令和６年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　意　事　項

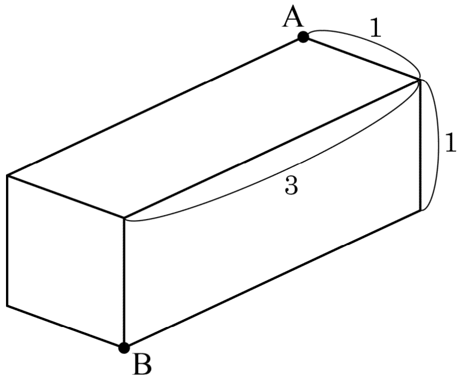
1　問題は，１ページから６ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，該当の問題番号が示された解答用紙に記入し，コンテスト終了後は，解答用紙を必ず４枚提出してください（残りの解答用紙は持ち帰ってください）。
4　解答用紙には，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていないものは，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，途中の考え方などを簡潔・明瞭・的確に書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても賞を授与することがあります。
6　必要があれば，定規，コンパス，電卓を用いることができます。

1　右の図のような直方体において，頂点Ａから直方体の表面上のある点まで，表面のみを移動して到達するときの最短経路（直方体の表面を通る最短の道のり）を考える。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

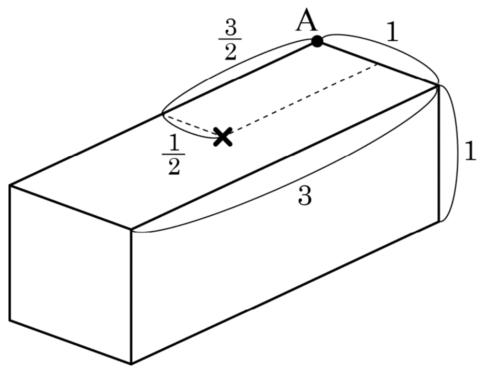
(1)　頂点Ａから頂点Ｂまで最短経路で移動するとき，その経路の長さを求めなさい。

(2)　この直方体の表面上で，頂点Ａから到達するための最短経路が最も遠くなる点は，頂点Ｂ以外の点である。その点の位置を，次の<解答例>にならって図示するとともに，頂点Ａからその点までの最短経路の長さを求めなさい。

　ただし，解答を求める過程についても書くこと。



<解答例>



2　次の図のように，１から小さい順に自然数が１つずつ書かれたカードが横一列に並んでいる。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \cdots\cdots$

(1)　カードの列に対して，次の【操作Ａ】を行う。

> 【操作Ａ】
> 列の左から１番目と２番目の２枚のカードを取り除く。取り除いた後，列の１番左にある１枚のカードを，列の１番右に移す。

１から29まで並んだ29枚のカードの列に対して【操作Ａ】を繰り返し行ったとき，最後に残る１枚のカードに書かれた自然数を求めなさい。

（【操作Ａ】を１回行ったとき）

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \cdots\cdots\ \boxed{29}$

$\downarrow$

$\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \cdots\cdots\ \boxed{29}\ \boxed{3}$

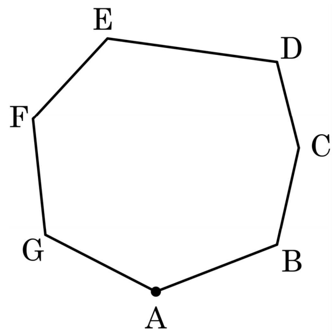
(2)　カードの列に対して，次の【操作Ｂ】を行う。

> 【操作Ｂ】
> 列の１番左から n 番目までの n 枚のカードを取り除く。取り除いた後，列の１番左にある１枚のカードを，列の１番右に移す。ただし，残ったカードが，n 枚より少なくなった時点で操作をやめる。

１から725まで並んだ725枚のカードの列に対して【操作Ｂ】を繰り返し行ったところ，最後に１枚だけカードが残り，そのカードに書かれた自然数は125であった。このような状況となる n を，すべて求めなさい。

3　右の図の七角形について，頂点Ａを通り，この七角形の面積を二等分するような１本の直線を作図したい。この直線を作図する手順を示しなさい。

　ただし，この作図の過程では，次の【使える作図】のみを用いるものとする。また，作図の手順については<解答例>のように示すこととし，必要に応じて，定規やコンパスを用いた作図を使って説明してもよいものとする。



