平成２９年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

今年度の数学コンテストは７月２５日（火）に実施され、参加者は４５８名（１７校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年で大きな節目となる、２０回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞５名、奨励賞１５名、アイデア賞１８名（昨 年は最優秀賞１名、優秀賞６名、奨励賞１６名、アイデア賞１７名）の計３９名であった。

前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４校を会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、今年も電卓やはさみの使用が認められた。

今回は、三角柱の２頂点を結んだ線分がつくる立体の切断面の面積を求める問題や、自宅を出発点とするジョギングコースの場合の数を調べる問題、また、ある条件に従って公転する惑星や衛星について考察する問題などに取り組んでもらった。これらの問題では、まず試行錯誤を十分行うことが重要であり、試行錯誤する中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。また、大問３の折り鶴に関する問題では、問題用紙とともに配付した折り紙を実際に折ったり再び元に戻したりすることで、折り鶴のある部分の長さについて考察する問題に取り組んでもらった。コンテスト会場では、解答への見通しを立てるために実際に折った紙を眺め、イメージをふくらませながら取り組む様子が多く見られた。ほとんどの生徒が解答時間の３時間に集中し、最後まで粘り強く問題に向き合っていた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する、よい機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後様々な教科を学習していく上でよい経験になっていると思われる。今年度はこの群馬県高校生数学コンテストが２０回目を迎えた。今後も長年培ってきたコンテストのよさを維持しながら更に継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会としてより一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年(中等)	１年(４年)	２年(５年)	３年(６年)
男	２１５	１１１	２２
女	４３	６５	２
計	２５８	１７６	２４

合　計　４５８名

※次のページ以降に平成２９年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00 〜 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　解答には，必ず途中の考え方などを書いてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚を全て提出してください。

Ⅱ　問題及び解答例

1　図Ⅰのような正三角柱 ABC － DEF の，上面にある正三角形 ABC と，底面にある正三角形 DEF の，2つの正三角形について考える。△ ABC と△ DEF に平行で，AD の中点を通る平面を α とする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。必要があれば，下に示した【性質】を用いてもよい。

(1)　図Ⅱのように，2つの点 X，Y がそれぞれ頂点 B，D を同時に出発し，

点 X は△ ABC の各辺を，B → C → A → B，

点 Y は△ DEF の各辺を，D → E → F → D

の順に同じ速さで移動した。このとき，線分 XY がつくる図形を平面 α で切った切り口の面積は△ ABC の面積の何倍となるか。

(2)　△ ABC の全ての頂点を通る円の中心を O とする。△ DEF を固定したまま，点 O を中心として，△ ABC だけを 60°回転させた。△ ABC の回転は，上方から見て時計回りに，水平を保ちながら行ったたものとする。その後，(1)と同様に，2つの点 X，Y がそれぞれ頂点 B，D を同時に出発し，

点 X は△ ABC の各辺を，B → C → A → B，

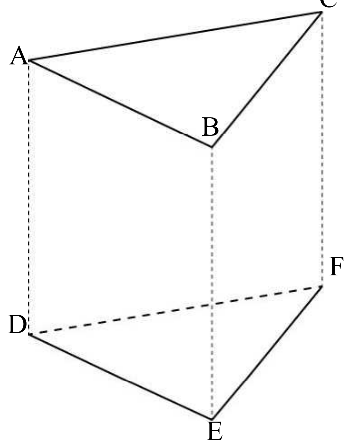
点 Y は△ DEF の各辺を，D → E → F → D

の順に同じ速さで移動した。このとき，線分 XY がつくる図形を平面 α で切った切り口の面積は△ ABC の面積の何倍となるか。

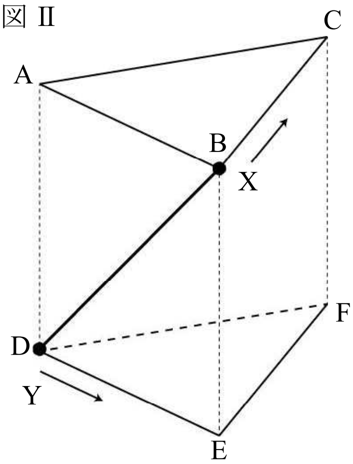
【性質】

ねじれの位置にある2つの直線 l, m において，直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q が同じ速さで移動しているとき，線分 PQ 上の任意の点は，ある直線上を動く。

