平成２８年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　　意　　事　　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚をすべて提出してください。

1　おつりがないようにぴったり支払う方法について考える。1円を支払う方法は，1円硬貨を1枚使う1通りである。5円を支払う方法は，5円硬貨を1枚使う方法と1円硬貨を5枚使う方法の2通りがある。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　50円をぴったり支払う方法は何通りあるか，答えなさい。

(2)　硬貨が全部で27枚あり，硬貨の種類は，100円硬貨，50円硬貨，10円硬貨のいずれかである。この27枚のすべてを用いて500円をぴったり支払うことができるか。支払うことができる場合はそれぞれの硬貨の枚数を，支払うことができない場合はなぜ支払うことができないのかを示しなさい。ただし，枚数が0枚となる硬貨の種類があってもよいものとする。

(3)　新しい硬貨として7円硬貨の発行をしたとする。5円硬貨と7円硬貨を用いて，ぴったり支払うことができない金額の最大値を求めなさい。ただし，用いる硬貨はどちらか1種類だけでもよいものとする。

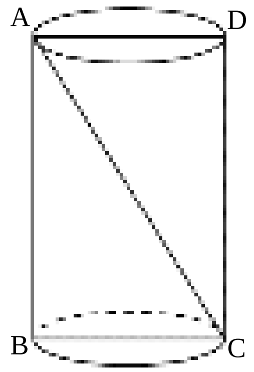
2　図Ⅰの直円柱において，ADとBCはそれぞれ上面と底面の直径を表しており，4点A,B,C,Dは同一平面上にある。2点ACを通り，平面ABCDに垂直な面でこの直円柱を切るとその断面は図Ⅱのようになった。

AC = $2a$，AD = BC = $2b$とするとき，この断面の面積Sは円周率πを用いて

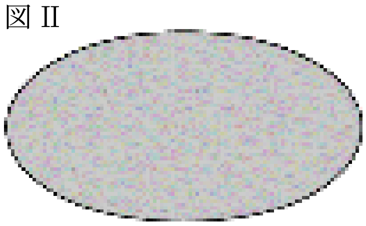
$S = \pi ab$

と表せることを，図Ⅰの直円柱を用いて説明しなさい。必要があれば，次の【参考】を利用してもよい。

図Ⅰ

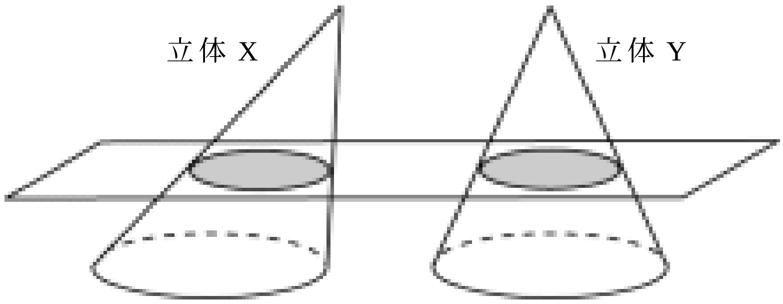


図Ⅱ



【参考】カヴァリエリの原理

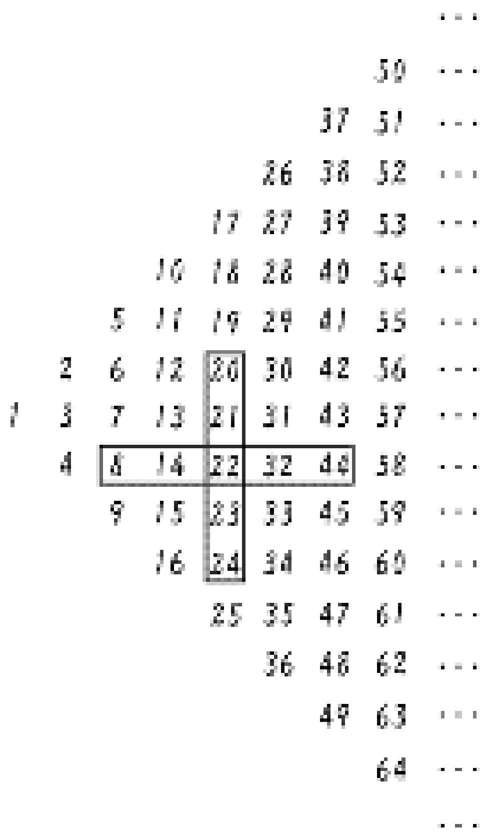
2つの立体X，Yが平行な2つの平面に挟まれているとする。
この2つの平面に平行な任意の平面に対し，立体Xとの交わりの部分の面積と立体Yとの交わりの部分の面積が等しいならば，立体Xと立体Yの体積は等しい。



3　自然数 1，2，3，… を右の図のように規則的に並べる。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　右の図において，自然数 90 の右隣にある自然数を求めなさい。

