平成３０年度

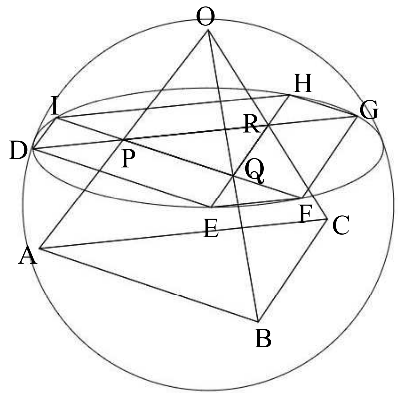
群馬県高校生

数学コンテスト

注　　意　　事　　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，全て解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することがあります。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみ，のり（テープ）を用いることができます。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚を全て提出してください。

1　1辺の長さが $2a$ である正四面体 O-ABC を考える。辺 OA，OB，OC の中点をそれぞれ P，Q，R とし，図のように，直線 PQ，QR，RP と正四面体 O-ABC に外接する球との交点を，D，E，F，G，H，I とする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1)　六角形 DEFGHI の面積は，三角形 ABC の面積の何倍となるか，答えなさい。

(2)　平面 PQR 上の三角形 PQR と六角形 DEFGHI をコンパスと定規を用いて作図しなさい。また，その作図の根拠について説明しなさい。

　ただし，六角形 DEFGHI の外接円を先に作図し，その内部に三角形 PQR と六角形 DEFGHI を作図すること。また，作図に用いた線は消さないこと。

2　以下の【操作】を行ったときに，【操作】の前後で値が変化しないような整数を，カプレカ数という。どのような 3 桁の整数（各桁の数が全て同じ場合は除く）についても，この【操作】を繰り返し行うと，最終的に【操作】の前後で値が変化しなくなり，カプレカ数にたどり着くことが知られている。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

【操作】
各桁の数を並べ替えてできる最大の整数から最小の整数を引いて新しい整数を作る。
（例 1）819 の各桁を並べ替えてできる最大の数は 981，最小の数は 189 なので，
　　$981 - 189 = 792$
（例 2）809 の各桁を並べ替えてできる最大の数は 980，最小の数は 089 つまり 89 なので，$980 - 89 = 891$

※　ただし，【操作】を行ってできた新しい整数の桁数が【操作】の前より小さくなった場合は，全体の数を 10 倍して【操作】の前の桁数にそろえてから，次の【操作】を行うものとする。

（例）565 の場合，$655 - 556 = 99$　となるから，10 倍して 990 とする。

(1)　3 桁のカプレカ数を求めなさい。

(2)　3 桁のカプレカ数は，(1)で求めた整数だけであることを証明しなさい。

(3)　2 桁のカプレカ数が存在すれば，1 つ求めなさい。存在しない場合は，その理由を答えなさい。

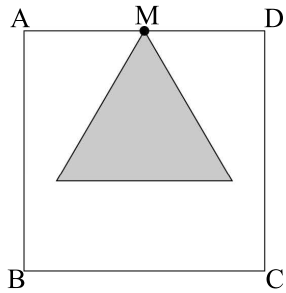
3　1辺の長さが1である正方形の折り紙の上に，正三角形の紙片を置き，この紙片を折ったり切ったりすることなく，折り紙を折ってこの紙片が見えなくなるように完全に包み込みたい。次の(1)，(2)の条件で正三角形の紙片を置くとき，包み込むことのできる最大の正三角形をそれぞれ求め，その1辺の長さと求める過程を答えなさい。

ただし，紙の厚さは考えないものとし，折り紙の頂点をA，B，C，Dとする。必要があれば，配布した折り紙を用いて考察してもよい。

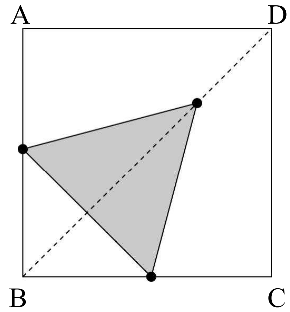
(1)　図Ⅰのように，正三角形の1つの頂点を辺ADの中点Mに置き，その対辺が辺BCと平行となるように置く。

