令和６年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

令和６年度群馬県高校生数学コンテストは，７月２５日（木）に，参加を希望する生徒が在籍する学校（県内２３校）において実施し，参加者数は４７７名であった。令和３年度から，集合会場でのコンテストは実施せず，より多くの生徒が安心してコンテストに参加できるよう，各参加者が在籍する高校で実施する形式としている。

コンテストは平成１０年度から始められ，今年度で２７回目の開催となった。各受賞者数は，最優秀賞１名，優秀賞１１名，始動人アイデア賞１２名，奨励賞１６名（昨年度は最優秀賞１名，優秀賞９名，始動人アイデア賞１３名，奨励賞１９名）の計４０名であった。

コンテストは，例年どおり数学的な発想を問う６題の問題から４題を選択し，３時間で解答する形式で行われ，解答の際には定規，コンパス，電卓の使用を認めている。

群馬県では，教育イノベーションの一環として，ＳＴＥＡＭ教育の実践を推進しており，この数学コンテストもＳＴＥＡＭ教育推進に関する行事として実施している。コンテスト問題では，この観点を踏まえ，実社会との関連を意識した問題や，身近な事象について数理的に考察する問題を出題した。これらの問題の解決を通して，新しい社会を切り拓くための創造性の基礎を養うきっかけとなればと考えている。答案の中には，論理的に整理された素晴らしいものも見られた。また，正解に至らない答案の中にも，発想のユニークなものが数多く見られた。

本コンテストは，３時間集中して数学の問題を考えたり，学年を越えて同じ問題に取り組んだりするなど，既存の学習の枠組みを超えた貴重な機会を提供しているものと考える。このことは，数学のみならず，今後様々な教科を学習したり教科横断の探究的な学習を進めたりしていく上でも良い経験になっていると思われる。今後も，本コンテストの特徴を維持しながら更に内容を発展させ，生徒が数学を楽しむ機会となるよう一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年（中等）	１年（４年）	２年（５年）	３年（６年）
参加生徒数	２００	２６６	１１

合　計　４７７名

※次のページ以降に令和６年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから６ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，該当の問題番号が示された解答用紙に記入し，コンテスト終了後は，解答用紙を必ず４枚提出してください（残りの解答用紙は持ち帰ってください）。
4　解答用紙には，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていないものは，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，途中の考え方などを簡潔・明瞭・的確に書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても賞を授与することがあります。
6　必要があれば，定規，コンパス，電卓を用いることができます。

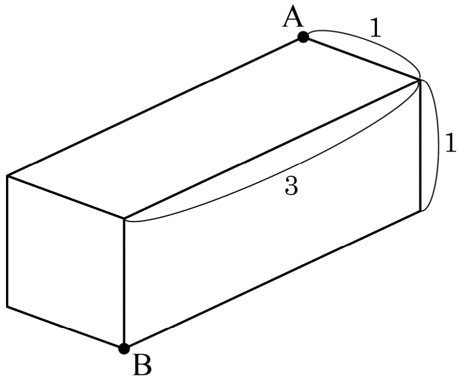
Ⅱ　問題及び解答例

1　右の図のような直方体において，頂点Ａから直方体の表面上のある点まで，表面のみを移動して到達するときの最短経路（直方体の表面を通る最短の道のり）を考える。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

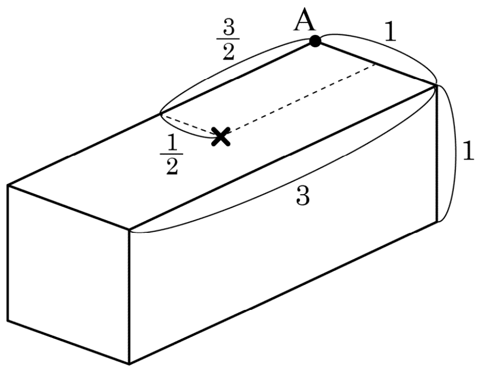
(1)　頂点Ａから頂点Ｂまで最短経路で移動するとき，その経路の長さを求めなさい。

(2)　この直方体の表面上で，頂点Ａから到達するための最短経路が最も遠くなる点は，頂点Ｂ以外の点である。その点の位置を，次の＜解答例＞にならって図示するとともに，頂点Ａからその点までの最短経路の長さを求めなさい。

　ただし，解答を求める過程についても書くこと。



＜解答例＞



［解答例］

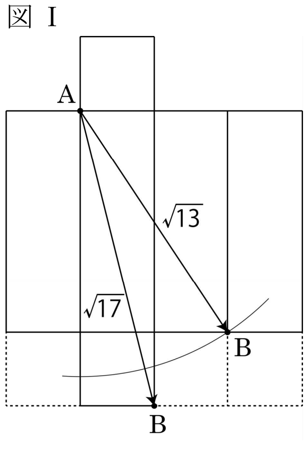
(1)　図Ｉの展開図より，点Ｂまでの最短の道のりは，$\sqrt{13}$ である。

