2 | +3 | +2 | +3 | +3 | +2 | +3 | +2 | +3 |
| 曜日 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 |

曜日ごとの表

| 曜日 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 月 | 1 月<br>10 月 | 5 月 | 8 月 | 2 月<br>3 月<br>11 月 | 6 月 | 9 月<br>12 月 | 4 月<br>7 月 |

【2】うるう年の場合

| | 1 月 | 2 月 | 3 月 | 4 月 | 5 月 | 6 月 | 7 月 | 8 月 | 9 月 | 10月 | 11月 | 12月 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日数 | 31 | 29 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 |
| 余り | +3 | +1 | +3 | +2 | +3 | +2 | +3 | +3 | +2 | +3 | +2 | +3 |
| 曜日 | 0 | 3 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 |

曜日ごとの表

| 曜日 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 月 | 1 月<br>4 月<br>7 月 | 10 月 | 5 月 | 2 月<br>8 月 | 3 月<br>11 月 | 6 月 | 9 月<br>12 月 |

以上より，【1】，【2】のいずれの場合でも，1 年間の「スペシャルデー」の回数の最大値は 3，最小値は 1 となる。

［出題の意図］

「うるう年」でない場合，2 月と 3 月が同じ曜日の周期となることは，カレンダーを見ればすぐに分かります。実はその他の月でも同じ曜日の周期となるような組合せはいくつかあります。「うるう年」かそうでないかによっても，その組合せは変わってきます。それらを自ら組み立てて考える楽しさを味わってもらいたいと思い，出題しました。

(1)では 1 か月ごとの曜日を，(2)では 1 年ごとの曜日計算とうるう年の処理を計算することで，一般的な曜日の求め方について考えられるよう配慮しました。なお，この問題は「合同式」や「商群」などで考えることができる内容を含んでいます。この問題をきっかけに，参加者の皆さんの数学的な世界が広がれば幸いです。

［講評］

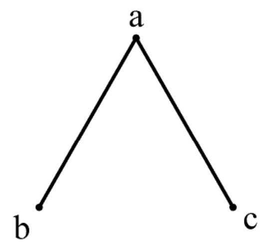
509 名中 378 名が選択し，53 名が正解しました。

(1)は実際にカレンダーを書くか，土曜日となる日を列挙していけば求めることができます。また，1 か月ごとの曜日のずれに気付くことができれば，各月の 24 日の曜日を比較的簡単に求めていくことができます。7 月 24 日から 6 月 24 日，5 月 24 日というように月をさかのぼって計算したために日数を間違えてしまった解答が多く見られました。

(2)では，9 月を答えることができた解答が多くありました。(1)で分かった「12 月と

9月の曜日は同じ」という事実をもとにしたためだと思われます。
(3)では，最大値3，最小値1を答えるとともに，その理由をしっかりと説明できている解答を正解としました。誤答として多かったのは，「説明がない」，「うるう年を考慮していない」，「曜日でグループ分けをしたが，組合せが間違っている」といったものでした。
正解した解答で多かったのは，2019年と2020年をうるう年でない年とうるう年の例として，それぞれの24日の曜日を数えることで，最大値と最小値を求めたものでした。中には，うるう年と，うるう年でない年のそれぞれの場合について，7パターンずつ，計14パターンを求めて考えたものもありました。その他，1月24日の曜日をx曜日として2月24日の曜日を(x ＋ 3)曜日や，アルファベットで一般的に表すなど，表現を工夫している解答も見られました。

**5**　いくつかのチームで試合を行う。右の図は，ある 3 つのチーム a，b，c が行った試合の組み合わせを図で表したものである。この図を参考にして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，同一の試合は 2 回以上行わないものとする。




※この図は，a と b，a と c は対戦するが，b と c は対戦しないことを表している。

(1)　6 つのチーム a，b，c，d，e，f で試合を行ったところ，試合数が次のようになった。この試合の組み合わせを，右の図のように表しなさい。

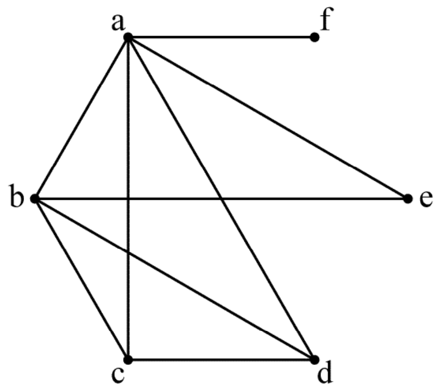
| チーム | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 試合数 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |

