平成３０年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

今年度の数学コンテストは，７月２４日（火）に前橋高校，高崎高校，太田高校，渋川高校の４校を会場として実施され，参加者は５００名（２５校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは，今年で２１回目の開催となった。各受賞者数は，最優秀賞１名，優秀賞５名，奨励賞２６名，アイデア賞９名（昨年は最優秀賞１名，優秀賞５名，奨励賞１５名，アイデア賞１８名）の計４１名であった。

コンテストの形式は，例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり，今年も電卓やはさみ等の使用が認められた。

今回は，球に内接する正四面体について考察する問題や，正三角形の紙片をある条件の下で折り紙を使って包み込む問題，また，カードを使って２人で対戦するゲームの必勝法を示す問題などに取り組んでもらった。これらの問題では，まず試行錯誤を十分行うことが重要であり，試行錯誤する中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。また，大問４では，さいころを４×５の２０マスの上で転がし，さいころの１の目の面がどのマスと接地し，どのマスと接地しないかについて考察する問題に取り組んでもらった。コンテスト会場では，問題用紙とともに配布した別紙を用いて，実際にサイコロを転がしながら，解答への見通しを立て，イメージをふくらませながら取り組む様子が多く見られた。ほとんどの生徒が解答時間の３時間に集中し，最後まで粘り強く問題に向き合っていた。答案の中には，論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また，正解に至らない答案の中にも，発想のユニークなものが数多く見られた。

本コンテストは，数学の問題を３時間集中して考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど，既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を与えているものであると考えている。このことは，数学のみならず，今後様々な教科を学習していく上で良い経験になっていると思われる。今後も，長年培ってきたコンテストの特徴を維持しながら更に継続・発展させ，生徒が数学を楽しむ機会としてより一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年（中等）	１年（４年）	２年（５年）	３年（６年）
男	１５５	２０５	１８
女	４１	８１	０
計	１９６	２８６	１８

合　計　５００名

※次のページ以降に平成３０年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

１　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
２　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
３　解答は，全て解答用紙に記入してください。
４　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
５　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することがあります。
６　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみ，のり（テープ）を用いることができます。
７　コンテスト終了後，解答用紙４枚を全て提出してください。

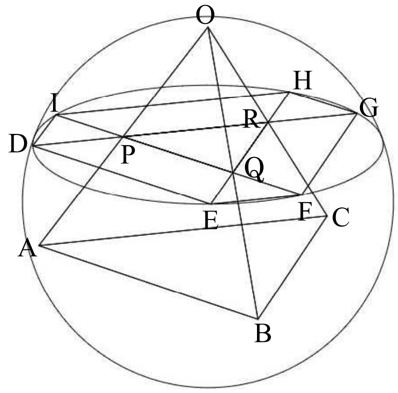
Ⅱ　問題及び解答例

1　1辺の長さが $2a$ である正四面体 O-ABC を考える。辺 OA，OB，OC の中点をそれぞれ P，Q，R とし，図のように，直線 PQ，QR，RP と正四面体 O-ABC に外接する球との交点を，D，E，F，G，H，I とする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　六角形 DEFGHI の面積は，三角形 ABC の面積の何倍となるか，答えなさい。

(2)　平面 PQR 上の三角形 PQR と六角形 DEFGHI をコンパスと定規を用いて作図しなさい。また，その作図の根拠について説明しなさい。

　ただし，六角形 DEFGHI の外接円を先に作図し，その内部に三角形 PQR と六角形 DEFGHI を作図すること。また，作図に用いた線は消さないこと。

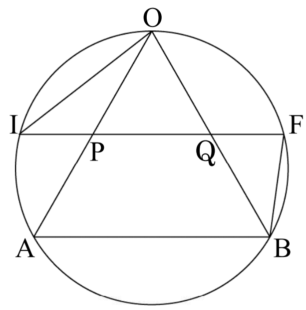


［解答例］

(1)　平面 OAB における断面図を考えて，QF の長さを求める。FB，OI を結び，IP ＝ QF ＝ x とおく。題意より PQ ＝ a となる。また，△ OQI ∽△ FQB より，$a : x = (x + a) : a$

これを計算して，$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

よって，QF ＝ RG ＝ RH ＝ IP ＝ DP ＝ QE ＝ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