(2)　直方体が図Ⅱの灰色部分の平面に関して対称な図形であるため，上面と下面，右側面と左側面を通る移動はそれぞれ同様なものと考えられる。したがって以下では，上面と右側面を通る移動について考えることとする。

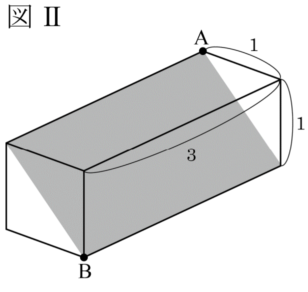
　求める最遠点は，直方体の対称性から，図Ⅱの手前にある正方形の面における点Ｂを通る対角線上に存在する。

　また，図Ⅲのような展開図で考えると，点Ａからその点まで，上面を通って正方形の面へ移動したときの距離と，右側面を通って正方形の面へ移動した距離が等しくなるような点が最遠点であるといえる。そこで，点Ｂから上方向へ x，左方向へ x 離れた点をＰとし，異なる展開図における同じ地点を P' とすると，$AP=AP'$ を満たせばよいということになる。$BE=B'E'=x$ とおいて，$\triangle ACP$ と $\triangle ADP'$ について考える。

図Ｉ



図Ⅱ



△ ACP において

$AP^2 = AC^2 + CP^2 = (4-x)^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 10x + 17$

△ ADP'において

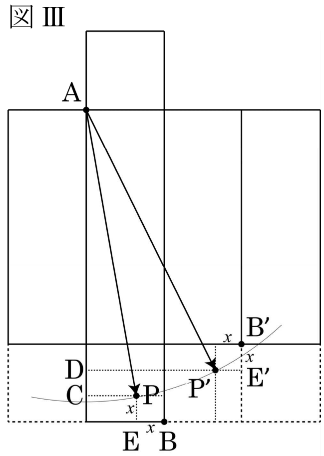
$AP'^2 = AD^2 + DP'^2 = (3+x)^2 + (2-x)^2 = 2x^2 + 2x + 13$

$AP^2 = AP'^2$ より

$2x^2 - 10x + 17 = 2x^2 + 2x + 13$

したがって，$x = \dfrac{1}{3}$

図Ⅲ

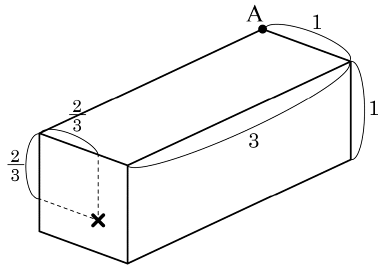


以上から，最短経路が最も遠くなる地点は，図Ⅳの×印で示した点である。

また，この点までの長さは

$$AP = \sqrt{AC^2 + CP^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

図Ⅳ



［出題の意図］

立方体の内部を通ることができる条件での最遠点は，直方体の対角線上に位置する点であることは明らかです。しかし，その条件に，“内部を通ることができない”つまり，“表面上のみを通れる”とすることで，最遠点が直感とは異なる結果となります。この体験をしてもらうことで，幾何の問題における数学的な思考力や論証力を磨いてほしいと考え，この問題を出題しました。

［講評］

477 名中 439 名が解答し，7 名が正解しました。

(1)については，直方体の手前面と右側面を通って点 B に向かうときの距離がそれぞれ異なり，右側面を通って点 B に向かう方が距離が短い事を確かめる問題で，多くの人が正解していました。

(2)は，点 A から離れるにつれて直方体のどの部分までが到達できる領域であるかを，展開図上でイメージできるかどうかが解答のカギとなります。そのうえで，直方体の対称性に着目し最遠点が正方形の面のどの部分に存在するかに気付けると完答することができます。別解として，直方体の正方形の面を中心に複数の展開図をかくという方針のもと，それぞれの展開図における点 A が，最遠点から等距離となる円をかくことでも求めることができます。

また，正方形の面の中心が最遠点であるという答案が複数ありました。もし，出題された直方体の長さ 3 の辺が限りなく長い直方体であれば正解となります。点 A からの最遠点は立方体であれば点 B が最遠点ですが，これが直方体になると最遠点が徐々に手前面の中心へ移動していくことになります。なぜそうなるのか，考えてみましょう。

2　次の図のように，１から小さい順に自然数が１つずつ書かれたカードが横一列に並んでいる。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\cdots\cdots$$

(1)　カードの列に対して，次の【操作Ａ】を行う。

【操作Ａ】
列の左から１番目と２番目の２枚のカードを取り除く。取り除いた後，列の１番左にある１枚のカードを，列の１番右に移す。

１から29まで並んだ29枚のカードの列に対して【操作Ａ】を繰り返し行ったとき，最後に残る１枚のカードに書かれた自然数を求めなさい。

（【操作Ａ】を１回行ったとき）

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\cdots\cdots\boxed{29}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\cdots\cdots\boxed{29}\boxed{3}$$