(2)　5 つの学校から 2 チームずつエントリーした 10 チームと，この 5 つの学校以外からエントリーした 1 チームの合計 11 チームで試合を行った。a と b，c と d，e と f，g と h，i と j をそれぞれ同じ学校のチームとし，この 10 チーム以外のチームを k とする。次の【条件】を満たすとき，試合数が 5 となるチームを全て答えなさい。また，その理由も答えなさい。

【条件】
①同じ学校のチームどうしは試合を行わない。k はどのチームとも対戦できる。
② k 以外の全チームは，試合数が全て異なる数であった。ただし，1 度も試合をしないチームもあった。
③ c の試合数は，4 であった。

［解答例］

(1)　a の試合数が 5 なので，a は全てのチームと対戦していることが分かる。さらに，b の試合数が 4，f の試合数が 1 であるので，b は f 以外の全てのチームと対戦していることが分かる。ここまでの状況と，c，d の試合数が 3 であることより，c と d が対戦していることが分かる。以上より，図は右のとおり。




(2)　「k 以外の全チームは，試合数が全て異なる。ただし，1 度も試合をしないチームもあった。」という条件より，k 以外の各チームの試合数は 0，1，2，…，9 であることが分かる。

　試合数が n のチームを $T_n$ とすると，$T_9$ は $T_0$ 以外の全てのチームと対戦していることになる。これを示したのが，図 I である。

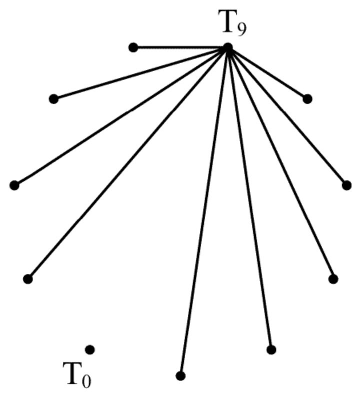
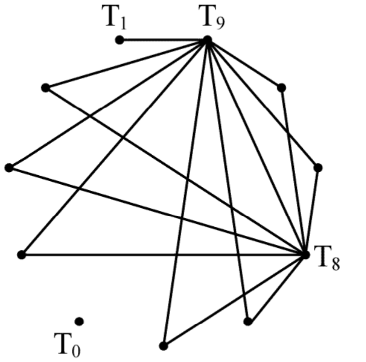
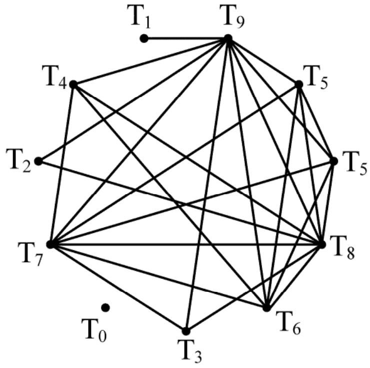



図 I

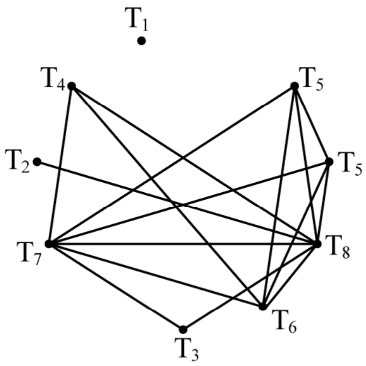
同様に，$T_8$ は $T_0$，$T_1$ 以外の全てのチームと対戦していることが分かり，これを示したのが図Ⅱである。以下，同様に考えると図Ⅲのようになる。