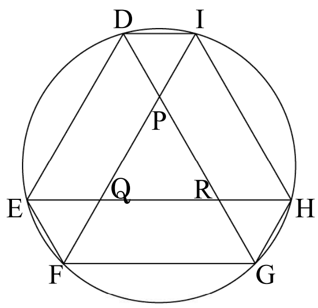


　次に，平面 PQR で切った断面図を考える。△ PQR は正三角形であるから，

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

△ DPI，△ EFQ，△ GHR はいずれも正三角形となるので

$$\triangle \mathrm{DPI} = \triangle \mathrm{EFQ} = \triangle \mathrm{GHR} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{8}a^2$$



$$\triangle \mathrm{PFG} = \left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cdot\triangle \mathrm{PQR}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}a^2$$

$$\text{台形 QFGR} = \triangle \mathrm{PFG} - \triangle \mathrm{PQR} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}a^2$$

よって，六角形 DEFGHI ＝△ PQR ＋△ DPI × 3 ＋台形 QFGR × 3

$$= \frac{7\sqrt{3}}{4}a^2$$

ここで，$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2a=\sqrt{3}\,a^2$

であるから，六角形 DEFGHI の面積は三角形 ABC の面積の $\dfrac{7}{4}$ 倍

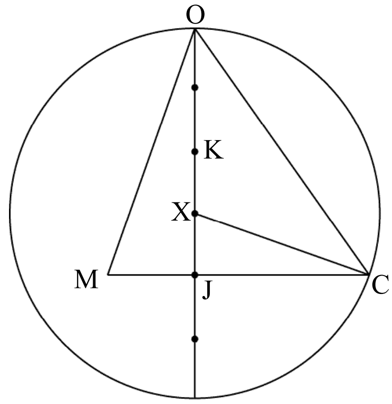
(2)　外接球の中心を X，辺 AB の中点を M とし，△ ABC に点 O から下ろした垂線の足を J とすると，J は△ ABC の重心となる。よって，

$\mathrm{CM} = \sqrt{3}\,a$，$\mathrm{CJ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\mathrm{OJ} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$

また球の半径は，△ CXJ で三平方の定理より，

$(\mathrm{OJ} - r)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = r^2$

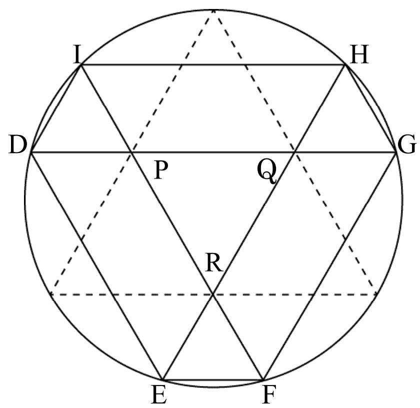


これを解いて，$r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a = \mathrm{OX}$　　よって，OJ : OX = 4 : 3 となる。

また，OJ の中点を K とすると，K は平面 PQR 上の点であるので，XK = XJ より，平面 ABC と平面 PQR は円の中心 X に関して対称である。よって，△ ABC の外接円の半径と，六角形 DEFGHI の外接円の半径は等しいことが分かる。

以上のことから，六角形 DEFG の作図の方法は次の通りである。

まず, 円に内接するように正三角形を作図し，正三角形の中点をとって正三角形 PQR を定める。その各辺の延長と外接円との交点をとれば，六角形 DEFGHI を作図することができる。



［出題の意図］

空間図形の問題です。正四面体の中点 P，Q，R を結んだ直線と，正四面体の外接球との交点が作る六角形を考えます。六角形の外接球の半径が分からないため，まずは IP（= DP = EQ = FQ = GR = HR）の長さを求めましょう。平面 OAB の断面図を考えられると，相似の性質や方べきの定理を使って IP（= QF）の長さを求めることができます。

また，(2)では六角形 DEFGHI を作図するために，図形の位置関係を考えなければなりませんが，球の中心，△ ABC と△ PQR の重心の位置関係を考えることで，△ ABC の外接円の半径と六角形の外接円の半径が等しいことに気付きます。（最初からこれに気付けば，より簡単に面積を求めることもできたでしょう。）様々な角度から図形を見ることや，様々な断面図を考える工夫が必要となる問題でした。

［講評］

500 名中 123 名が選択し，2 名が正解しました。何から求めていけば良いのかが分からず，とりあえず正弦定理や余弦定理を使ってみるといった解答が多く見られました。

六角形の外接円の半径，もしくは IP の長さなどを求めようとした解答は正解に近づくことができていました。また，外接球の中心から平面 PQR と平面 ABC までの距離が等しいことに気付くことができれば，簡単に位置関係や長さ，面積が求まったと思います。日頃から，空間図形の問題を様々な角度から考察する姿勢が求められます。