(2)　カードの列に対して，次の【操作Ｂ】を行う。

【操作Ｂ】
列の１番左から n 番目までの n 枚のカードを取り除く。取り除いた後，列の１番左にある１枚のカードを，列の１番右に移す。ただし，残ったカードが，n 枚より少なくなった時点で操作をやめる。

１から725まで並んだ725枚のカードの列に対して【操作Ｂ】を繰り返し行ったところ，最後に１枚だけカードが残り，そのカードに書かれた自然数は125であった。このような状況となる n を，すべて求めなさい。

［解答例］

1 回目の操作を行う前の，初めの並びを「元の状態」と呼ぶことにする。

(1)　残り枚数が 3^3 枚のとき，何回か操作をすると，【操作Ａ】の規則により，左から 3，6，9，……，27 番目のカードのみが残る。再び何回か操作をすると，【操作Ａ】の規則により，「元の状態」の左から 9，18，27 番目のカードのみが残り，再び何回か操作をすると，【操作Ａ】の規則により「元の状態」の左から 27 番目のカード，つまり 1 番右側にあるカードのみが残る。よって，1，2 と書かれたカードが取り除かれて 3 と書かれたカードが右に移された後，残り枚数が 3^3 枚となるから，1 番右側にある 3 と書かれたカードが最後に残る 1 枚のカードである。

(2)　最後に 1 枚だけカードが残ることから，n は $724 = 2^2 \times 181$ の約数，つまり $n = 1$，2，4，181，362，724 でなければならない。また，1 回目で 125 と書かれたカードが残ることから $n + 1$ が $125 = 5^3$ の約数，つまり，$n = 0$，4，24，124 でなければならない。

以上により，$n = 4$ である必要があることがわかる。そこで $n = 4$ のとき，最後に残るカードに書かれた数字が 125 であるかどうかを調べる。

残り枚数が $5^4 = 625$ 枚のとき，(1)と同様に，何回か操作を行うと，【操作Ｂ】の

規則により，「5，10，……，625」→「25，50，……，625」→「125，……，625」→「625」のように残るカードに書かれた数字が推移する。よって，左から 625 番目，つまり 1 番右にあるカードが残る。$725 - 625 = 100$ であるから，カードを 100 枚除くと残り枚数は 625 枚となる。5 の倍数以外の 1，2，3，4，6，7，8，9，11，……，124 の 100 枚が除かれ，125 が右に移ったとき，残り枚数が 625 枚となるから，1 番右にある 125 と書かれた数字が残る。以上により，求める n は 4 のみである。

［出題の意図］

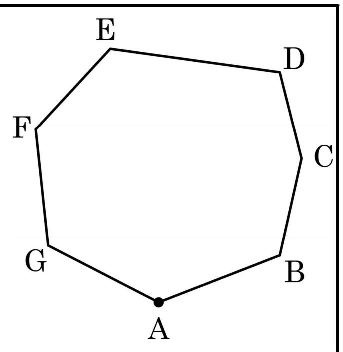
環状に並べたカードや碁石などを「一定の規則」で除いていくときに，最後に何が残るかを考える遊びを「継子立て（ままこだて）」と呼びます。この問題も，カードを右に移して繰り返し操作を行うことから，環状とみなすことができます。実は，「一定の規則」をうまく調節することで，最後に残るものを恣意的に決めることが可能です。今回の規則は，n 進数との関連もあります。このような題材を通して，身近な話題に対しても数学的な考察をしてほしいと考え，出題しました。

［講評］

477 名中 439 名が選択し，69 名が正解しました。(1)で最後に残るカードを 21 や 27 としている誤答が目立ちました。カード枚数の合計が小さい場合には，慎重に実験を行い，規則を探っていく必要があります。(2)では，まず，n を適切に絞っていくとよいでしょう。解答例の場合，まず n として可能性のある値を根拠を明確にしながら考えましたが，そこで得られた n については，他のすべての条件を満たすかどうかの確認をする必要があります。検証が甘いものが散見されましたので，相手に伝わるように丁寧な論述を心がけるとよいでしょう。

3　右の図の七角形について，頂点Ａを通り，この七角形の面積を二等分するような１本の直線を作図したい。この直線を作図する手順を示しなさい。

ただし，この作図の過程では，次の【使える作図】のみを用いるものとする。また，作図の手順については＜解答例＞のように示すこととし，必要に応じて，定規やコンパスを用いた作図を使って説明してもよいものとする。



【使える作図】
・２点Ｐ，Ｑを通る直線ＰＱ（または線分ＰＱ）の作図
・線分ＰＱを延長する作図
・２直線 l，m の交点Ｐの作図
・∠Ｐの二等分線の作図
・線分ＰＱの垂直二等分線の作図
・直線 l 上にない点Ｐを通り，直線 l に垂直な直線の作図
・直線 l 上にない点Ｐを通り，直線 l に平行な直線の作図

