平成２９年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　　意　　事　　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚を全て提出してください。

1　図Ⅰのような正三角柱 ABC − DEF の，上面にある正三角形 ABC と，底面にある正三角形 DEF の，2つの正三角形について考える。△ ABC と△ DEF に平行で，AD の中点を通る平面を α とする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。必要があれば，下に示した【性質】を用いてもよい。

(1)　図Ⅱのように，2つの点 X，Y がそれぞれ頂点 B，D を同時に出発し，

　点 X は△ ABC の各辺を，B → C → A → B，

　点 Y は△ DEF の各辺を，D → E → F → D

の順に同じ速さで移動した。このとき，線分 XY がつくる図形を平面 α で切った切り口の面積は△ ABC の面積の何倍となるか。

(2)　△ ABC の全ての頂点を通る円の中心を O とする。△ DEF を固定したまま，点 O を中心として，△ ABC だけを 60° 回転させた。△ ABC の回転は，上方から見て時計回りに，水平を保ちながら行ったたものとする。その後，(1)と同様に，2つの点 X，Y がそれぞれ頂点 B，D を同時に出発し，

　点 X は△ ABC の各辺を，B → C → A → B，

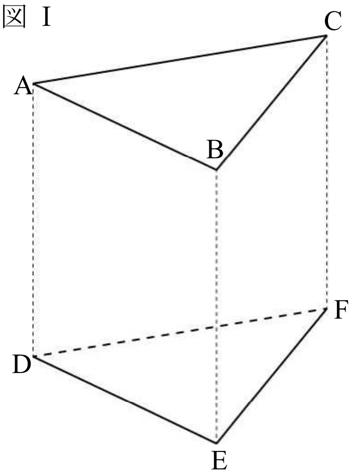
　点 Y は△ DEF の各辺を，D → E → F → D

の順に同じ速さで移動した。このとき，線分 XY がつくる図形を平面 α で切った切り口の面積は△ ABC の面積の何倍となるか。

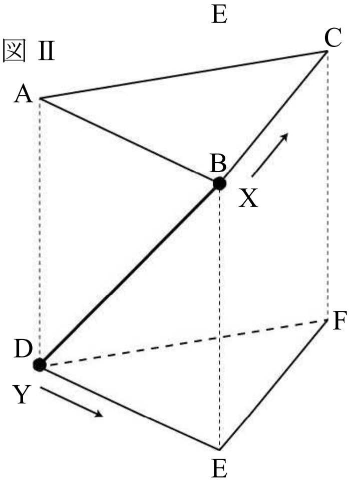
【性質】

　ねじれの位置にある2つの直線 l, m において，直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q が同じ速さで移動しているとき，線分 PQ 上の任意の点は，ある直線上を動く。

図Ⅰ



図Ⅱ



2　次の(1)〜(4)の問いに答えなさい。必要があれば下に示した【参考】を活用してもよい。

(1)　5桁の数 10000，11000，11100，11110，11111 のうち 3 の倍数を全て答えなさい。

(2)　万の位が a ($a \neq 0$)，千の位が b，百の位が c，十の位が d，一の位が e であるような5桁の数について，$a + b + c + d + e$ が 3 の倍数であるとき，もとの5桁の数も 3 の倍数であることを示しなさい。

(3)　ある3桁の数の左側（最高位）に 2，右側（一の位）に 1 を付け加えて5桁の数をつくったところ，この5桁の数はもとの3桁の数の倍数になった。この条件を満たすようなもとの3桁の数を，1つ求めなさい。

(4)　(3)と同様に，ある2桁の数の両端に偶奇の異なる2つの自然数を付け加えて4桁の数をつくったところ，この4桁の数はもとの2桁の数の倍数になった。この条件を満たすような4桁の数のうち，最小のものを求めなさい。

【参考】100 以下の素数

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，
53，59，61，67，71，73，79，83，89，97

3　右の図のような2つの直角三角形について，斜辺の長さを1としたときの残りの辺の長さを，図Ⅰ，図Ⅱのように a，b，c，d とする。1辺の長さが1である正方形の折り紙を使って，別紙のように折り鶴を折る。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　図Ⅲは，別紙のように鶴を折る際に，⑦でできたひし形を表したものである。図に示された対角線の長さ s を，a，b を用いて表しなさい。

(2)　図Ⅳは，完成した鶴を表したものである。図に示された羽の幅 t を，a，b，c，d を用いて表しなさい。また，その理由も説明しなさい。

図 Ⅰ

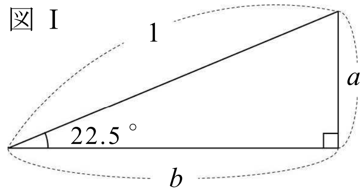


図 Ⅱ

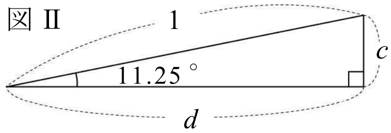
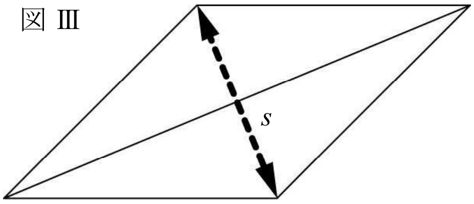
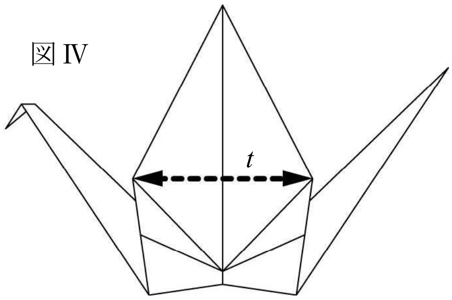