(2)　右の図のように，　で囲んだ 9 つの自然数について，
(横に並んだ 5 数の和)－(縦に並んだ 5 数の和)
の値が常に一定となることを示しなさい。

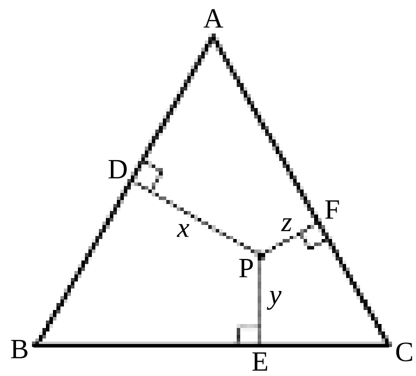


4　1 辺の長さが a の正三角形 ABC がある。正三角形 ABC の内部の点 P から各辺に垂線を下ろし，辺 AB，BC，CA との交点を D，E，F とする。PD，PE，PF の長さを x，y，z とするとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　正三角形内の任意の点 P について，$x+y+z$ の値が一定であることを，三角形の面積に着目して示しなさい。

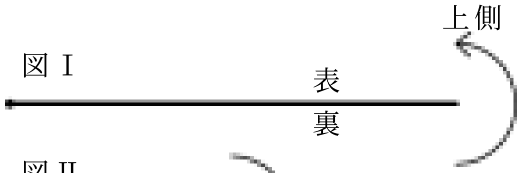
(2)　三角形 BED の面積を，x，y を用いて表しなさい。

(3)　$x^2+y^2+z^2$ の値が一定となるように点 P を動かしたとき，三角形 BED，三角形 CFE，三角形 ADF の面積の和も一定となることを示しなさい。

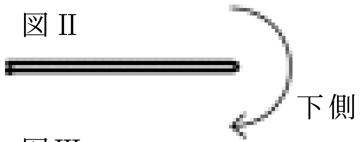


5　表を上にした細長い紙を，左端の点を常に固定したまま，ちょうど半分のところで上側か下側のどちらかに折って重ねる。右の図Ⅰ，図Ⅱ，図Ⅲは，上側，下側の順に折った様子を示している。図Ⅲの状態から最初の左端の点を固定したまま紙を開くと折り目は3個あり，図Ⅳのように，左から，山折り，谷折り，谷折りとなる。なお，山折りとは紙の裏どうしが重なる折り方であり，谷折りとは紙の表どうしが重なる折り方である。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。必要があれば別紙を細く切るなどして利用してもよい。

図Ⅰ

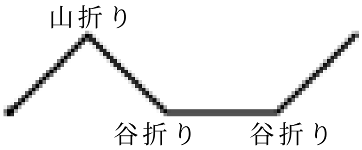


図Ⅱ



図Ⅲ

図Ⅳ



(1)　次の①，②の問いに答えなさい。

①　上側，上側，下側，上側の順に4回折って広げたとき，山折りと谷折りの数をそれぞれ求めなさい。

②　下側，上側，上側，下側の順に4回折って広げたとき，山折りと谷折りの数をそれぞれ求めなさい。

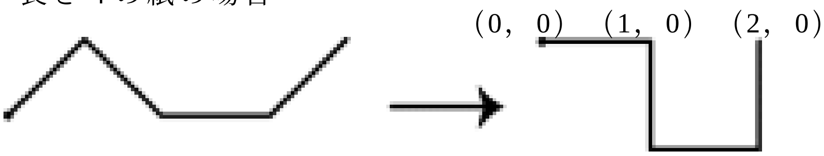
(2)　上側か下側のどちらかに，あわせて7回折って広げたところ，左から10番目の折り目が山折りだった。次の①，②の問いに，理由も含めて答えなさい。

①　左から10番目の折り目は，7回のうち何回目に折ったときにできたものか。

②　左から10番目の折り目は，上側，下側のどちらに折ってできたものか。

(3)　長さ2^7の紙を上，上，下，上，上，下，下の順に7回折る。その後，折り目をすべて90°にして，最初の左端の点をxy平面の原点，左端からみて最初の折り目をxy平面の点(1，0)に置くと，座標平面上にきれいに広げることができた。紙の右端の点の座標を求めなさい。

【参考】長さ4の紙の場合



6　男子20人と女子20人のあわせて40人のそれぞれが，1から10までの自然数のうち1つ以上5つ以下の異なる数字を選んだ。その後，男子と女子1人ずつが組になってそれぞれが選んだ数を確認し合ったところ，どの組を作っても男女2人で一致する数字が1つ以上あった。このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　ある女子が1と2の2つの数字のみを選んでいたとする。このとき，1の数字を選んだ男子の人数と2の数字を選んだ男子の人数のうち，どちらか一方は必ず10人以上であることを示しなさい。

(2)　1人の女子が選んだ数字のうち，どれか1つは必ず4人以上の男子が選んでいることを示しなさい。

(3)　1から10の数字の中で，男子3人以上と女子3人以上が選んだ数字が必ず存在することを示しなさい。

＜別紙＞　この用紙を細く切るなどして利用してもよい。