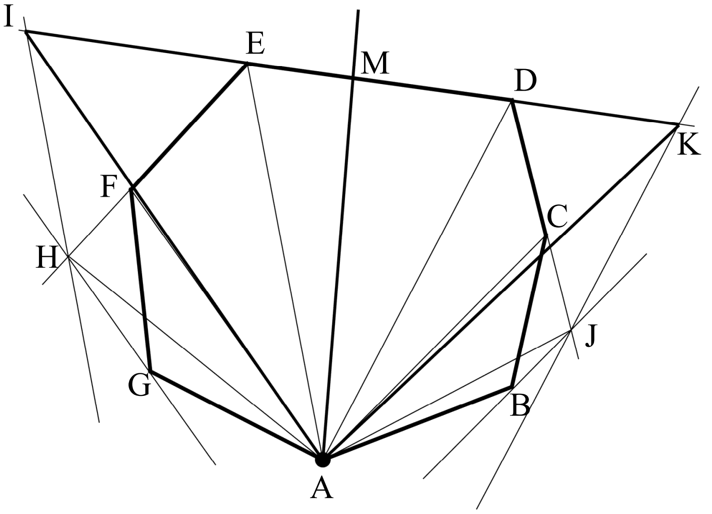
＜解答例＞
①２点Ｃ，Ｅを通る直線ＣＥを引く。
②２点Ｄ，Ｇを通る直線ＤＧを引く。
③直線ＣＥと直線ＤＧの交点をＨとする。
・
・
・

［解答例］

頂点Ａを通る七角形の面積を二等分するような１本の直線は，辺ＤＥとの交点をもつことが予想できる。そこで，四角形ＡＥＦＧと四角形ＡＤＣＢのそれぞれについて，面積を考えることにして，次のような手順で作図する。

①２点Ｄ，Ｅを通る直線ＤＥを引く。
②２点Ａ，Ｆを通る直線ＡＦを引く。
③２点Ｅ，Ｆを通る直線ＥＦを引く。
④点Ｇを通る直線ＡＦに平行な直線を引く。
⑤④の直線と直線ＥＦの交点をＨとする。
　このとき，三角形ＡＦＧと三角形ＡＦＨの面積は等しくなる。
⑥２点Ａ，Ｅを通る直線ＡＥを引く。
⑦点Ｈを通る直線ＡＥに平行な直線を引く。
⑧⑦の直線と直線ＤＥとの交点をＩとする。
　このとき，三角形ＡＥＨと三角形ＡＥＩの面積は等しくなる。
⑨２点Ａ，Ｃを通る直線ＡＣを引く。
⑩２点Ｃ，Ｄを通る直線ＣＤを引く。
⑪点Ｂを通る直線ＡＣに平行な直線を引く。
⑫⑪の直線と直線ＣＤの交点をＪとする。
　このとき，三角形ＡＢＣと三角形ＡＪＣの面積は等しくなる。
⑬２点Ａ，Ｄを通る直線ＡＤを引く。
⑭点Ｊを通る直線ＡＤに平行な直線を引く。

⑮⑭の直線と直線ＤＥとの交点をＫとする。
このとき，三角形ＡＪＤと三角形ＡＫＤの面積は等しくなる。
以上により，七角形ＡＢＣＤＥＦＧの面積と三角形ＡＫＩの面積は等しくなる。
⑯線分ＫＩの垂直二等分線を引き，線分ＫＩの中点をＭとする。
⑰直線ＡＭを引く。この直線ＡＭが，この七角形の面積を二等分する直線である。



［出題の意図］

三角形の面積を二等分する直線は，ある頂点と対辺の中点を結べばよいので，簡単に作図できると思います。また，凸四角形の場合でも，分割した三角形の等積変形を用いることで，もとの凸四角形と同じ面積をもつ三角形に帰着させることができるため，この三角形を利用して，もとの凸四角形の面積を二等分する直線が作図できます。

これらの考えを活用して，今回は凸 n 角形の面積を二等分する直線の作図について考えてもらいたく，この問題を出題しました。

考える上でのポイントは，面積を二等分する直線が，七角形のどのあたりを通るか，あらかじめ見当をつけておくことです。等積変形をした後にどのような三角形に帰着させるかを誤ってしまうと，正しい作図ができないからです。問題が与えられたら，まず解答を想定し，見通しを立ててから取り組むことが大切かもしれません。

［講評］

477 人中 86 名が選択し，16 名が正解しました。平行線を利用した等積変形に気付いた解答は正解者以外の解答でもいくつかあったのですが，辺 DE を残さずに図形を変形してしまっているものが多く，実際には七角形を二等分できていない直線を作図している解答が見られました。また，重心を利用して考えようとしているものもありましたが，正解にはたどり着けていなかったようです。