図 Ⅲ



図Ⅳ

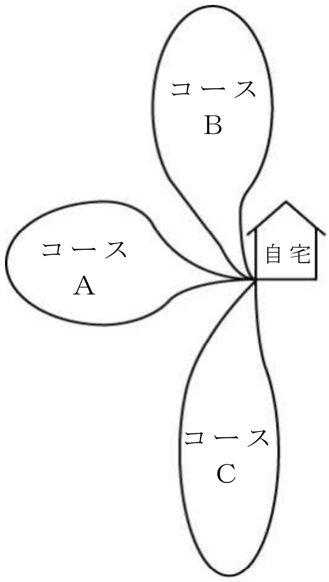


4　自宅を起点とするいくつかの周回コースを組み合わせることで，スタート地点とゴール地点がともに自宅となるようなジョギングコースをつくる。右の図において，コースAは1周1km，コースBは1周2km，コースCは1周3kmである。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

ただし，各コースを逆に周回した場合は別のコースと考えるものとする。また，同じコースを何度通ってもよいが周回コースを途中で引き返すことはできないものとする。

2kmのジョギングコースの例

・（Aの時計回り）→（Aの時計回り）
・（Aの時計回り）→（Aの反時計回り）
・（Bの反時計回り）　　　　　　など



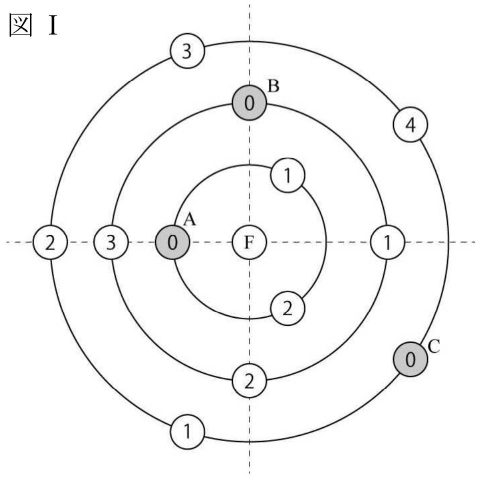
(1)　3kmのジョギングコースは全部で何通りつくれるか答えなさい。

(2)　右の図に加えて，1周 n kmのコースDを追加して，毎日違う4kmのジョギングコースを走っていたところ，88日目で全てのコースを走り終えることができたという。n の値を求めなさい。ただし，n は自然数とする。

5　Ａ君の所属するクラスで, ある試験を実施したところ次のような結果になった。このとき，Ａ君のクラスの人数と試験問題数の組合せとして考えられるものを，全て求めなさい。

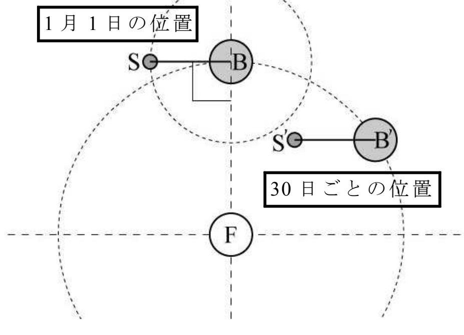
結果
①　どの生徒も，試験問題のうち，ちょうど半数の問題に正解した。
②　それぞれの問題に対する正解者数は，全て等しかった。
③　クラス内のどの２人を選んでも, 両者がともに正解した問題数は 3 問であった。

6　ある恒星 F の周りを 3 つの惑星が時計回りに公転しており，それらを F から近い順に A，B，C とする。今年の 1 月 1 日に観測したところ，惑星 A，B，C はそれぞれ図Ⅰの⓪に示す位置にあった。惑星が再びもとの位置に戻るまでの周期は，順に 3 年，4 年，5 年であり，図Ⅰの①～④は 1 年ごとの惑星の位置を示している。例えば 3 年後には，A，B，C はそれぞれ⓪，③，③の位置にある。次の【条件】を満たすとき，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

図Ⅰ


【条件】
・毎年 1 月 1 日に観測を行う。1 年は 365 日で，うるう年はないものとする。
・惑星の速度はそれぞれ一定であり，惑星どうしがぶつかることはない。
・惑星の軌道は恒星 F を中心とした円であり，全ての軌道は同じ平面上にある。
・惑星 A，B，C が，それぞれ⓪，③，②または，⓪，①，②の位置にあるとき，3 つの惑星が「直列する」という。

(1)　3 つの惑星が初めて直列するのは今年の 1 月 1 日から何年後か求めなさい。また，最初に直列した後，その後何年ごとに直列するか，その周期のうち最小のものを求めなさい。
(2)　惑星 B の周りを衛星 S が反時計回りに公転している。今年の 1 月 1 日に観測された B と S の位置は左下の図Ⅱのとおりであり，S の動き方については，右下の【衛星 S の動き方】の条件を満たすものとする。このとき，惑星 A，B，C が直列し，さらに衛星 S も同一直線上に並ぶような場合を全て図示しなさい。また，なぜそうなるのかについても説明しなさい。

図Ⅱ


【衛星 S の動き方】
・衛星 S は惑星 B の周りを 30 日かけて周回する。
・今年の 1 月 1 日の衛星 S，惑星 B の中心を S，B とし，30 日後の衛星 S，惑星 B の中心を S'，B' とすると，SB ∥ S'B' である。その後の衛星と惑星は，30 日ごとに SB と平行になる位置をとる。
・衛星 S の速度は一定で，惑星とはぶつからない。
・衛星 S の軌道は惑星 B を中心とした円であり，惑星の軌道と同じ平面上にある。

＜別紙（鶴の折り方）＞

都合により、省略します。