2 以下の【操作】を行ったときに,【操作】の前後で値が変化しないような整数を，カプレカ数という。どのような 3 桁の整数（各桁の数が全て同じ場合は除く）についても，この【操作】を繰り返し行うと，最終的に【操作】の前後で値が変化しなくなり，カプレカ数にたどり着くことが知られている。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

【操作】

各桁の数を並べ替えてできる最大の整数から最小の整数を引いて新しい整数を作る。

（例 1）819 の各桁を並べ替えてできる最大の数は 981，最小の数は 189 なので，

981 − 189 = 792

（例 2）809 の各桁を並べ替えてできる最大の数は 980，最小の数は 089 つまり 89 なので，980 − 89 = 891

※ ただし，【操作】を行ってできた新しい整数の桁数が【操作】の前より小さくなった場合は，全体の数を 10 倍して【操作】の前の桁数にそろえてから，次の【操作】を行うものとする。

（例）565 の場合，655 − 556 = 99 となるから，10 倍して 990 とする。

(1) 3 桁のカプレカ数を求めなさい。

(2) 3 桁のカプレカ数は，(1)で求めた整数だけであることを証明しなさい。

(3) 2 桁のカプレカ数が存在すれば，1 つ求めなさい。存在しない場合は，その理由を答えなさい。

［解答例］

(1) 215 → 521 − 125 = 396

396 → 963 − 369 = 594

594 → 954 − 459 = 495

495 → 954 − 459 = 495

よって，3 桁のカプレカ数は 495

(2) 3 桁のカプレカ数の各桁の数字を大きい順に並べた数を $100a + 10b + c$ と表す。

ただし，$0 \leqq c \leqq b \leqq a \leqq 9$ であり，a，b，c は全て同じ数ではないとする。

この数に【操作】を行うと，

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$$
$$= 99(a - c)$$

$a - c$ は整数であるから，$99(a - c)$ は 99 の倍数である。

よって，3 桁の整数に対して，【操作】を行うと 99 の倍数が現れる。

ゆえに，カプレカ数の定義より，3 桁のカプレカ数は 99 の倍数である。

ここで，

ⅰ）198 のとき　981 − 189 = 792　より不適

ⅱ）297 のとき　972 − 279 = 693　より不適

ⅲ）396 のとき　963 − 369 = 594　より不適

ⅳ）495 のとき　954 − 459 = 495　よりカプレカ数となる

ⅴ）594 のとき　954 − 459 = 495　より不適

ⅵ）693 のとき　ⅲ）より不適

ⅶ）792 のとき　ⅱ）より不適

ⅷ）891 のとき　ⅰ）より不適

ⅸ）990 のとき　990 − 099 = 891　より不適

したがって，3 桁のカプレカ数は 495 のみである。

(3) 2 桁のカプレカ数の各桁の数字を大きい順に並べた数を $10a+b$ と表す。

ただし，$0 \leqq b < a \leqq 9$ とする。

この数に【操作】を行うと，

$$(10a+b)-(10b+a)=9a-9b$$
$$=9(a-b)$$

$a-b$ は整数であるから，$9(a-b)$ は 9 の倍数である。

よって，2 桁の整数に対して，【操作】を行うと 9 の倍数が現れる。

ゆえに，カプレカ数の定義より，2 桁のカプレカ数が存在するならば，9 の倍数である。

ここで，

ⅰ）18 のとき　$81-18=63$　より不適
ⅱ）27 のとき　$72-27=45$　より不適
ⅲ）36 のとき　$63-36=27$　より不適
ⅳ）45 のとき　$54-45=9$　より不適
ⅴ）54 のとき　ⅳ）より不適
ⅵ）63 のとき　ⅲ）より不適
ⅶ）72 のとき　ⅱ）より不適
ⅷ）81 のとき　ⅰ）より不適
ⅸ）90 のとき　$90-09=81$　より不適

以上より，2 桁の 9 の倍数の中にカプレカ数は存在しない。

したがって，2 桁の整数は【操作】を行うと，例えば

$$39 \to 54 \to 9 \to 81 \to 63 \to 27 \to 45 \to 9 \to 81 \to 63 \to 27 \to 45 \to 9 \to \cdots$$

のように循環してしまうので，2 桁のカプレカ数は存在しない。

［出題の意図］

整数に関する問題です。

整数の世界に存在する不思議な性質を持った整数に触れるための問題です。是非，今後も自主的に，不思議な性質を持つカプレカ数以外のいろいろな数に触れてもらいたいと思います。