こういった問題では，ある程度の方向性を考え，そこに至るまでの過程をあらかじめ考えておくことで，正解に到達できることがあります。ぜひ，今後の学習の参考にしてください。

4

$$\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}\ \left(=\frac{1}{2}\right)$$

このように，分母と分子に共通する数字を消して新しい分数をつくることを「誤約分」と呼ぶこととし，次のように定義する。

「誤約分」の定義

分母と分子がともに２桁の整数で，分母の十の位と分子の一の位が同じ数である分数に対して，この２つの数を消して，分母と分子がともに１桁の整数である分数をつくることを誤約分という。

上記の例では，誤約分した結果の値がもとの分数の値と一致しているので，この状況を「誤約分の成功」と表すこととする。このような「誤約分の成功」が起こる分数のうち，値が１より小さいものをすべて求めなさい。

［解答例］

求める分数を $\frac{10a+b}{10b+c}$ とすると， $\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$ ……① という式が成り立つ。

ここで条件より，a，b，c は 1 桁の自然数であり，
①の右辺は 1 より小さいので $a < c$ である ……②

①を変形すると，
$10a(c-b)=c(a-b)$ ……③ が成り立つ。

ここで，③の左辺は 5 の倍数であり，$1 \leqq c \leqq 9$，$0 \leqq |a-b| \leqq 9$ であるので，
$c=5$ または $|a-b|=5$ が成り立つ。

（ｉ）$c=5$ のとき
③に $c=5$ を代入して a について整理する。

$2b-9 \neq 0$ であるので， $a=\frac{b}{2b-9}$ ……④

ここで，④の左辺 $a>0$，④の右辺の分子 $b>0$ であるから，
④の分母について $2b-9>0$
よって $b \geqq 5$

②，④を満たす（a，b）は，$(a, b)=(2, 6)$，$(1, 9)$

つまり，求める分数は $\frac{26}{65}$，$\frac{19}{95}$ である。

（ⅱ）$|a-b|=5$ のとき
$a-b=5$ つまり $a=b+5$ となるとき，
①の左辺が 1 より大きくなるので，不適。

したがって，$a - b = -5$　つまり　$b = a + 5$ となる。
$b \leqq 9$，$a \geqq 1$ より，$1 \leqq a \leqq 4$，$6 \leqq b \leqq 9$ が成り立つ。

③に　$b = a + 5$　を代入すると，$2a(c - a - 5) = -c$　……⑤
⑤を c について整理すると，$c = \dfrac{2(a^2+5a)}{1+2a}$　……⑥
②，⑥を満たす（a，c）は，（a，c）=（1，4），（4，8）

つまり，求める分数は $\dfrac{16}{64}$，$\dfrac{49}{98}$ である。

（ⅰ），（ⅱ）より，誤約分が成功する分数は，
$\dfrac{26}{65}$，$\dfrac{19}{95}$，$\dfrac{16}{64}$ $\left(，\dfrac{49}{98}\right)$ である。

［出題の意図］

小学校で分数の約分について学習をした際に，今回の「誤約分」のように誤って数字を消してしまったことはないでしょうか。例で挙げられているように，本来の約分の方法としては間違っていますが，結果的に値が一致してしまう分数がいくつか存在します。そのような場合について，これまでに学んだ知識や考え方をもとに，解決を目指してもらいました。

数学の世界においては，物事を定義し，その定義に則って論理展開を進めることで，様々な考え方が発展してきました。今回の「誤約分」は本来の数学の世界で成り立つものではありませんが，「定義に則って考える」という数学の本来の考え方を少しでも味わってもらうことができる題材だと思います。

［講評］

477 名中 310 名が解答し，45 名が正解しました。

分子の一の位と分母の十の位が一致する分数という条件だけを考えれば，（分子の十の位の数 9 通り）×（分子の一の位・分母の十の位の数 9 通り）×（分母の一の位の数 9 通り）の計 729 通りを考察しないといけません。これらすべてを確認して答えを導いても問題はありませんが，なかなか容易ではなく，またすべての場合をもれなく確認していないと，その答えの必要十分性を示すことができませんので，注意が必要です。今回はコンテストの性格上，解答の必要十分性が確認できないものについては正解としていません。

分数を文字式で表した人が多くいました。未知のものを文字で置いて考えるという方法は，基本的ですがとてもよい考え方です。できるだけ扱う文字を少なくすることや，文字の大小関係を調べること，等式の性質を利用して文字の範囲を設定していくこと，場合分けをして具体的に考えていくことなど，多くの考え方がみられました。等式の性質を利用して条件式を変形すると，10 の倍数または 9 の倍数になることや，因数分解して整数の積の形になることなどを利用できると，簡潔で分かりやすい答案になったと思います。

5　総当たりのリーグ戦を行うスポーツでは，勝ち，引き分け，負けの数に応じて順位付けを行う「勝ち点制度」を採用している。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。
　ただし，勝ち点の合計が同じ場合には，同じ順位を付けるものとする。