図Ⅰ



図Ⅱ



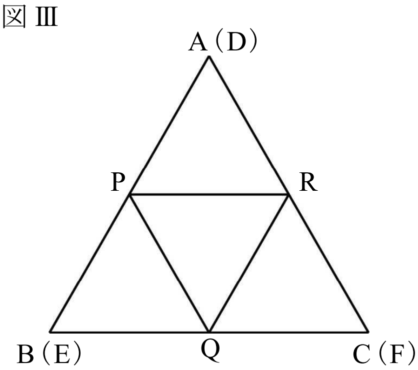
［解答例］

(1)　線分 XY の作る図形を真上から見ると図Ⅲのようになる。線分 BD，CE，AF の中点をそれぞれ P，Q，R とおくと，平面 α で切り取った切り口の図形は，【性質】より正三角形 PQR となる。

ここで，△ ABC と△ PQR は相似で，中点連結定理より相似比は 2：1 なので，面積比は 4：1 となる。

したがって，切り口の面積は△ ABC の面積の $\frac{1}{4}$ 倍である。

図Ⅲ

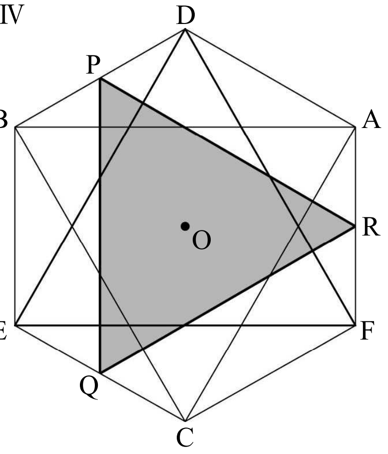


(2)　線分 XY の作る図形を真上から見ると図Ⅳのようになり、これを平面 α で切り取った切り口は△ PQR となる。【性質】と図形の対称性から，△ PQR は正三角形であることがわかる。ここで，△ OBP について考える。OB の長さを r とすると，∠ BOP ＝ 30° であるから，$OP = \frac{\sqrt{3}}{2}r$
したがって
△ ABC と△ PQR の面積比は

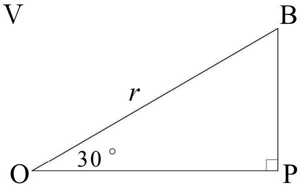
$$r^2 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 : \frac{3}{4}$$

よって，求める面積は△ ABC の面積の $\frac{3}{4}$ 倍である。

図Ⅳ



図Ⅴ



［出題の意図］

空間図形からの出題です。「線分 XY が作る立体図形」は，底面を固定したまま正三角柱の上面をひねったような図形になることがわかります。(1)については 120°，(2)については 60°ひねった図形です。この立体を上面と平行な平面で切断すると，その断面は上面と相似な正三角形になります。切断面の面積を考察するときには，立体を真上から見た図を用いるなど，考え方の工夫が求められる問題でした。

［講評］

458 名中，125 名が選択し，24 名が完答しました。

完答した解答は，いずれも「線分 XY が作る立体図形」を真上から見ることによって面積を考察していました。空間図形をある方向から見ることで平面として捉える方法は，空間図形を考えるときの有効な手段です。正解となった解答は，論理的で素晴らしい解答ばかりでした。

今回は作られた立体をちょうど中間の位置で切断しましたが，切断する平面を上下させることによって，切断面の面積がどのように変化するか考察してみるのも面白いでしょう。

2　次の(1)〜(4)の問いに答えなさい。必要があれば下に示した【参考】を活用してもよい。

(1)　5桁の数 10000，11000，11100，11110，11111 のうち 3 の倍数を全て答えなさい。

(2)　万の位が a $(a \neq 0)$，千の位が b，百の位が c，十の位が d，一の位が e であるような 5 桁の数について，$a + b + c + d + e$ が 3 の倍数であるとき，もとの 5 桁の数も 3 の倍数であることを示しなさい。

(3)　ある 3 桁の数の左側（最高位）に 2，右側（一の位）に 1 を付け加えて 5 桁の数をつくったところ，この 5 桁の数はもとの 3 桁の数の倍数になった。この条件を満たすようなもとの 3 桁の数を，1 つ求めなさい。

(4)　(3)と同様に，ある 2 桁の数の両端に偶奇の異なる 2 つの自然数を付け加えて 4 桁の数をつくったところ，この 4 桁の数はもとの 2 桁の数の倍数になった。この条件を満たすような 4 桁の数のうち，最小のものを求めなさい。

【参考】100 以下の素数

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，
53，59，61，67，71，73，79，83，89，97

