平成２８年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

今年度の数学コンテストは７月２７日（水）に実施され、参加者は３４１名（１８校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１９回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞６名、奨励賞１６名、アイデア賞１７名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞２３名、アイデア賞１０名）の計４０名であった。

前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４校を会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓やはさみ、あらかじめ配付した補助資料の使用も認めている。

今回は、直円柱を斜めに切断したときの断面積を求める問題や、ある金額を何種類かの硬貨を用いて支払う方法について考察する問題、また、一定の規則にしたがって並んだ自然数について成り立つ性質を考察する問題などに取り組んでもらった。これらの問題では、まず試行錯誤を十分行うことが重要であり、試行錯誤する中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。また、大問５の細長い紙を何回か折ったときの折り目についての問題では、問題用紙とともに配付した別紙を実際に折ったり広げたりすることで、折り目のもつ性質について考察する問題に取り組んでもらった。コンテスト会場では、解答への見通しを立てるために実際に折った紙を眺め、イメージをふくらませながら取り組む様子が多く見られた。ほとんどの生徒が解答時間の３時間に集中し、最後まで粘り強く問題に向き合っていた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する、よい機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後様々な教科を学習していく上でよい経験になっていると思われる。また、来年度はこの群馬県高校生数学コンテストが２０回目を迎える。今後は長年培ってきたコンテストのよさを維持しながら更に継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会としてより一層充実させていきたい。

○　参加生徒の内訳

学年（中等）	１年（４年）	２年（５年）	３年（６年）
男	１２７	１４２	5
女	5	５８	4
計	１３２	２００	9

合　計　３４１名

※次のページ以降に平成２８年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は４枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。
4　解答用紙には，選択した問題の番号，コンテスト番号，氏名を必ず記入してください。問題番号，コンテスト番号，氏名のいずれかが記入されていない解答用紙は，採点の対象外となることがあります。
5　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
6　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
7　コンテスト終了後，解答用紙４枚をすべて提出してください。

Ⅱ　問題及び解答例

1　おつりがないようにぴったり支払う方法について考える。1円を支払う方法は，1円硬貨を1枚使う1通りである。5円を支払う方法は，5円硬貨を1枚使う方法と1円硬貨を5枚使う方法の2通りがある。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　50円をぴったり支払う方法は何通りあるか，答えなさい。

(2)　硬貨が全部で27枚あり，硬貨の種類は，100円硬貨，50円硬貨，10円硬貨のいずれかである。この27枚のすべてを用いて500円をぴったり支払うことができるか。支払うことができる場合はそれぞれの硬貨の枚数を，支払うことができない場合はなぜ支払うことができないのかを示しなさい。ただし，枚数が0枚となる硬貨の種類があってもよいものとする。

(3)　新しい硬貨として7円硬貨の発行をしたとする。5円硬貨と7円硬貨を用いて，ぴったり支払うことができない金額の最大値を求めなさい。ただし，用いる硬貨はどちらか1種類だけでもよいものとする。

［解答例］

(1)　50円をぴったり支払うために使用が考えられる硬貨は，50円硬貨，10円硬貨，5円硬貨，1円硬貨である。使用する硬貨の合計が50円を越えないように，50円硬貨，10円硬貨，5円硬貨の枚数の組合せを決めれば，残りの1円硬貨の枚数も決まるので，50円硬貨，10円硬貨，5円硬貨の枚数について考える。

50円硬貨	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10円硬貨	0	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5円硬貨	0	0	0	1	2	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3

50円硬貨	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10円硬貨	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5円硬貨	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

表より，37通りとなる。

(2)　100円硬貨をx枚，50円硬貨をy枚，10円硬貨をz枚使用したとする。このとき，

x，y，zは0以上の整数　・・・①

$x + y + z = 27$　・・・②

$100x + 50y + 10z = 500$　・・・③

③÷10－②より

$9x + 4y = 23$

となる。よって①から

$4y = 23 - 9x \geqq 0$

であることにより，これを満たす0以上の整数xは

$x = 0, 1, 2$

このそれぞれの場合について考える。

(i) $x = 0$のとき

$$\begin{cases} y + z = 27 \\ 5y + z = 50 \end{cases}$$

これを解いて，$y = \dfrac{23}{4}$，$z = \dfrac{85}{4}$　これは①を満たさないので，不適。

(ii) $x = 1$のとき

$$\begin{cases} y + z = 26 \\ 5y + z = 40 \end{cases}$$

これを解いて，$y = \dfrac{7}{2}$，$z = \dfrac{45}{2}$　これは①を満たさないので，不適。

(iii) $x=2$ のとき

$$\begin{cases} y+z=25 \\ 5y+z=30 \end{cases}$$

これを解いて， $y=\frac{5}{4}$, $z=\frac{95}{4}$ 　これは①を満たさないので，不適。

(i)～(iii)より，この条件では支払うことができない。

(3) 5円硬貨を a 枚，7円硬貨を b 枚用いることとし，支払う金額を n 円とすると

$n=5a+7b$ 　(ただし，a，b は0以上の整数)