(1)　勝ちの場合には２点，引き分けの場合には１点，負けの場合は０点の勝ち点を与えるルールで，Ａ～Ｅの５チームによるリーグ戦を行った。右の表は，チームＡの結果のみが示されたものである。
　表から，チームＡは，ＢとＣの２チームに勝ち，ＤとＥの２チームに負けたことが分かる。また，表には示されていないが，Ａ以外のすべてのチームはそれぞれ１勝しかできなかったものの，優勝したのはチームＥだったという。このような状況となる試合結果を，解答用紙の表に示しなさい。
　ただし，引き分けは△で表すこと。

	A	B	C	D	E
A	＼	○	○	×	×
B	×	＼			
C	×		＼		
D	○			＼	
E	○				＼

※チームＡは，ＢとＣの２チームに勝ち，ＤとＥの２チームに負けたことを示している。引き分けは△で表すこととする。

(2)　勝ちの場合には３点，引き分けの場合には１点，負けの場合は０点の勝ち点を与えるルールで，いくつかのチームによるリーグ戦を行った。その結果，他のどのチームよりも勝利数が少ないあるチームが勝ち点の合計で１位となり，単独優勝したという。
　このような状況が成り立つような最小のチーム数を求め，そのリーグ戦の結果を(1)のような表で表しなさい。また，解答を求める過程も示しなさい。
　ただし，必要があれば，次の【参考】を活用してもよい。

【参考】
nチームが参加するリーグ戦の合計試合数は，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 試合である。

［解答例］
(1)　チームＡの勝ち点が4点であるから，チームＥが優勝するためにはチームＥの勝ち点が5点でなくてはならない。また，チームＡ以外のチームは1勝しかできなかったので，チームＥは他の試合に勝利することができない。この状況でチームＥが勝ち点5となるためには，残りの試合全てに引き分ける必要があるため，試合結果は図Ｉのようになる。

図Ｉ

	A	B	C	D	E
A	＼	○	○	×	×
B	×	＼			
C	×		＼		
D	○			＼	
E	○				＼

→

	A	B	C	D	E
A	＼	○	○	×	×
B	×	＼			△
C	×		＼		△
D	○	ア	イ	＼	△
E	○	△	△	△	＼

　ここで，チームＤが1勝となるためには，図Ｉのア，イについて，引き分けか負け(△か×)でなくてはならない。

図Ⅱ

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		ウ	△	△
C	×	エ		△	△
D	○	△	△		△
E	○	△	△	△	

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		ウ	△	△
C	×	エ		○	△
D	○	△	×		△
E	○	△	△	△	

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		ウ	○	△
C	×	エ		△	△
D	○	×	△		△
E	○	△	△	△	

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		ウ	○	△
C	×	エ		○	△
D	○	×	×		△
E	○	△	△	△	

チームDの結果は図Ⅱのいずれかとなる。

このとき，チームB，チームCともに1勝となるためには，次の①～④のいずれかが考えられる。

①ア，イともに△　ウ，エの両方に○が入らず不適。
②アが△，イが×　ウに○，エに×が入れば条件を満たす。
③アが×，イが△　ウに×，エに○が入れば条件を満たす。
④ア，イともに×　ウとエの両方に△が入れば条件を満たす。

したがって，条件を満たす試合結果は図Ⅲの3通りである。

図Ⅲ

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		○	△	△
C	×	×		○	△
D	○	△	×		△
E	○	△	△	△	

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		×	○	△
C	×	○		△	△
D	○	×	△		△
E	○	△	△	△	

	A	B	C	D	E
A		○	○	×	×
B	×		△	○	△
C	×	△		○	△
D	○	×	×		△
E	○	△	△	△	

※3通りのうちいずれかができていれば，正解とした。

(2)　単独優勝チームをチームAとし，それ以外のチームを，チームB，チームC，……のようにアルファベット順にチーム名を付けることとする。条件に応じて試合について分析すると，以下のような3つの条件が考えられる。

(ⅰ)チームAが他チームより勝利数が少ない状態で単独優勝するための条件
- 他チームとの勝利数差による勝ち点差を引き分けでひっくり返す必要がある。
- 勝利数による勝ち点差は最小で3点だから，チームAは引き分けによる勝ち点を4点以上獲得する必要があり，4回以上引き分ける必要がある。ただしチームAの引き分け数が4回だとチームAと引き分けたチームとの引き分け数の差が3回となってしまい，引き分けによる勝ち点差が3点となってしまう。これでは勝利数差による勝ち点差を引き分けでひっくり返せないため，チームAの引き分け数は5回以上である。
- チームAが5回以上引き分けることから，参加チーム数は最低6チームである。