［解答例］

(1)　5 つの数のうち，$11100 = 3700 \times 3$ となり，11100 は 3 の倍数である。

(2)　この 5 桁の数は，$10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ と表すことができる。
$a + b + c + d + e$ が 3 の倍数であるから，$a + b + c + d + e = 3k$（k：整数）と表せるから

$$\begin{aligned} 10000a + 1000b + 100c + 10d + e &= 3(3333a + 333b + 33c + 3d) \\ &\qquad + a + b + c + d + e \\ &= 3(3333a + 333b + 33c + 3d + k) \end{aligned}$$

a，b，c，d，e，k は整数であるから，$3333a + 333b + 33c + 3d + k$ も整数である。
したがって，$a + b + c + d + e$ が 3 の倍数であるとき，もとの 5 桁の数も 3 の倍数である。

(3)　求める 3 桁の数を $x = 100a + 10b + c$ $(a \neq 0)$ とする。この 3 桁の数の左側（最高位）に 2，右側（一の位）に 1 を付け加えてつくった 5 桁の数は，

$20000 + 1000a + 100b + 10c + 1 = 20001 + 10x$

と表すことができる。この 5 桁の数が x の倍数となるためには，20001 の約数のうち，3 桁の数を調べればよい。20001 を素因数分解すると

$20001 = 3 \times 59 \times 113$

であるから，求める 3 桁の数は，113，$3 \times 59 = \underline{177}$，または $3 \times 113 = \underline{339}$ である。

(4)　求める 2 桁の数を $x = 10a + b$ とする。条件を満たす 4 桁の数で最小のものを求めればよいので，まず千の位を 1 として考える。

(i)　2 桁の数の両端に 1，2 を加えたとすると，4 桁の数は

$1000 + 100a + 10b + 2 = 1002 + 10x$

と表せる。(3)と同様に 1002 の約数を考えると $1002 = 2 \times 3 \times 167$ となり，2 桁の約数はないため，条件を満たさない。

(ii)　2 桁の数の両端に 1，4 を加えたとすると，4 桁の数は

$1000 + 100a + 10b + 4 = 1004 + 10x$

と表せる。(3)と同様に 1004 の約数を考えると $1004 = 2^2 \times 251$ となり，2 桁の約数はないため，条件を満たさない。

（iii）2 桁の数の両端に 1，6 を加えたとすると，4 桁の数は

$$1000 + 100a + 10b + 6 = 1006 + 10x$$

と表せる。(3)と同様に 1006 の約数を考えると $1006 = 2 \times 503$ となり，2 桁の約数はないため，条件を満たさない。

（iv）2 桁の数の両端に 1，8 を加えたとすると，4 桁の数は

$$1000 + 100a + 10b + 8 = 1008 + 10x$$

と表せる。(3)と同様に 1008 の約数を考えると $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ となり，2 桁の約数の中で最も小さいものは 12 となる。よって，条件を満たす 4 桁の数のうち最小のものは 1128 である。

[出題の意図]

倍数に着目した，整数に関する問題です。

(2)は 3 の倍数であることを示す際に，具体的な数値を用いるのではなく，文字を用いて論理的に示すことができるかどうかを見る問題です。(3)についてはもとの 3 桁の数にとらわれることなく，きちんと状況を読み取ることができれば解答にたどり着けます。(4)は，(3)を解く中で得たヒントを利用して，条件を満たす最小の 4 桁の数を見付ける問題でした。

[講評]

458 名中，428 名が選択し，22 名が完答しました。

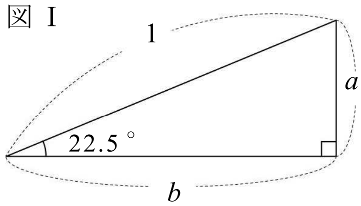
(2)は，$a + b + c + d + e = 3k$（k は整数）とおいてから 5 桁の数が 3 でくくれることを示せばよいのですが，式変形で遠回りをしている解答も多く見られました。効率よく簡潔に示す方法を考えることも大切です。(3)は追加された 20001 に注目すれば解答が導けます。答えまでたどり着けなくても，正しい方針が立てられた解答も多くありました。(4)は条件を満たす最小の数を求める際にいろいろと試す必要もあり，正答まで導けた答案は少なかったです。(3)，(4)では説明不足だったり，答えのみの解答も多く見られました。順序立てて説明した論理的な解答が作れるようにするとよいでしょう。

3　右の図のような２つの直角三角形について，斜辺の長さを１としたときの残りの辺の長さを，図Ⅰ，図Ⅱのように a，b，c，d とする。１辺の長さが１である正方形の折り紙を使って，別紙のように折り鶴を折る。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