と表せる。この等式において，次の①～⑤が成り立つ。

① a を $a+3$ に置き換え，b を $b-2$ に置き換えると，n は1増える。
② a を $a-1$ に置き換え，b を $b+1$ に置き換えると，n は2増える。
③ a を $a+2$ に置き換え，b を $b-1$ に置き換えると，n は3増える。
④ a を $a-2$ に置き換え，b を $b+2$ に置き換えると，n は4増える。
⑤ a を $a+1$ に置き換え，b はそのまま変わらないと，n は5増える。

a，b をある数に設定した後，①～⑤を繰り返すと n を限りなく増やすことができる。a，b は0以上の整数であり，a，b を $a-2$，$b-2$ に置き換える可能性を考えると，初めに設定する a，b は，$a=2$，$b=2$ とすればよい。

$a=2$，$b=2$ のとき，$n=24$ となるから，24以上のすべての整数 n をつくることができる。

したがって，支払うことができない最大の金額 n については

$0 \leqq n \leqq 23$

で考えればよい。まず $n=23$ とすると

$5a+7b=23$

a は0以上の整数であるから

$5a=23-7b \geqq 0$

これを満たす0以上の整数 b は

$b=0$，1，2，3

このそれぞれの場合について考えると

(i) $b=0$ のとき $a=\frac{23}{5}$ 　(ii) $b=1$ のとき $a=\frac{16}{5}$

(i) $b=2$ のとき $a=\frac{9}{5}$ 　(iv) $b=3$ のとき $a=\frac{2}{5}$

(i)～(iv)のいずれも a が0以上の整数とならないので，不適。

したがって，5円硬貨と7円硬貨を用いて支払うことのできない最大の金額は，23円である。

［出題の意図］

お金という身近な題材を用いて，与えられた課題に対して論理的に考える力を問う問題です。（１）については，50円というわずかな金額の支払い方で，37通りもあることを知って欲しいという思いから出題しました。（２）については，すべての場合の数を書き出して調べることもできますが，使用できる硬貨の枚数を限定して考えるなど，工夫した解き方を見つけて欲しいと思います。（３）については，まず具体的な例をもとに試行錯誤してみることが大切です。具体的に書いてみて，答えとなる金額の予想ができたら，そこからどのように示していくか，その示し方について考えてもらう出題でした。

［講評］

３４１名中，３２４名が選択し，３名が完答しました。

（１）については，樹形図や表などを利用して丁寧に数え上げれば正解にたどり着けます。正解者は１０１名でした。（２）については説明が不十分な解答が多く見られました。詳しく説明する答案を作るよう心がけるとよいと思われます。また，（３）については２３円が答えになると記述した解答はいくつもありましたが，正答といえる解答になるにはもう一歩でした。２４円以上はすべて支払うことができる説明と，２３円は支払うことができない説明をともに書く必要があります。２３円という答えを見つけて安心せず，その答えが正しいことを論理的かつわかりやすく伝える意識をもって答案づくりをするとよいでしょう。

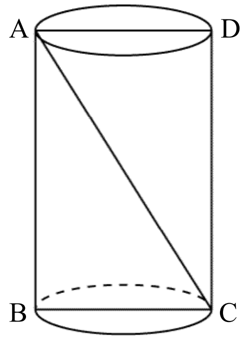
2　図Ⅰの直円柱において，AD と BC はそれぞれ上面と底面の直径を表しており，4 点 A,B,C,D は同一平面上にある。2 点 AC を通り，平面 ABCD に垂直な面でこの直円柱を切るとその断面は図Ⅱのようになった。