図Ⅱ

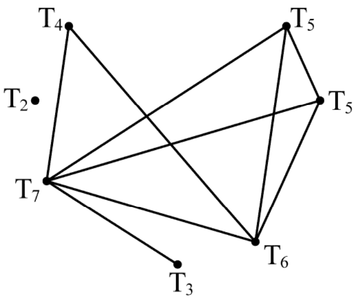


図Ⅲ

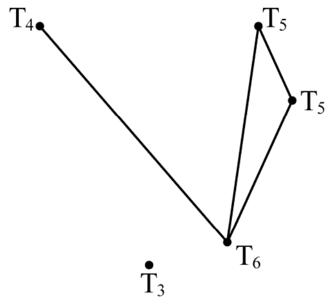


図Ⅳ

また，「同じ学校のチームどうしは試合を行わない。」という条件から，$T_9$ と $T_0$ が同じ学校のチームであることが分かる。また，$T_9$ と $T_0$ を全体から除外して考えると，図Ⅳのように $T_8$ と $T_1$ が同じ学校のチームと分かる。以降，図Ⅴ，図Ⅵのように考えていくと，$T_7$ と $T_2$，$T_6$ と $T_3$ が同じ学校のチームとなる。



図Ⅴ



図Ⅵ

図Ⅶ

最後に図Ⅶのように，$T_4$，$T_5$，$T_5$ 以外を除外して考えると，一方の $T_5$ は $T_4$ と同じ学校のチームであることが分かり，最後に残ったもう一方の $T_5$ が k となる。

ここで，「c の試合数は，4 であった。」という条件から，d の試合数は 5 であることが分かる。したがって，試合数が 5 となるチームは d と k である。

［出題の意図］

与えられた条件から状況を判断し，処理できるかどうかを問う問題でした。解答の際には計算を必要とせず，条件を点と線で整理することで解決できる問題です。このように，頂点と線分で表現した図を「離散グラフ」と呼ぶことがあります。この問題においては，この離散グラフをうまく活用できるかどうかが問われています。

問題文を誤って理解している答案もありましたが，文中にある「全てのチームの試合数が異なる」，「同じ学校のチームは対戦できない」の 2 つの条件をしっかり把握することがポイントでした。

［講評］

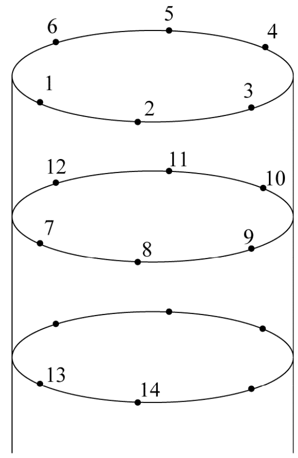
509 名中 430 名が選択し，92 名が正解しました。

(1)では，例にならって図で表すのですが，例のようにアルファベットが重複しないように注意する必要があります。また，(2)では「全てのチームの試合数が異なる」ことから k 以外の試合数が決定し，「同じ学校のチームは対戦できない」ことから同じ学校のチームの組合せが判明することに気付けるかどうかが，正解への第一歩となります。

**6**　上面の半径が 1 である直円柱において，上面の円周上に等間隔に 6 つの点をとる。さらに，上面の円と円周上の 6 つの点を底面の方向に回転させずに平行移動し，長さが 1 だけ移動するごとに，新たな点を上面と同様に 6 つずつとる。図のように，それぞれの点について上面から順に

1 段目には，1，2，3，4，5，6，
2 段目には，7，8，9，10，11，12，
3 段目には，13，14，・・・

と各点に番号をつける。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。
ただし，円柱の高さは十分にあり，点はいくつでもとることができるものとする。




(1)　次の 3 つの点を結んでできる三角形の面積を，それぞれ答えなさい。
　①　3，5，11
　②　1，9，17

(2)　7，23 の 2 つの点ともう 1 つの点を結んでできる三角形のうち，正三角形となるものはあるか。あればもう 1 つの点を全て求め，正三角形ができないときは，その理由を答えなさい。

(3)　7，22 の 2 つの点ともう 1 つの点を結んでできる三角形のうち，直角三角形となるものはあるか。あればもう 1 つの点を全て求め，直角三角形ができないときは，その理由を答えなさい。