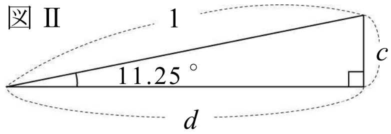
(1)　図Ⅲは，別紙のように鶴を折る際に，⑦でできたひし形を表したものである。図に示された対角線の長さ s を，a，b を用いて表しなさい。

(2)　図Ⅳは，完成した鶴を表したものである。図に示された羽の幅 t を，a，b，c，d を用いて表しなさい。また，その理由も説明しなさい。

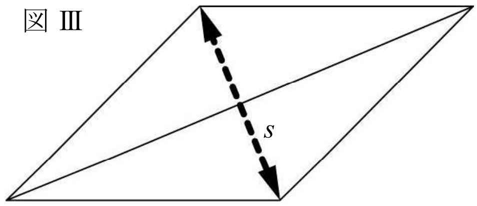
図Ⅰ



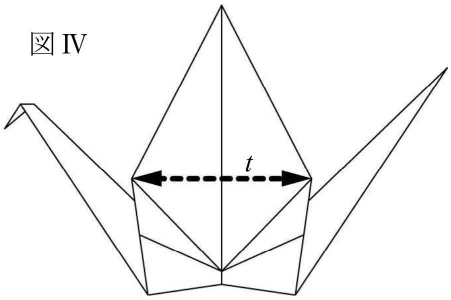
図Ⅱ



図Ⅲ

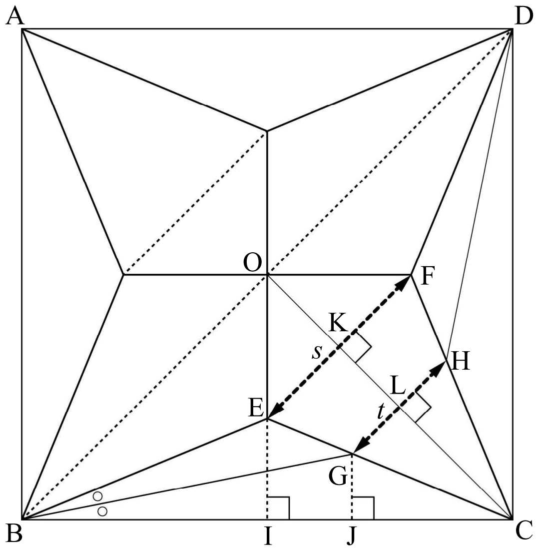


図Ⅳ



［解答例］

鶴を折った状態から紙を広げると、右の図のような展開図となる。求める s，t はそれぞれ EF，GH の長さとなる。折り目が角の二等分線になっていること等に注意して、以下 s，t を求める。



(1)　図において、△ECI ≡ △ECK ≡ △FCK であるから

$s = 2\mathrm{EI}$

となる。∠ECI = 22.5°，$\mathrm{CI} = \frac{1}{2}$ より

$a : b = \mathrm{EI} : \frac{1}{2}$　よって $\mathrm{EI} = \frac{a}{2b}$

したがって、$s = \frac{a}{b}$

(2)　図において，△GCJ ≡ △GCL ≡ △HCL であるから

$t = 2\mathrm{GJ}$

となる。ここで、$\mathrm{GJ} = x$ とおく。

∠GBJ = 11.25°，∠GCJ = 22.5° であるから

$\mathrm{BJ} = \frac{d}{c}x$，$\mathrm{CJ} = \frac{b}{a}x$

となるので、

$\mathrm{BC} = \mathrm{BJ} + \mathrm{CJ} = \frac{d}{c}x + \frac{b}{a}x = \frac{ad+cd}{ac}x$

条件より BC = 1 であるから、$\frac{ad+cd}{ac}x = 1$　すなわち $x = \frac{ac}{ad+bc}$

しがたって、$t = 2\mathrm{GJ} = \frac{2ac}{ad+bc}$

[出題の意図]

折り紙では，点と点を重ねるように折ったり線と線を重ねるように折ったりします。これを数学的に見ると，垂直二等分線や角の二等分線を作図していることとつながっているため，折り紙と数学には興味深い関係が広がっていることがわかります。

身近な折り鶴でも羽の幅を計算しようとすると試行錯誤が必要となり，根号を使った複雑な数値が出てくる場面もあります。その一端を味わってもらいたいと思い，出題しました。

[講評]