(1)は具体的な演算を，(2)と(3)は一般化しての論証と具体的な演算を組み合わせて解く問題でした。例えば，(2) は 3 桁の整数を一般化し，【操作】を行うと，計算結果は必ず 99 の倍数になることが分かります。このことから，カプレカ数の候補を絞り込むことができます。そして，その絞り込んだ整数に対して【操作】を施すことにより証明します。

［講評］

500 名中，396 名が選択し，62 名が完答しました。

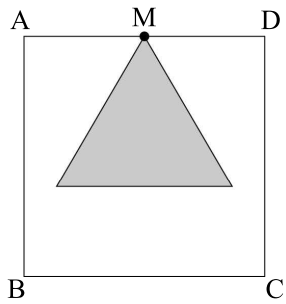
(2)は，3 桁の整数を一般化して証明を進めていきますが，3 桁の整数を 100a+10b+c と表し，a，b，c の大小関係に応じて場合分けしている解答が多く見られました。［解答例］にあるように，各桁の数字を大きい順に並べた数を 100a+10b+c と表して，証明に入った方が証明はすっきりします。また，(2)の証明において(1)における具体的な計算から推測されることを，自明のことのように証明の中で用いている解答が見られました。自明でないことを証明で用いる場合は，それ自体も一般的に成り立つことを示す必要があります。

3　1辺の長さが1である正方形の折り紙の上に，正三角形の紙片を置き，この紙片を折ったり切ったりすることなく，折り紙を折ってこの紙片が見えなくなるように完全に包み込みたい。次の(1)，(2)の条件で正三角形の紙片を置くとき，包み込むことのできる最大の正三角形をそれぞれ求め，その1辺の長さと求める過程を答えなさい。
　ただし，紙の厚さは考えないものとし，折り紙の頂点をA，B，C，Dとする。必要があれば，配布した折り紙を用いて考察してもよい。

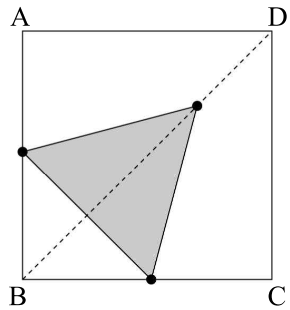
(1)　図Ⅰのように，正三角形の1つの頂点を辺ADの中点Mに置き，その対辺が辺BCと平行となるように置く。

(2)　図Ⅱのように，正三角形の2つの頂点を辺AB，BC上にそれぞれ置き，もう1つの頂点を対角線BD上に置く。

図Ⅰ



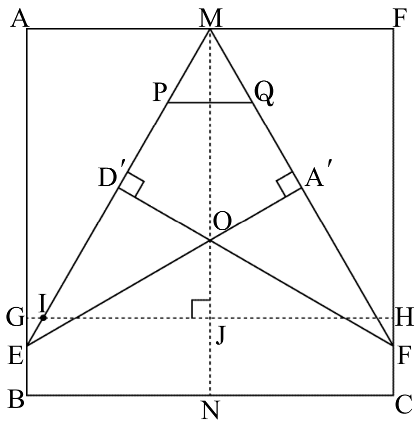
図Ⅱ



［解答例］

(1)　ある正三角形の紙片の頂点を，M，P，Qとし，辺MP，MQの延長と，辺AB，DCとの交点をそれぞれE，Fとすると，紙片は最大で△MEFまで拡大することができる。

　線分ME，MFを折り目として折り紙を折ったときの頂点A，Dの位置をそれぞれA′，D′，線分A′E，D′Fの交点をOとし，辺BCの中点Nが点Oと重なるように折るときの折り目を線分GHとすると，3つの線分ME，MF，GHによって囲まれた三角形が，求める最大の三角形となる。



　線分MEとGHの交点をIとし，MI＝aとおく。

$\mathrm{MA}=\mathrm{MA'}=\dfrac{1}{2}$，△MA′Oにおいて∠OMA′＝30°であるから

$\mathrm{MA'}:\mathrm{MO}=\sqrt{3}:2$　　よって　$\mathrm{MO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

また，線分ONとGHの交点をJとすると，$\mathrm{OJ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{ON}=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{MO})=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

よって，$\mathrm{MJ}=\mathrm{MO}+\mathrm{OJ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$