【使える作図】

- ２点Ｐ，Ｑを通る直線ＰＱ（または線分ＰＱ）の作図
- 線分ＰＱを延長する作図
- ２直線 l，m の交点Ｐの作図
- ∠Ｐの二等分線の作図
- 線分ＰＱの垂直二等分線の作図
- 直線 l 上にない点Ｐを通り，直線 l に垂直な直線の作図
- 直線 l 上にない点Ｐを通り，直線 l に平行な直線の作図

<解答例>

①２点Ｃ，Ｅを通る直線ＣＥを引く。
②２点Ｄ，Ｇを通る直線ＤＧを引く。
③直線ＣＥと直線ＤＧの交点をＨとする。

・
・
・

4

$$\frac{4\cancel{0}}{\cancel{0}8}=\frac{4}{8}\quad\left(=\frac{1}{2}\right)$$

このように，分母と分子に共通する数字を消して新しい分数をつくることを「誤約分」と呼ぶこととし，次のように定義する。

「誤約分」の定義

分母と分子がともに２桁の整数で，分母の十の位と分子の一の位が同じ数である分数に対して，この２つの数を消して，分母と分子がともに１桁の整数である分数をつくることを誤約分という。

上記の例では，誤約分した結果の値がもとの分数の値と一致しているので，この状況を「誤約分の成功」と表すこととする。このような「誤約分の成功」が起こる分数のうち，値が１より小さいものをすべて求めなさい。

5　総当たりのリーグ戦を行うスポーツでは，勝ち，引き分け，負けの数に応じて順位付けを行う「勝ち点制度」を採用している。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

ただし，勝ち点の合計が同じ場合には，同じ順位を付けるものとする。

(1)　勝ちの場合には２点，引き分けの場合には１点，負けの場合は０点の勝ち点を与えるルールで，Ａ～Ｅの５チームによるリーグ戦を行った。右の表は，チームＡの結果のみが示されたものである。

表から，チームＡは，ＢとＣの２チームに勝ち，ＤとＥの２チームに負けたことが分かる。また，表には示されていないが，Ａ以外のすべてのチームはそれぞれ１勝しかできなかったものの，優勝したのはチームＥだったという。このような状況となる試合結果を，解答用紙の表に示しなさい。

ただし，引き分けは△で表すこと。

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×				
C	×				
D	○				
E	○				

※チームＡは，ＢとＣの２チームに勝ち，ＤとＥの２チームに負けたことを示している。引き分けは△で表すこととする。

(2)　勝ちの場合には３点，引き分けの場合には１点，負けの場合は０点の勝ち点を与えるルールで，いくつかのチームによるリーグ戦を行った。その結果，他のどのチームよりも勝利数が少ないあるチームが勝ち点の合計で１位となり，単独優勝したという。

このような状況が成り立つような最小のチーム数を求め，そのリーグ戦の結果を(1)のような表で表しなさい。また，解答を求める過程も示しなさい。

ただし，必要があれば，次の【参考】を活用してもよい。

【参考】

nチームが参加するリーグ戦の合計試合数は，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 試合である。

6　異なる自然数をいくつか選び，次の《条件》を満たすような自然数の組を作りたい。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

《条件》

作った組に含まれる自然数のうち，どの２数を選んでも，その和がすべて異なる値となる。
ただし，２数の和が100以上のときは下２桁の数を値とし，「107」のように，和の十の位が０となる場合は，下１桁の数である「７」を値として考えるものとする。

（例）３，５，６，４という４つの自然数の組は，３と６の和が９となり，５と４の和も９となるため《条件》を満たさないが，５，６，４，８という４つの自然数の組は，どの２数の和もすべて異なる値となるため《条件》を満たしている。

(1)　１から20までの自然数の中から６個の異なる自然数を選び，《条件》を満たすような組を作りなさい。

(2)　１から100までの自然数の中から異なる自然数を選んで《条件》を満たすような組を作ろうとしたとき，15個以上の自然数を含む組は作れないことを示しなさい。
なお，必要があれば，次の【参考】を活用してもよい。

【参考】

異なるn個の中から２個を選ぶ選び方の総数は，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りである。

(3)　１から100までの自然数の中から異なる自然数をできるだけ多く選び，《条件》を満たすような組を作りなさい。
なお，この問題については，自然数をより多く選ぶことができた解答を高く評価するものとする。