$AC = 2a$，$AD = BC = 2b$ とするとき，この断面の面積 S は円周率 π を用いて

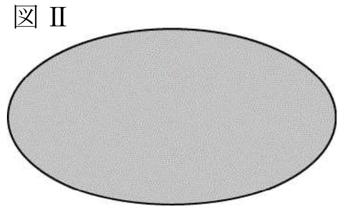
$S = \pi\ ab$

と表せることを，図Ⅰの直円柱を用いて説明しなさい。必要があれば，次の【参考】を利用してもよい。

図Ⅰ

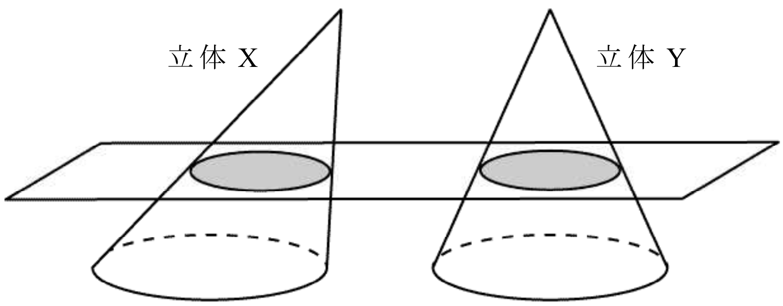


図Ⅱ



【参考】カヴァリエリの原理

2 つの立体 X，Y が平行な 2 つの平面に挟まれているとする。
この 2 つの平面に平行な任意の平面に対し，立体 X との交わりの部分の面積と立体 Y との交わりの部分の面積が等しいならば，立体 X と立体 Y の体積は等しい。



［解答例］

図Ⅰにおいて，D から線分 AC に垂線 DE を下ろすと

$\triangle DAE \backsim \triangle CAD$ より

$$\frac{DE}{AD} = \frac{CD}{AC}$$

よって，　$\mathrm{DE} = \dfrac{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}$

$= \dfrac{2b}{2a}\ \mathrm{CD}$

$= \dfrac{b}{a}\ \mathrm{CD}$　　・・・①

したがって，この直円柱の体積をVとすると

$\mathrm{V} = b^2 \times \pi \times \mathrm{CD} = b^2 \mathrm{CD}\ \pi$　　・・・②

ここで，切断した2つの立体を，直円柱の底面と上面が重なるように結合すると，図Ⅲのようになる。

図Ⅱの図形の面積をSとすると，図Ⅲで表された立体の体積Vは，カヴァリエリの原理から，

$\mathrm{V} = \mathrm{S} \times \mathrm{DE}$　・・・③

①～③より

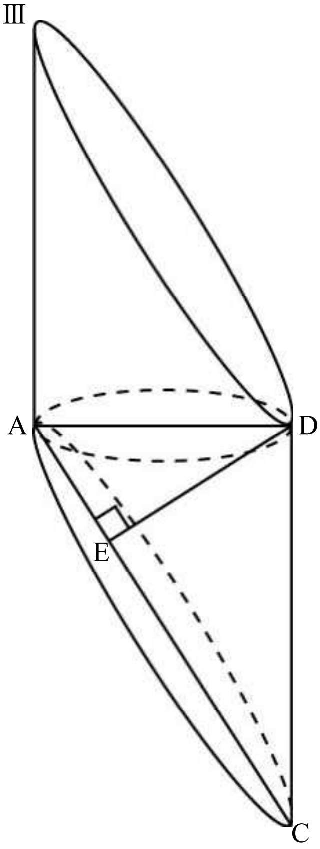
$\mathrm{S} \times \dfrac{b}{a}\ \mathrm{CD} = b^2\ \mathrm{CD}\ \pi$

よって

$\mathrm{S} = \pi\ ab$

となる。

図Ⅲ



［出題の意図］

楕円の面積公式を，直円柱の切断面を使って導出する問題です。問題中の図Ⅱの図形を楕円といい，直交する２つの軸のうち，長い方を長軸（長径），短い方を短軸（短径）といいます。図Ⅱの楕円における長軸の長さは $2a$，短軸の長さは $2b$ となっており，その面積は πab と表せます。

楕円の面積を導く方法はいくつかあります。高校数学では，積分を利用して楕円の面積を考察するのが一般的ですが，今回は積分を用いずに，切断面に楕円が現れる直円柱の体積を利用する方法に関する問題として出題しました。

［講評］

３４１名中８１名が選択し，３名が完答しました。

図Ｉの直円柱の体積に着目した，よい解答が多く見られました。この問題の最大のポイントは，切り取った図Ⅱの楕円の面積Sを用いて直円柱の体積を表すことです。直円柱を切断し，組み替えて別の立体をつくると，直円柱の体積が楕円の面積Sを用いて表せます。体積をSで表すところでつまずいてしまい，正解に至らなかった惜しい解答がいくつも見られました。完答した解答は，いずれも論理的で，図形への着眼点が素晴らしい解答でした。