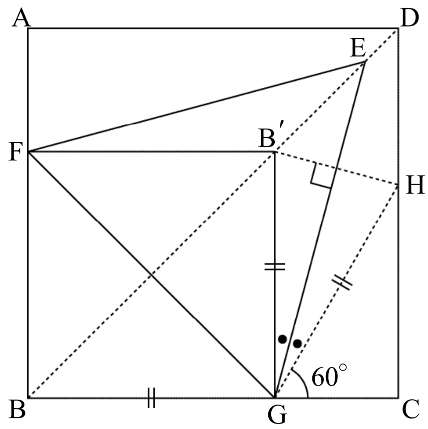
ここで，△MIJにおいて，$\mathrm{MJ}:\mathrm{MI}=\sqrt{3}:2$より

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{MJ}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{3}$$

したがって，折り紙で包み込むことのできる正三角形の1辺の最大値は　$\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

(2)　折り紙で包み込むことができる最大の正三角形を△ EFG とし，線分 FG で折り紙を折った時の頂点 B の位置を B′ とする。線分 EF，EG を折り目として折ったとき，辺 AD，CD はちょうど点 B′ を通る。このとき，辺 CD と点 B′ がちょうど重なる位置を H とすると，△ GB′H は二等辺三角形となる。



FG ＝ b とすると，BG ＝ B′G ＝ HG ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$

∠ B′GE ＝ ∠ FGE － ∠ FGB′ ＝ 60° － 45° ＝ 15°

また，∠ B′GE ＝ ∠ HGE より，∠ HGC ＝ 60°

GC ＝$\dfrac{1}{2}$ GH ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{4}b$

BG ＋ GC ＝ 1　であるから，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}b+\dfrac{\sqrt{2}}{4}b=1$　よって，$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって，折り紙で包み込むことのできる正三角形の 1 辺の最大値は　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

［出題の意図］

日常生活において，「包み込む」という作業は経験があると思いますが，包む物の大きさによって，包装紙を適当なサイズに調整するのが一般的です。しかし，包装紙の大きさが決まっているときに，どこまで大きい物を包めるのかという視点に変えることで，包み方の条件を考えたり，実際に折ってみたり，重なり合った辺や点を図に示したりと試行錯誤が必要になります。さらには，垂直二等分線や，線対称な図形，直角三角形など様々な数学的な要素が現れ，そこから方程式を立てたり，線分の長さを考えたりといった，数学的活動につながっていきます。その面白さを実感してもらいたいと思い，出題しました。

［講評］

500 名中，308 名が選択し，5 名が完答しました。

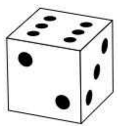
(1)，(2)ともに，紙片を最大にするために，包みこむ過程で折り紙が重なったり，余分にはみ出したりする部分をできるだけ少なくすることを考えられるかがポイントになります。(1)は，折り方の方針を立てられたものの，線分の長さの関係などに着目して条件式を導くところまで至らなかった解答が多く見られました。条件を見いだすために丁寧に図示することも大切です。(2)の方針を立てられた解答は少なかったですが，(1)と同様に，包んだときに折り紙の辺が，ある一点でぴったりと重なることや，折り紙を広げたときに紙片と重なった部分などを図示することで，手がかりがつかみやすくなります。

解答の中には，正三角形の辺や折り目の直線の方程式を導いたり，それらの交点の座標を求めたりといった，座標平面を利用する面白い解法もありました。

4　図Ⅰのように，AからTまでの記号が書かれている20個のマスと，マスの大きさと同じ大きさの面をもつ1個のさいころがある。このさいころは1の面がスタンプになっており，1の目がマスに接地すると，マスに●印が付く。

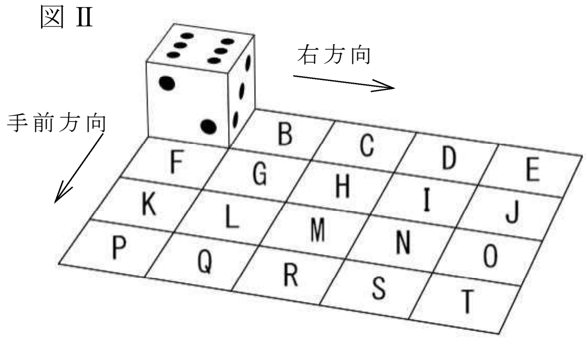
図Ⅱのように，まずAのマスに1の目が接地するようにさいころを置く。このさいころを，マス上ですべらせることなく，右方向または手前方向に倒しながら，AからTまで最短経路で移動させる。このような最短経路のうち，いずれの経路を考えても絶対に●印が付かないマスがある。そのようなマスの記号を，全て答えなさい。また，その理由を説明しなさい。必要があれば，＜別紙＞を用いて考察してもよい。