(ⅱ)参加チーム数が最小であるという条件
- チームAと他チームの勝利数差が多いほど，チームAが単独優勝するための引き分け数が増える。引き分け数が増えるということは，参加チーム数も増えてしまう。つまり，チームAと他の全チームの勝利数差は1勝であると考える。

(ⅲ)総当たりの試合が成立するための条件
- 1つの試合でどちらかが勝った時，どちらかは負けている。つまり，全試合の勝利数合計と敗北数合計は一致する。

・1つの試合で引き分けた場合，両チームとも引き分けと記録される。つまり，全試合の引き分け数の合計は偶数である。

これらの条件のもとで，チームAの勝利数が最も少なく，かつチームAが単独優勝するような状況が発生しうる最低参加チーム数を，Aの勝利数について場合分けしながら考えていく。

〇参加チームが6チームのとき

① チームA：0勝0敗5分 ⇒ 勝ち点5
他5チーム：1勝3敗1分 ⇒ 勝ち点4
このとき，勝利数総計5＜敗北数合計15 となり不適

〇参加チームが7チームのとき

② チームA：0勝0敗6分 ⇒ 勝ち点6
他6チーム：1勝3敗2分 ⇒ 勝ち点5
このとき，勝利数総計6＜敗北数総計18 となり不適

③ チームA：1勝0敗5分 ⇒ 勝ち点8
他5チーム：2勝3敗1分 ⇒ 勝ち点7
他1チーム：2勝4敗0分 ⇒ 勝ち点6
このとき，勝利数総計13＜敗北数総計19 となり不適

〇参加チームが8チームのとき〇

④ チームA：0勝0敗7分 ⇒ 勝ち点7
他7チーム：1勝3敗3分 ⇒ 勝ち点6
このとき，勝利数総計7＜敗北数総計21 となり不適

⑤ チームA：1勝0敗6分 ⇒ 勝ち点9
他7チーム：2勝3敗2分 ⇒ 勝ち点8
このとき，勝利数総計15＜敗北数総計21 となり不適

⑥ チームA：2勝0敗5分 ⇒ 勝ち点11
他5チーム：3勝3敗1分 ⇒ 勝ち点10
他2チーム：3勝4敗0分 ⇒ 勝ち点9
このとき，勝利数総計23＝敗北数総計23 となり条件を満たす

実際に⑥のもとで試合結果を作ると図Ⅳのようになり，この状況は実際に成立することが分かる。したがって，条件を満たす最小の参加チーム数は8チームである。

図Ⅳ

	A	B	C	D	E	F	G	H	勝	負	分	点
A	＼	△	△	△	△	△	〇	〇	2	0	5	11
B	△	＼	×	×	×	〇	〇	〇	3	3	1	10
C	△	〇	＼	×	×	×	〇	〇	3	3	1	10
D	△	〇	〇	＼	×	×	×	〇	3	3	1	10
E	△	〇	〇	〇	＼	×	×	×	3	3	1	10
F	△	×	〇	〇	〇	＼	×	×	3	3	1	10
G	×	×	×	〇	〇	〇	＼	×	3	4	0	9
H	×	×	×	×	〇	〇	〇	＼	3	4	0	9

［出題の意図］

この問題は，サッカーワールドカップで採用されている「勝ち点制度」をヒントに出題しました。ゲームの勝敗のつけ方については多くの歴史があり，少しでも公平であろうとする人類の努力が見られます。今回参考にしたサッカーにおいても，最初は(1)のように，勝利で勝ち点 2，敗北で勝ち点 0，引き分けで勝ち点 1 というルールだったそうです。しかし，勝利より引き分けを狙うチームが多くなり，試合としてつまらないものとなったため，(2)のような現行のルールに変更されたそうです。

なお，この問題は，次の 3 つの観点で評価を行いました。

①問題を正しく分析し，様々な隠れた条件を駆使して正確な説明が行える論理性

②勝利数や勝ち点などの条件を正確に捉え，合致する表を完成させる表現力

③文字を使ったり，少ないチームから考えたりして最小が 8 チームと導ける方法を考察するアイデア性

この問題を解くうえで，何度も表を書き試行錯誤をし，様々な条件を発見するという経験をしたという人も多くいるでしょう。「どうやら引き分けが 5 回必要だ」「優勝チームは 1 勝以上しないとダメだ」等，体験を通して得た気付きが多くあるかと思います。数学の難問は具体例を用いた実験をすることで気付きを得て，それを元に考察し解法に至ることが多くあります。この問題を通して，そのような考え方の大切さに気付いてもらえたらと思います。

［講評］

477 人中 391 名が選択し，14 名が正解しました。(1)で多く見られた誤答が「チームA以外のチームは 1 勝」「チームEが優勝した」という条件を満たしていないものでした。また 1 つの試合で両チームとも勝利や両チームとも敗北となってしまっているケースも多くみられました。数学の問題においては，与えられた条件をしっかりと確認するとともに，解答が正しいかどうかの確認を行うように心がけてみてください。(2)については全く手がついていない解答が半数近くありました。数学の問題は実験することで何かしらのヒントを得られるものが多くあるので，どんなに難しく感じる問題もまずは試行錯誤して紙面に起こすことから始めてみてください。