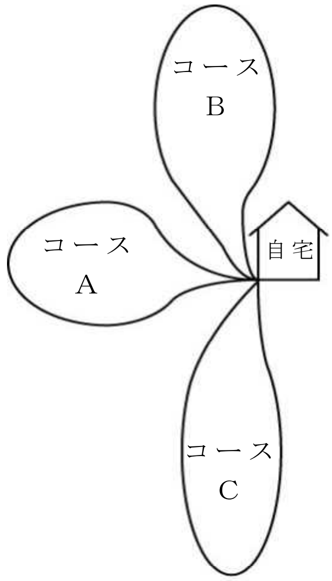
458 名中，317 名が選択し，23 名が完答しました。

(1), (2)の問題はともに，折った鶴を開いてみたときに求める長さがどこであるかを明確にする必要があります。図を示しながら考察していた答案も多く見られました。与えられた直角三角形の辺の比をうまく利用して値を求めることができた答案も複数ありました。

与えられた直角三角形の a，b，c，d はもとは決まった値となりますので，正答の形は一意的でありません。様々な形式の正答が見られたほか，根号を使って値を直接求めることのできたものや，(2)を a，b のみで表した素晴らしい答案もありました。

4　自宅を起点とするいくつかの周回コースを組み合わせることで，スタート地点とゴール地点がともに自宅となるようなジョギングコースをつくる。右の図において，コースＡは１周 1km，コースＢは１周 2km，コースＣは１周 3km である。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

ただし，各コースを逆に周回した場合は別のコースと考えるものとする。また，同じコースを何度通ってもよいが周回コースを途中で引き返すことはできないものとする。



2km のジョギングコースの例
・（Ａの時計回り）→（Ａの時計回り）
・（Ａの時計回り）→（Ａの反時計回り）
・（Ｂの反時計回り）　　　　　　など

(1)　3km のジョギングコースは全部で何通りつくれるか答えなさい。

(2)　右の図に加えて，１周 n km のコースＤを追加して，毎日違う 4km のジョギングコースを走っていたところ，88 日目で全てのコースを走り終えることができたという。n の値を求めなさい。ただし，n は自然数とする。

［解答例］

(1)　コースＡの時計回りをＡ１，反時計回りをＡ２
コースＢの時計回りをＢ１，反時計回りをＢ２
コースＣの時計回りをＣ１，反時計回りをＣ２　とする。

1km のコースはＡ１，Ａ２の２通りである。
2km のコースは，Ａ１Ａ２，Ａ２Ａ１，Ａ１Ａ１，Ａ２Ａ２，Ｂ１，Ｂ２の６通りである。
3km のコースは，1km ＋ 1km ＋ 1km　のとき，$2\cdot2\cdot2 = 8$ 通り
1km ＋ 2km　のとき，$2\cdot2 = 4$ 通り
2km ＋ 1km　のとき，$2\cdot2 = 4$ 通り
3km　のみのとき，Ｃ１，Ｃ２の２通り
よって，$8 + 4 + 4 + 2 = 18$ 通りとなる。

(2)　題意を満たすためには，コースＤを追加した結果，4km のコースが 88 通りとなればよい。

まず，コースＡ～Ｃまでで，4km のコースが何通りあるか考える。

1km ＋ 1km ＋ 1km ＋ 1km	のとき，$2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$ 通り	…①
1km ＋ 1km ＋ 2km	のとき，$2\cdot2\cdot2 = 8$ 通り	…②
1km ＋ 2km ＋ 1km	のとき，$2\cdot2\cdot2 = 8$ 通り	…③
2km ＋ 1km ＋ 1km	のとき，$2\cdot2\cdot2 = 8$ 通り	…④
2km ＋ 2km	のとき，$2\cdot2 = 4$ 通り	…⑤
3km ＋ 1km	のとき，$2\cdot2 = 4$ 通り	…⑥
1km ＋ 3km	のとき，$2\cdot2 = 4$ 通り	…⑦

よって，$16 + 8 + 8 + 8 + 4 + 4 + 4 = 52$ 通りとなる。

ここで，4km より長いコースＤを追加しても 4km のコースは増えないので，1，2，3，4km いずれかのコースＤを追加する場合を考えればよい。

4km のコースを追加すると，時計回り，反時計回りの２コース増える。
よって，合計 54 通り。

3km のコースを追加すると，上記の⑥と⑦のパターンがそれぞれ増え，8 コース

増加する。

よって，合計 60 通り。

2km のコースを追加すると，上記の②～④と⑤のパターンがそれぞれ増える。

②～④のパターンでは，それぞれ 8 通りで 24 通り増加し，⑤のパターンでは，コースＢとコースＤを使う場合が 8 通り増え，コースＤのみ使う場合が 4 通り増える。