図Ⅰ



A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T

図Ⅱ



［解答例］

1の目を●，6の目を○で表すことにする。

［1］1の目が接地している状態から次に1の目が接地するまでに，対面の6の目が必ず接地することを示す。

(i) 最初に手前方向（↓）に移動する場合

6の目が手前，1の目が奥に向いている状態となる。その後，右方向（→）に何回移動しても，6の目が手前，1の目が奥に向いている状態は変わらない。さらに，手前方向（↓）に移動すると，必ず6の面が接地する。これを表で示すと右図の表Ⅰの通り。

表Ⅰ

●				
前6奥1	前6奥1	前6奥1	前6奥1	前6奥1
○	○	○	○	○

(ii) 最初に右方向（→）に移動する場合

6の目が右，1の目が左に向いている状態となる。その後，手前方向（↓）に何回移動しても，6の目が右，1の目が左に向いている状態は変わらない。さらに，右方向（→）に移動すると，必ず6の面が接地する。これを表で示すと右図の表Ⅱの通り。

表Ⅱ

●	右6左1	○		
	右6左1	○		
	右6左1	○		
	右6左1	○		

以上により，1の目が接地している状態から次に1の目が接地するまでに，対面の6の目が必ず接地することが示された。

表Ⅰ，表Ⅱをまとめたものが，次の表アである。

表ア　1の目の接地から6の目の接地

●		○		
		○		
○	○	○	○	○
		○		

逆に，6の目が接地した状態から，次に1の目が接地する場所を考えると，表アの●と○を入れ替えることによって次の表イのようになる。

表イ　6の目の接地から1の目の接地

○		●		
		●		
●	●	●	●	●
		●		

［2］表ア，表イを用いて，マスAからの移動を考える。
①マスAに表アの●を重ねて，○となるマスの印を付ける。

A ●	B	C ○	D	E
F	G	H ○	I	J
K ○	L ○	M ○	N ○	O ○
P	Q	R ○	S	T

②さらに，マスCに表イの○を重ねて，●となるマスの印を付ける。

A ●	B	C ○	D	E ●
F	G	H ○	I	J ●
K ○	L ○	M ○ ●	N ○ ●	O ○ ●
P	Q	R ○	S	T ●

③さらに，マスHに表イの○を重ねて，●となるマスの印をつける。

A ●	B	C ○	D	E ●
F	G	H ○	I	J ●
K ○	L ○	M ○●	N ○●	O ○●
P	Q	R ○●	S ●	T ●

④同様に，マスK，Lに表イの○を重ねて，●となるマスの印をつける（変化なし）。

A ●	B	C ○	D	E ●
F	G	H ○	I	J ●
K ○	L ○	M ○●	N ○●	O ○●
P	Q	R ○●	S ●	T ●

以上より，●印が付かないマスは，B,C,D,F,G,H,I,K,L,P,Qの11マスである。

［出題の意図］

身近なさいころを用いて，誰でも取り組める問題としました。さいころを作って，とにかく転がしてみることで，その転がす過程から規則性を発見したり，結果から逆算して答えを求めたりしてもらいたいと思い，出題しました。今回，さいころが転がる最短経路は全部で35通りです。全ての経路を試すことができるように5×4の20マスとしました。「印が付かないマスを答えよ」としたのは，印が付く理由を述べるよりも印が付かない理由を述べるほうが難しいからです。未知の問題に出会ったときに，自分で試行錯誤することで解決の糸口を見つけてもらいたいという願いを込めて今回の問題を出題しました。

［講評］

500人中431人がこの問題を選択をしました。印が付かないマスを正しく答えられた人は213人（49.4%）でしたが，理由まで正しく答えられた人は36人（8.4 %）でした。印のついたマスは正しいけれど，理由が不十分だった人の多くは，「印が付いてしまうマスについて何も述べていない」，「I，Qについての説明が不十分であった」の2つでした。完答者の考え方は，「Aからの移動回数に着目したもの」が最も多く，「35通り全てを調べたもの」が次に多かったです。また，「移動方向と1の目の向きに着目する」ものや，6の目の接地（1の目が上になるとき）に着目する」といった，すばらしいアイデアもありました。