(2)　図Ⅱのように，正三角形の2つの頂点を辺AB，BC上にそれぞれ置き，もう1つの頂点を対角線BD上に置く。

図Ⅰ



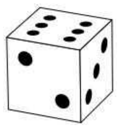
図Ⅱ



4　図Ⅰのように，AからTまでの記号が書かれている20個のマスと，マスの大きさと同じ大きさの面をもつ1個のさいころがある。このさいころは1の面がスタンプになっており，1の目がマスに接地すると，マスに●印が付く。

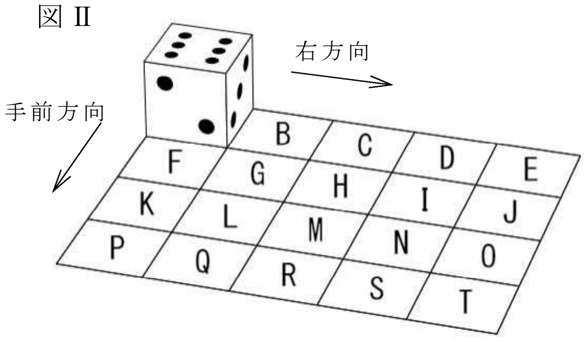
図Ⅱのように，まずAのマスに1の目が接地するようにさいころを置く。このさいころを，マス上ですべらせることなく，右方向または手前方向に倒しながら，AからTまで最短経路で移動させる。このような最短経路のうち，いずれの経路を考えても絶対に●印が付かないマスがある。そのようなマスの記号を，全て答えなさい。また，その理由を説明しなさい。必要があれば，＜別紙＞を用いて考察してもよい。

図Ⅰ

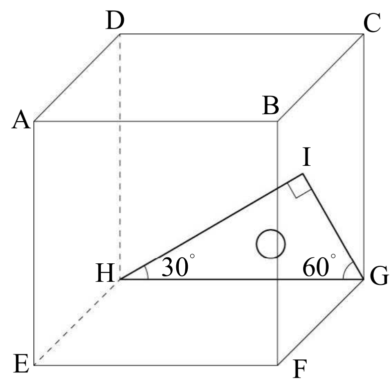


A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T

図Ⅱ



5　斜辺の長さが2で，角度が30°，60°，90°の三角定規がある。右の図のように，三角定規の斜辺を1辺とする立方体ABCD-EFGHをつくる。ここで，三角定規の角のうち直角となる頂点Iは面DHGC上にあるものとする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1)　この立方体から四面体I-HFGを取り出す。この四面体を，辺IFを通り平面HFGに垂直な平面で2つの立体に切断するとき，頂点Hを含む立体の体積を求めなさい。

(2)　(1)の四面体I-HFGの頂点Gを地球の中心に置く。半直線GI，GH，GFと地球の表面との交点をP，Q，Rとする。次の①，②の問いに答えなさい。
　ただし，地球は完全な球体であるとし，半径を6000kmとする。

①　3点P，Q，Rを，地球の表面を通る最短経路でそれぞれ結ぶ。その最短経路PQ，QR，RPで囲まれた部分（地球の表面の一部）の面積を求めなさい。

②　3点P，Q，Rを通る平面で地球を切断すると，その断面は円となる。この円の面積を求めなさい。

6　52枚のカードからn枚を用いて，以下の【ルール】に従って2人でゲームを行う。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

【ルール】

先手と後手を決めて，交互に1枚以上5枚以下のカードを取り続け，最後の1枚を取った方が負けとなる。ただし，カードを取る枚数は，1枚以上5枚以下であれば，その都度自由に変えてよいものとする。

(1)　$n=13$とする。先手がまずカードを2枚取ったとき，後手が勝つためには1回目にカードを何枚取ればよいか答えなさい。

(2)　$n=13$とする。後手の必勝法を示しなさい。またその方法が必勝法である理由を説明しなさい。

(3)　$n=52$とする。先手に必勝法があれば，その方法を示しなさい。必勝法が存在しない場合は，その理由を説明しなさい。

＜別紙＞　※この用紙を切るなどして、解答の参考として用いてもよい。

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T