3　自然数 1，2，3，… を右の図のように規則的に並べる。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　右の図において，自然数 90 の右隣にある自然数を求めなさい。

(2)　右の図のように，　で囲んだ 9 つの自然数について，

(横に並んだ 5 数の和)－(縦に並んだ 5 数の和)

の値が常に一定となることを示しなさい。

								…
							50	…
						37	51	…
					26	38	52	…
				17	27	39	53	…
			10	18	28	40	54	…
		5	11	19	29	41	55	…
	2	6	12	20	30	42	56	…
1	3	7	13	21	31	43	57	…
	4	8	14	22	32	44	58	…
		9	15	23	33	45	59	…
			16	24	34	46	60	…
				25	35	47	61	…
					36	48	62	…
						49	63	…
							64	…
								…

［解答例］

(1)　縦の列（以下，列という）の一番下の数は平方数となっているので

$9^2 < 90 \leqq 10^2$

より，自然数 90 は 82 ～ 100 の 19 個の自然数からなる列に含まれている。

ここで，自然数 n が，m 個の数からなる列に含まれているとする。m 個の数からなる列の右隣の列には $m + 2$ 個の自然数があり，自然数 n の右隣にある自然数は

$n + m + 1$

と表せることがわかる。

よって，90 の右隣にある自然数は

$90 + 19 + 1 = 110$

である。

(2)　で囲んだ 9 つの自然数を右の図のようにおく。自然数 a が m 個の数からなる列に含まれているとすると，(1)と同様に

		c-2		
		c-1		
a	b	c	d	e
		c+1		
		c+2		

$b = a + m + 1$

$c = b + (m + 2) + 1 = a + 2m + 4$

$d = c + (m + 4) + 1 = a + 3m + 9$

$e = d + (m + 6) + 1 = a + 4m + 16$

よって

(横に並んだ 5 数の和)＝ $a + b + c + d + e$

＝ $5a + 10m + 30$

(縦に並んだ 5 数の和)＝ $(c - 2) + (c - 1) + c + (c + 1) + (c + 2)$

＝ $5a + 10m + 20$

したがって

(横に並んだ 5 数の和)－(縦に並んだ 5 数の和)＝ 10

となり，この値は常に一定であるといえる。

［出題の意図］

与えられた数の配列に規則性を見つけ，より効率的に解決する力を問う問題です。左右で隣り合った数の規則性を具体的な結果から類推し，それを論理的に表せるかどうかが，この問題のポイントです。

［講評］

３４１名中３３４名が選択し，２６名が完答しました。

考え方が正しいと思われる解答は多数ありましたが，左右で隣り合った数の規則性を，論理的に示せているかどうかを採点のポイントとしました。

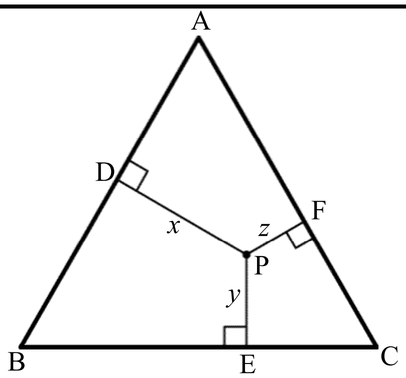
左から n 番目の縦の列を第 n 列として，自然数 N が第 n 列に属しているとすると，自然数 N の右隣の数は $N+2n$ と表せる。この方針で解いている答案が多くありましたが，$2n$ の根拠を論理的に示すことのできた答案のみを正解としました。

4　1辺の長さが a の正三角形 ABC がある。正三角形 ABC の内部の点 P から各辺に垂線を下ろし，辺 AB，BC，CA との交点を D，E，F とする。PD，PE，PF の長さを x，y，z とするとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　正三角形内の任意の点 P について，$x+y+z$ の値が一定であることを，三角形の面積に着目して示しなさい。

(2)　三角形 BED の面積を，x，y を用いて表しなさい。

(3)　$x^2+y^2+z^2$ の値が一定となるように点 P を動かしたとき，三角形 BED，三角形 CFE，三角形 ADF の面積の和も一定となることを示しなさい。