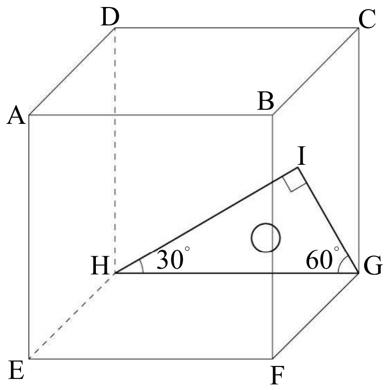
5　斜辺の長さが2で，角度が30°，60°，90°の三角定規がある。右の図のように，三角定規の斜辺を1辺とする立方体 ABCD-EFGH をつくる。ここで，三角定規の角のうち直角となる頂点 I は面 DHGC 上にあるものとする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　この立方体から四面体 I-HFG を取り出す。この四面体を，辺 IF を通り平面 HFG に垂直な平面で2つの立体に切断するとき，頂点 H を含む立体の体積を求めなさい。

(2)　(1)の四面体 I-HFG の頂点 G を地球の中心に置く。半直線 GI，GH，GF と地球の表面との交点を P，Q，R とする。次の①，②の問いに答えなさい。
　ただし，地球は完全な球体であるとし，半径を 6000km とする。

①　3点 P，Q，R を，地球の表面を通る最短経路でそれぞれ結ぶ。その最短経路 PQ，QR，RP で囲まれた部分（地球の表面の一部）の面積を求めなさい。

②　3点 P，Q，R を通る平面で地球を切断すると，その断面は円となる。この円の面積を求めなさい。



［解答例］

(1)　I から平面 HFG に下ろした垂線と，辺 HG との交点を J とする。四面体 I-HFG の体積は

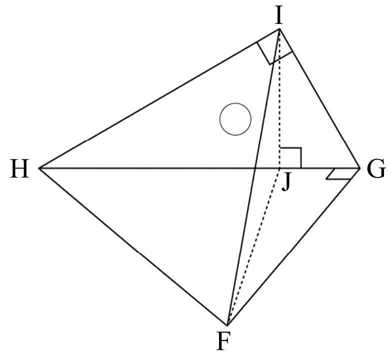
$$\frac{1}{2}\times 1\times \sqrt{3}\times 2\times \frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

また，$HJ=\sqrt{3}IJ$，$IJ=\sqrt{3}JG$ であるから

$HJ=3JG$　すなわち，$HJ:JG=3:1$

よって，H を含む四面体の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$



(2)①　球の表面積を分割して考える。

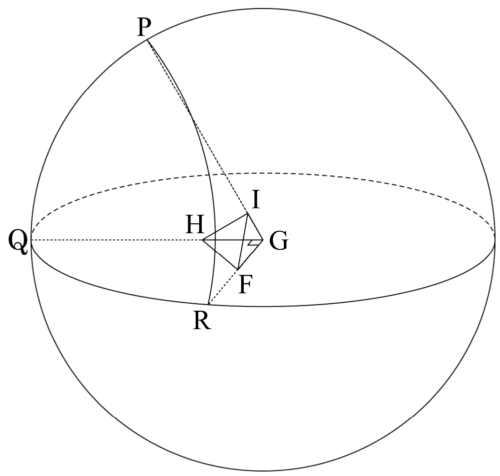
平面 OPQ ⊥ 平面 OQR，$\angle QOR=90^\circ$，$\angle POQ=60^\circ$ であるから求める面積は

$$(\text{球の表面積})\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}$$　となるから

$$4\pi(6\times 10^3)^2\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}=12\times 10^6\pi$$

したがって，求める面積は

$12\times 10^6\pi$　km^2



②　全ての球はそれぞれ相似であり，全ての円もそれぞれ相似である。
ここで，GF = GH = 2km として考えることにする。

Gを中心とし，H，Fを通る半径2kmの球面を考える。この球面と半直線GIとの交点をI'とする。P，Q，Rを通る円と，I'，H，Fを通る円は相似であり

$GP : GI' = 6000 : 2 = 3000 : 1$　なので

（P，Q，Rを通る円の面積）:（I'，H，Fを通る円の面積）$= 9000000 : 1$　である。

ここで，$GI' = 2$（球の半径）であるから，$\triangle GI'H$は一辺の長さが2の正三角形となる。また，$GI' \perp GF$なので$I'F = 2\sqrt{2}$ である。また，$HF = 2\sqrt{2}$ なので$\triangle I'HF$は二等辺三角形であることが分かる。

Fから辺$I'H$に下ろした垂線と$I'H$との交点をS，$I'F$の中点をM，$\triangle I'HF$の外接円の中心をO，半径をrとする。$FM = \sqrt{2}$，$I'S = 1$，$\triangle FMO \backsim \triangle FSI'$より

$$(r+\sqrt{r^2-1}) : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : r$$

これを解いて

$$r = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

よって求める面積は，$\pi\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)^2 \times 9000000 = \dfrac{144}{7} \times 10^6\pi$