今回の問題については，(1)で「チームEが優勝するためには，引き分けが 3 回必要」というアイデアに気付くと，(2)でも「最小勝利数チームが単独優勝するためには，引き分け数が 5 回以上必要」という手がかりを見つけることができるはずです。そこをスタート地点に，例えば単独優勝チームの勝利数で場合分けしたり，チームの参加数で場合分けしたりと考えを広げることができるとよいでしょう。なお，正答である 8 チームにたどり着いていた解答は 37 名いましたが，そのうち最小であることを正しく説明できていたものは 14 名だけでした。「7 チーム以下はこういう理由で成り立たない，8 チームだと成り立つことが予想される。実際に表を作ると成立しているから，最小チーム数は 8 チームである」ということまでしっかり書けたものを正解としました。

6　異なる自然数をいくつか選び，次の《条件》を満たすような自然数の組を作りたい。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

《条件》

作った組に含まれる自然数のうち，どの２数を選んでも，その和がすべて異なる値となる。

ただし，２数の和が100以上のときは下２桁の数を値とし，「107」のように，和の十の位が０となる場合は，下１桁の数である「７」を値として考えるものとする。

（例）３，５，６，４という４つの自然数の組は，３と６の和が９となり，５と４の和も９となるため《条件》を満たさないが，５，６，４，８という４つの自然数の組は，どの２数の和もすべて異なる値となるため《条件》を満たしている。

(1)　１から20までの自然数の中から６個の異なる自然数を選び，《条件》を満たすような組を作りなさい。

(2)　１から100までの自然数の中から異なる自然数を選んで《条件》を満たすような組を作ろうとしたとき，15個以上の自然数を含む組は作れないことを示しなさい。

なお，必要があれば，次の【参考】を活用してもよい。

【参考】

異なる n 個の中から２個を選ぶ選び方の総数は，$\dfrac{n(n\text{-}1)}{2}$ 通りである。

(3)　１から100までの自然数の中から異なる自然数をできるだけ多く選び，《条件》を満たすような組を作りなさい。

なお，この問題については，自然数をより多く選ぶことができた解答を高く評価するものとする。

［解答例］

(1)（例）1，2，3，5，8，13

（1，4，9，14，16，20 の組など，他の例もあり）

(2)　下 2 桁のとりうる値は，0，1，2，……，99 の 100 通りしかない。一方で，

【参考】より，異なる 15 個の数字の中から異なる 2 つの数を選ぶ選び方は，

$$\frac{15(15-1)}{2}=105$$　通りある。

つまり，15 個以上の数字の中から異なる 2 つの数を選ぶと，その和は 105 通り以上の可能性があるため，下 2 桁が同じになる選び方が必ず存在することになる。

以上より，15 個以上の自然数を含む組は作れない。

(3)（例）2，8，13，20，22，32，35，36，62，70，91　　＜ 11 個の組＞

（1，6，17，25，32，33，46，67，69，79，97 の組など，他の例もあり）

［出題の意図］

身近な数遊びの中で，よりよい方法を考えたり，論証の力を試したりする問題として出題しました。問題の意味を正確に捉え，条件を満たす数の組を工夫して見つけていく問題です。また，論証の中では「鳩ノ巣原理」と呼ばれる考え方が使えます。この考え方に触れてもらいたい，という意図もあって出題した問題です。

この問題で求められる力は，過不足なく数え上げる力や，論理の飛躍なく正確に推論して示す力などです。この問題を通して，数学におけるこれらの力の大切さを再確認するとともに，「鳩ノ巣原理」のような，数学ならではの考え方のよさを楽しんでもらえればと思います。

［講評］

477名中243名が選択し，5名が完答しました。(1)が正解，(2)で論証に飛躍なく正しく伝えられている，(3)で10個以上の数の組を見つけられている，の3条件を満たす答案を「完答」としました。

(1)や(3)では，条件を満たす数の組を正確に見つけられたかどうかに着目して，採点しました。特に(3)では，「フィボナッチ数列」と呼ばれる数の列に着目した解答がありました。これは，非常によい気付きだったと思います。「フィボナッチ数列」は，前の2つの数の和が次の数となる，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……という数の列です。この列を使うと，1，2，3，5，8，13，21，34，55までの9個の組では条件を満たします。ところが，次の89を加えると，条件を満たさなくなってしまいます。このあたりを正確に見極める力も試された問題でした。

(2)では，論証の正確性を重視して採点しました。正解に近い表現をしている解答も少なくありませんでしたが，論理的かつ正確な表現で示されたものを正解としています。答案を書いた後にもう一度読み直して，自分の解答に論理の飛躍がないか，不正確な表現がないかなどを確認することも大切です。