［解答例］

(1)　正三角形 ABC の面積を S とすると

$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=\mathrm{S}$$

$$\frac{1}{2}a(x+y+z)=\mathrm{S}$$

よって

$$x+y+z=\frac{2\mathrm{S}}{a}$$

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}$$

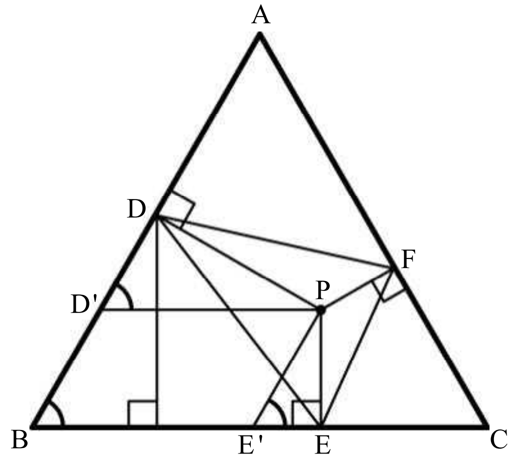
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

したがって，正三角形内の任意の点から各辺までの距離の和は一定である。
（なお，その距離の和は正三角形の高さに等しい。）

(2)　正三角形の辺 AB，BC 上に

$$BC \parallel D'P \quad , \quad AB \parallel PE'$$

を満たすような点 D'，E'をとる。



△ BED について

$$BD=DD'+BD'=DD'+E'P$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}y$$
$$BE=BE'+E'E=D'P+E'E$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y$$

よって

$$\triangle BED=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}BD$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2y)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}(2x+y)(x+2y)$$

(3)　$x^2+y^2+z^2$ の値が一定であるから

$x^2+y^2+z^2=k$　　（$k>0$，k は定数）　とおける。

(1), (2)より，3 つの三角形の面積の和を S'とすると

$$S'=\triangle BED+\triangle CFE+\triangle ADF$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}(2x+y)(x+2y)+\frac{\sqrt{3}}{12}(2y+z)(y+2z)+\frac{\sqrt{3}}{12}(2z+x)(z+2x)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}(4x^2+4y^2+4z^2+5xy+5yz+5zx)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{\frac{5}{2}(x+y+z)^2+\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\frac{3}{2}k\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{32}(5a^2+4k)$$

a，k はともに定数であるから $\frac{\sqrt{3}}{32}(5a^2+4k)$ も定数である。

したがって，$x^2+y^2+z^2$ の値が一定となるように点 P を動かしたとき，△ BED，△ CFE，△ ADF の面積の和も一定となる。

［出題の意図］

平面幾何の分野から，三角形の面積についての出題です。（１）は過去の数学コンテストでも題材として取り上げられた，ヴィヴィアーニの定理の証明です。ヴィヴィアーニの定理は様々な活用が考えられますが，本問ではこの定理に「垂線の平方和が一定」という条件を加えて，3 つの三角形の面積の和について考察しています。幾何の問題では，どの道具を使うのか迷う問題があります。問題に合わせた方策を適切に選択するために，試行錯誤を繰り返してみることも重要になります。

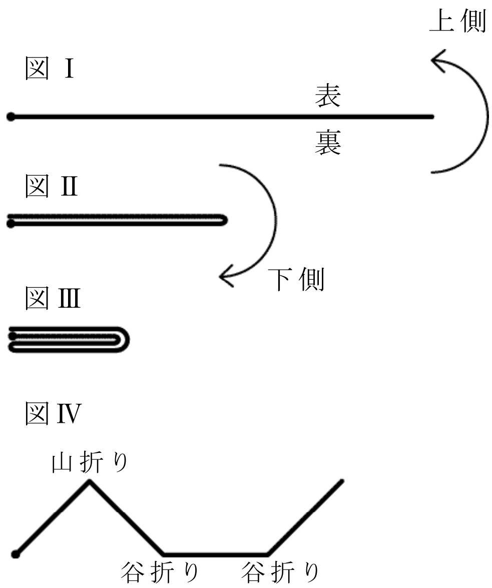
［講評］

３４１名中２４０名が選択し，８名が完答しました。

完答した解答は，補助線を引いて三平方の定理を活用したものや，相似比を利用したもの，三角関数を用いたものなど様々でしたが，どれも素晴らしい解答でした。

（１）では正三角形の一辺の長さが a と与えられていることから，$x+y+z$ が三角形の高さ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ と一致することがわかります。ここまでは半数程度の選択者が解答できていました。また，本問では，（２）の結果を利用しなくても，（３）を導くことができます。（２）でつまずいても，（３）に取り組んでいる解答もいくつか見られました。あきらめず，粘り強く取り組む姿勢は素晴らしいです。