以上より，求める切断面の円の面積は，$\dfrac{144}{7} \times 10^6\pi$　km^2

［出題の意図］

空間図形からの出題です。底面と側面の一つが有名角（三角定規の角）からなる三角形である四面体を用いた問題です。立体に対する直感的なイメージとその根拠を考えることができるか見ることを目的としました。(1)については，四面体の体積を求める問題で，底面と高さをどのように考えるかを見る問題です。(2)①は球面上の最短経路で囲まれた部分の面積を求めるために，球面上の面積が何に依存しているかを分析する問題です。球面上に射影された図形の面積というのは数学の球面多角形だけでなく物理学でも使う考え方（立体角など）です。今回の問題は分割することにより面積を求めるという問題です。②について，球はどのように切断しても切断面は円になります。切断面の円に内接する三角形を利用して円の面積を求めます。切断面を正確にイメージできるかを見る問題です。

［講評］

500名中，259名が選択し，11名が完答しました。

(1)は選択者の約半数が正解していました。立方体の性質をうまく利用できていたと思います。(2)①は$\angle PGQ$と$\angle QGR$に着目すると最短経路で囲まれた部分が球面をどのように分割したものかが見えてきます。②は切断面にできあがる三角形PQRがどのような三角形になるかを立方体の底面と側面の関係を根拠にイメージできると良かったと思います。円の半径に関しては相似や三平方の定理をうまく利用できると良かったと思います。また，半径が大きいので，相似な球を利用できると計算しやすくなると思います。

6　52 枚のカードから n 枚を用いて，以下の【ルール】に従って 2 人でゲームを行う。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

【ルール】

先手と後手を決めて，交互に 1 枚以上 5 枚以下のカードを取り続け，最後の 1 枚を取った方が負けとなる。ただし，カードを取る枚数は，1 枚以上 5 枚以下であれば，その都度自由に変えてよいものとする。

(1)　$n = 13$ とする。先手がまずカードを 2 枚取ったとき，後手が勝つためには 1 回目にカードを何枚取ればよいか答えなさい。

(2)　$n = 13$ とする。後手の必勝法を示しなさい。またその方法が必勝法である理由を説明しなさい。

(3)　$n = 52$ とする。先手に必勝法があれば，その方法を示しなさい。必勝法が存在しない場合は，その理由を説明しなさい。

［解答例］

(1)　4 枚取ればよい。

(2)　先手がカードを x 枚（$1 \leqq x \leqq 5$）取ったとすると，残りのカードの枚数は$(13 - x)$枚となる。そこで，後手は$(6 - x)$枚のカードを取ることによって，残りのカードの枚数は 7 枚となる。

その後，先手がカードを y 枚（$1 \leqq y \leqq 5$）取ったとすると，残りのカードの枚数は$(7 - y)$枚となる。そこで，後手は$(6 - y)$枚取ることによって，残りのカードの枚数は 1 枚となり，後手が勝利できる。

したがって，後手は｛6 －(直前に先手が取ったカードの枚数)｝枚を繰り返し取ることが必勝法であることが示された。

(3)　先手に必勝法が存在するので，その方法を示す。

(2)より，$n = 13$ からカードの枚数を 6 の倍数だけ増やしても，後手は(2)の手順を用いて必ず勝つことができる。したがって，k を自然数として，$n = 6k + 1$ のとき，後手に必勝法があることが分かる。

いま $n = 52$ であり，$n \leqq 52$ を満たす $n(= 6k + 1)$の最大値は $n = 49$ であるから，先手はまず 3 枚取って残りのカードの枚数を 49 枚にする。その後は，(2)の手順，すなわち，｛6 －(直前に後手が取ったカードの枚数)｝枚を繰り返し取ることが，先手の必勝法である。

［出題の意図］

カードを引いていく単純なルールのゲームを扱った整数の問題です。互いに取れるカードの枚数が 1 枚以上 5 枚以下と決まっているため，相手に最後の 1 枚を取らせるためには，6 の倍数を利用することに気付けるかどうかがポイントでした。実際に，家族や友達と試してもらうために，トランプの枚数である 52 枚での問題にしました。

［講評］

500 名中，449 名が選択し，63 名が完答しました。

「残り枚数を 7 枚にすれば必勝である」という解答が多く見られましたが，具体的な手段とは言えません。また，カードの絵を描いて 6 枚ずつのグループに分ける方法で考察している解答や，樹形図を用いた解答など様々なアイデアが見られました。

シンプルにまとめれたものから，カードを引いていく過程を全て記述しているものもありました。解答として整理されたものを正解としました。