よって，合計 88 通り。

1km のコースを追加すると，

①のパターンが　$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ 通り

②～④のパターンが　$(4 \cdot 4 \cdot 2) \cdot 3 = 96$ 通り

⑤のパターンが　4 通り

⑥と⑦のパターンが　$(2 \cdot 4) \cdot 2 = 16$ 通り

よって，合計 $256 + 96 + 4 + 16 = 372$ 通り

以上により，2km のコースを追加すればよい。

［出題の意図］

ジョギングという身近な題材を用いて，場合の数を論理的に数え上げることができるかどうかを問う問題です。(2)については，$n = 1$，2，3，4，そして $n > 4$ の場合について，きちんと記述できるかどうかを試しています。$n = 2$ 以外が不適になることは感覚的にわかると思いますが，その部分をしっかりと検証して欲しいという思いも込められています。

［講評］

458 名中，449 名が選択し，27 名が完答しました。

(1)については，樹形図などを用いて 273 名が正解することができました。(2)については，$n = 2$ という答えを導き出すことのできた解答は多く見られましたが，$n = 1$，3，4，そして $n > 4$ の場合が不適になることの検証が不十分な解答が多数ありました。$n = 2$ のときに 88 通りとなるのでそこで終わりにしたい気持ちはよくわかりますが，他の場合でも 88 通りになる可能性があるため，やはり検証が必要です。

5　Ａ君の所属するクラスで，ある試験を実施したところ次のような結果になった。このとき，Ａ君のクラスの人数と試験問題数の組合せとして考えられるものを，全て求めなさい。

結果
①　どの生徒も，試験問題のうち，ちょうど半数の問題に正解した。
②　それぞれの問題に対する正解者数は，全て等しかった。
③　クラス内のどの２人を選んでも，両者がともに正解した問題数は３問であった。

［解答例］

(1)　クラスの人数を $2a$ 人，試験問題数を $2b$ 問とする。生徒名を A_1，A_2，… A_{2a}，試験問題名を B_1，B_2，… B_{2b} と区別し，正解を○，不正解を×として考える。
A_1 が B_1，B_2，… B_b に正解している場合を例にすると，以下の表ができる。

	B_1	B_2	B_3	B_4	…	B_b	B_{b+1}	……			B_{2b}
A_1	○	○	○	○	…	○	×	×	×	…	×
A_2	○	○	○	×	…	×	×	×	○	…	○
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_{2a}	○	○	×	○	…	×	×	○	×	…	○

このとき，B_1，B_2，… B_b の列（表の左半分）にある○の数を数える。A_1 の行には b 個あり，結果③より，A_2，… A_{2a} の行にそれぞれ３個ずつあるので，合計で

$b+3(2a-1)$

また，結果②より，B_1，B_2，… B_{2b} の各列には同じ数ずつの○があるはずなので，表の左半分と右半分にある○の数は等しくなるから，表全体の○の数は，

$2\times\{b+3(2a-1)\}=2b+12a-6$　・・・※１

一方，結果①より，$2a$ 人の生徒がそれぞれ b 問の問題に正解しているから，表全体の○の数は

$2a\times b=2ab$　・・・※２

なお，※２を問題数の $2b$ で割ると，それぞれの問題に対する正解者数が a 人であることがわかる。以上の議論により，a，b は自然数であることが必要である。

※１，※２より，

$2b+12a-6=2ab$

$ab-6a-b+3=0$

$(a-1)(b-6)=3$

これを満たす自然数 a，b は $(a, b)=(2, 9)$，$(4, 7)$

したがって，クラスの人数４人，試験問題数 18 問　または
　　　　　　クラスの人数８人，試験問題数 14 問　となることが考えられる。

実際，これらを上記の表と同様に，○，×を用いて表してみると，

クラスの人数４人，試験問題数 18 問のとき

A_1	○○○	○○○	○○○	×××	×××	×××
A_2	○○○	×××	×××	×××	○○○	○○○
A_3	×××	○○○	×××	○○○	×××	○○○
A_4	×××	×××	○○○	○○○	○○○	×××

クラスの人数 8 人，試験問題数 14 問のとき

A_1	○○○	○○○	○××	×××	××
A_2	○○×	○××	×××	○×○	○○
A_3	○××	×○○	××○	○○×	×○
A_4	○×○	×××	○×○	×○○	○×
A_5	×○○	×○×	×○×	×○×	○○
A_6	×○×	××○	○○×	○○○	××
A_7	××○	○×○	×○○	××○	×○
A_8	×××	○○×	○○○	○××	○×