［解答例］

(1)　① 3，5，11 を頂点として結んでできる三角形は，5 の頂点を直角とする直角三角形である。3，5 間の距離は $\sqrt{3}$ ，5，11 間の距離は 1 であるから求める面積は，

$$\sqrt{3}\times 1\times \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

② 1，9，17 を頂点として結んでできる三角形は，1，9 間の距離と 9，17 間の距離が等しい二等辺三角形である。1，17 間の距離は $\sqrt{3+2^2}=\sqrt{7}$ ，1，9 間の距離と 9，17 間の距離は $\sqrt{3+1^2}=2$ であるから，この三角形の高さは三平方の定理より，

$$\sqrt{2^2-\ \frac{7}{2}\ ^2}=\frac{3}{2}$$

したがって，求める面積は，　$\sqrt{7}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

(2)　7，23 間の距離は $\sqrt{2^2+\ \sqrt{3}\ ^2}=\sqrt{7}$ であるから，7 または 23 の頂点から $\sqrt{7}$ の距離にある点について考える。

同じ段内での 2 点間の距離は最大で 2 であり，1 段離れた 2 点間の距離の最大値は $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ ，3 段以上離れた 2 点間の距離の最小値は 3 である。

$\sqrt{5}<\sqrt{7}<3$ であるため，2 点間の距離が $\sqrt{7}$ となるためには，2 点が 2 段離れている必要がある。

7 の頂点は 2 段目にあるので，ここから 2 段離れるためには 4 段目に頂点がある必要があり，23 の頂点は 4 段目にあるので，ここから 2 段離れるためには 2 段目または 6 段目に頂点がある必要がある。この条件をともに満たす頂点はないため，題意を満たす正三角形は存在しない。

(3)　① 7 の頂点と 22 の頂点を結んだ線分を斜辺とする直角三角形について考える。
　7，22 間の距離は $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ であるから，もう 1 つの点はこの線分を直径と

する半径$\sqrt{2}$の球上にあることがわかる。7 は 2 段目，22 は 4 段目にあるので，この球の中心は 3 段目の中心にあることがわかる。3 段目の中心から 2 段目，4 段目の各点までの距離は全て$\sqrt{2}$であり，対称性に注意すると，この球上には，7，8，9，10，11，12，19，20，21，22，23，24 の 12 点があり，これ以外の点は存在しない。すなわち求める点は，8，9，10，11，12，19，20，21，23，24 の 10 点である。

② ①の線分以外を斜辺とする直角三角形について考える。

(i) 7 の頂点を直角とする場合

もう 1 つの頂点は，7 の頂点と 22 の頂点を結んだ線分に垂直で，7 の頂点を通る平面上にある。この平面は，2 と 3 の中点と 5 と 6 の中点を通るため，この平面上に求める点は存在しない。

(ii) 22 の頂点を直角とする場合

もう 1 つの頂点は，7 の頂点と 22 の頂点を結んだ線分に垂直で，22 の頂点を通る平面上にある。この平面は，26 と 27 の中点と 29 と 30 の中点及び 31 の頂点を通ることが分かり，ほかの頂点は通らない。したがって，この場合の求める点は 31 である。

以上①，②より，求める点は，8，9，10，11，12，19，20，21，23，24，31 の 11 点である。

［出題の意図］

数の規則性と空間図形に着目した問題です。与えられた円柱のまま考えてもよいのですが，この円柱の内部に正六角柱が含まれていることに気付くと理解が深まります。(2)では「正三角形ができない」が正解ですが，具体的な点を挙げて示すだけではなく，一般的に示すにはどうしたらよいかを工夫することが必要です。(3)は，論理的に説明できるかどうかがポイントです。わかりやすく説明するために，与えられた事象を様々な視点で捉えることが求められる問題でした。

［講評］

509 名中 243 名が選択し，2 名が正解しました。

(1)では正弦定理や余弦定理を用いた解答が多く見られましたが，特に②では計算が複雑になるため，そこでミスをしてしまう解答が多くありました。(2)では 7，23 間の距離を求め，7 または 23 からの距離が$\sqrt{7}$の点を具体的に挙げて説明する解答が多くありました。しかし，挙げた具体例以外に条件を満たす点がないことを示す必要があります。(3)は図をもとに，条件を満たす点を具体的に挙げている答案が多くありました。論理的に答案を書くためには，どの点が直角になるかという場合分けや，解答例のように例えば 7，22 を直径とする球を考えることで，説明がしやすくなると思います。