となり，実際にこの組合せで成り立つことがわかる。

ゆえに，　クラスの人数 4 人，試験問題数 18 問　または
クラスの人数 8 人，試験問題数 14 問

［出題の意図］

不定方程式を用いて条件を満たす整数を求める問題です。状況がわかりにくい場合は，条件を図や表に表すことで，条件が整理されていきます。この問題では，生徒数と試験問題数の関係が理解できれば，式を作ることができます。与えられた条件をもとに解答にたどり着くために試行錯誤して欲しいと考え，出題しました。表を作成して条件を視覚化し，見方を工夫していくことで，様々な解法が考えられる問題でした。

［講評］

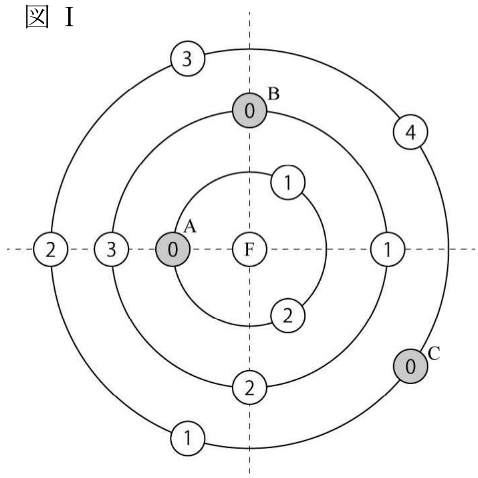
458 名中，166 名が選択し，1 名が完答しました。

条件である結果③から，生徒数が 6 人であると勘違いしてしまう解答が多くありました。表を作成してみると状況がわかると思います。また，最初から生徒数と問題数の関係式をつくろうとしている解答もありましたが，条件が整理しきれずに途中で頓挫してしまうケースが多かったようです。

完答に至らなかった解答の中には，表を作成して状況を正確に捉えられていたものや，集合の考えをもとに工夫をこらしたものなどもあり，出題者も感心しました。2 つある答えのうち 1 つまで求めることができ，あと一歩で完答となるような解答も多くありました。

6　ある恒星Fの周りを3つの惑星が時計回りに公転しており，それらをFから近い順にA，B，Cとする。今年の1月1日に観測したところ，惑星A，B，Cはそれぞれ図Ⅰの⓪に示す位置にあった。惑星が再びもとの位置に戻るまでの周期は，順に3年，4年，5年であり，図Ⅰの①～④は1年ごとの惑星の位置を示している。例えば3年後には，A，B，Cはそれぞれ⓪，③，③の位置にある。次の【条件】を満たすとき，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

図Ⅰ

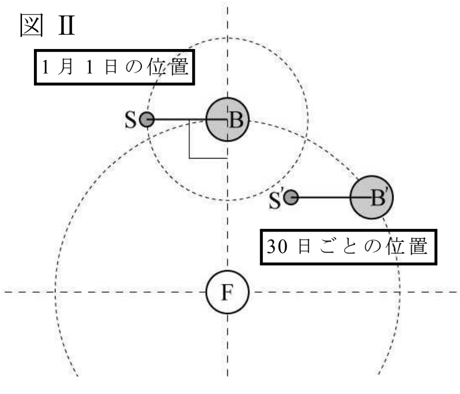


【条件】
・毎年1月1日に観測を行う。1年は365日で，うるう年はないものとする。
・惑星の速度はそれぞれ一定であり，惑星どうしがぶつかることはない。
・惑星の軌道は恒星Fを中心とした円であり，全ての軌道は同じ平面上にある。
・惑星A，B，Cが，それぞれ⓪，③，②または，⓪，①，②の位置にあるとき，3つの惑星が「直列する」という。

(1)　3つの惑星が初めて直列するのは今年の1月1日から何年後か求めなさい。また，最初に直列した後，その後何年ごとに直列するか，その周期のうち最小のものを求めなさい。

(2)　惑星Bの周りを衛星Sが反時計回りに公転している。今年の1月1日に観測されたBとSの位置は左下の図Ⅱのとおりであり，Sの動き方については，右下の【衛星Sの動き方】の条件を満たすものとする。このとき，惑星A，B，Cが直列し，さらに衛星Sも同一直線上に並ぶような場合を全て図示しなさい。また，なぜそうなるのかについても説明しなさい。

図Ⅱ



【衛星Sの動き方】
・衛星Sは惑星Bの周りを30日かけて周回する。
・今年の1月1日の衛星S，惑星Bの中心をS，Bとし，30日後の衛星S，惑星Bの中心をS'，B'とすると，SB // S'B' である。その後の衛星と惑星は，30日ごとにSBと平行になる位置をとる。
・衛星Sの速度は一定で，惑星とはぶつからない。
・衛星Sの軌道は惑星Bを中心とした円であり，惑星の軌道と同じ平面上にある。

［解答例］

(1)　3つの惑星が直列するのは，惑星Aが⓪に，惑星Bが①か③に，惑星Cが②に位置するときである。それぞれの惑星について，上記の位置にくる年数を考えると，惑星Aは3の倍数の年に，惑星Bは奇数の年に，惑星Cは5で割ると2余る年に限ることがわかる。すなわち，n年後に直列すると仮定すれば，

$n = 3a = 2b + 1 = 5c + 2$（a，b，cは0以上の整数）

と表すことができる。

ここで，$n = 5c + 2$で表される数を並べると，

2，7，12，17，17，22，27，32，37，…

となり，一の位は2または7である。条件より n は奇数であるから，n は

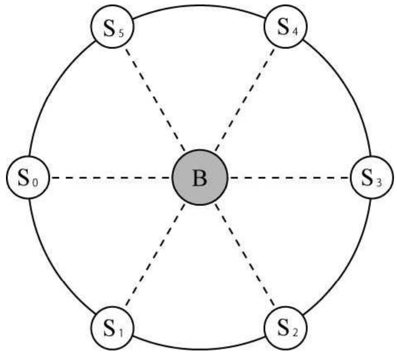
7，17，17，27，37，…

このうち，3の倍数で最小の数は27である。よって，最初に直列するのは27年後。

また，一度直列してから，惑星Aが⓪に，惑星Bが①か③に，惑星Cが②に再び位置するのは，順に3年，2年，5年ごとであるから，3，2，5の最小公倍数を考えると30年ごとに直列が起こる。したがって，直列する最小の周期は30年。

(2) 惑星Bに対する衛星Sの動きを考える。周期が30日であるから、図のように最初の位置を S_0 とすると、5日ごとに S_1，S_2，…，S_5 と動き30日後に再び S_0 に戻ることがわかる。

次に、1年ごとの衛星Sの動きを考えると、$365 = 30 \times 12 + 5$ より衛星Sは1年ごとに12周と5日分動くことになる。よって、1年後の衛星Sの位置は図の S_1 となり、同様に考えると2年後には S_2 の位置に動く。以下、1年ごとに S_3，S_4，S_5 と動き、6年後に再び S_0 に戻る。



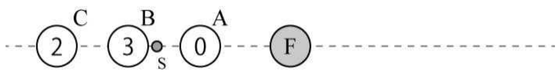
ここで、惑星が直列するときに衛星Sも同時に直列するのは、惑星Bに対して衛星Sが S_0 または S_3 に位置する場合のみで、これらは順に整数 m を用いて、$6m$ または $(6m + 3)$ 年後に起こることがわかる。

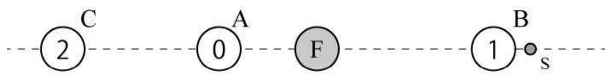
(1) より、直列する年数は整数 k を用いて $(30k + 27)$ 年と表せる。

$30k + 27 = 6(5k + 4) + 3$

と変形でき、$5k + 4$ は整数であるから、このときの衛星Sの位置は S_3 に限る。

よって考えられる直列の場合は、以下の2通り。





［出題の意図］

惑星や衛星といった身近な題材を用いて，与えられた課題に対して情報を整理し，論理的に解決する能力を試す問題です。(1)では，直列するまでの年数を順に数えて求めることもできますが，それぞれの惑星が直列可能な位置にくる年数の条件に着目して考察して欲しいという思いで出題しています。(2)では，1年ごとに衛星Sの位置がずれるところがポイントです。惑星の位置を1年ごとに観察しているので，衛星の位置についても年単位で考えることで，(1)の内容を活用しやすくなります。また，衛星Sは6年ごとに今年と同じ位置にくることがわかりますが，直列する年数は6の倍数にならないこともポイントとなります。

［講評］

458名中，324名が選択し，11名が完答しました。

(1)については，求める過程を論述できていない答えのみの解答が多く見られました。また，直列する年数の条件について明記されているものの，どのように導いたかが整理されていない解答もありました。一方で，書き並べた数の周期性に着目したものや，不定方程式を用いて論理的に導いた素晴らしい解答も見られました。(2)では，衛星Sが惑星Bの右隣に位置する場合に気付いていない解答が見受けられました。また，具体的に27年後と57年後についてのみ説明した解答が多く見られましたが，30年ごとに衛星Sが惑星Bの右隣に位置することを示す必要があります。