5　表を上にした細長い紙を，左端の点を常に固定したまま，ちょうど半分のところで上側か下側のどちらかに折って重ねる。右の図Ⅰ，図Ⅱ，図Ⅲは，上側，下側の順に折った様子を示している。図Ⅲの状態から最初の左端の点を固定したまま紙を開くと折り目は3個あり，図Ⅳのように，左から，山折り，谷折り，谷折りとなる。なお，山折りとは紙の裏どうしが重なる折り方であり，谷折りとは紙の表どうしが重なる折り方である。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。必要があれば別紙を細く切るなどして利用してもよい。



(1)　次の①，②の問いに答えなさい。

①　上側，上側，下側，上側の順に4回折って広げたとき，山折りと谷折りの数をそれぞれ求めなさい。

②　下側，上側，上側，下側の順に4回折って広げたとき，山折りと谷折りの数をそれぞれ求めなさい。

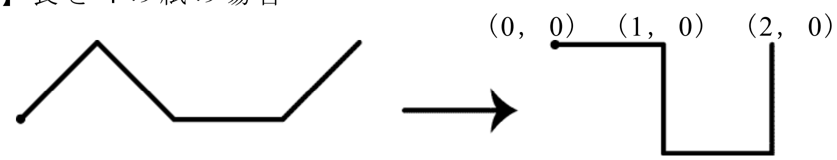
(2)　上側か下側のどちらかに，あわせて7回折って広げたところ，左から10番目の折り目が山折りだった。次の①，②の問いに，理由も含めて答えなさい。

①　左から10番目の折り目は，7回のうち何回目に折ったときにできたものか。

②　左から10番目の折り目は，上側，下側のどちらに折ってできたものか。

(3)　長さ 2^7 の紙を上，上，下，上，上，下，下の順に7回折る。その後，折り目をすべて90°にして，最初の左端の点を xy 平面の原点，左端からみて最初の折り目を xy 平面の点(1，0)に置くと，座標平面上にきれいに広げることができた。紙の右端の点の座標を求めなさい。

【参考】長さ4の紙の場合



［解答例］

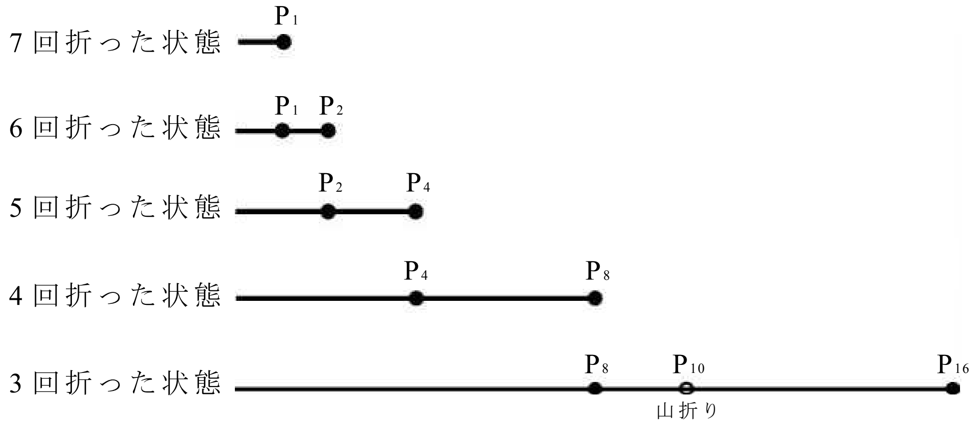
(1)　4回折って広げたときの，左から k 番目の折り目を P_k とする。1回折ると，紙は2つの区間に分かれるので，4回折ると 2^4 の区間に分かれる。このとき，折り目の数は $2^4-1=15$ 個となる。

1回目の折り目 P_8 に着目する。P_8 の左に山折りが a 個，谷折りが b 個あるとすると，P_8 の右には P_8 の左と逆の折り目が付くため，山折りが b 個，谷折りが a 個現れる。ゆえに，1回目の折り目 P_8 以外の折り目は山折りと谷折りの数が $a+b$ で等しくなる。

①は1回目の折り方が上側なので P_8 は谷折りとなるため，山折りの数が谷折りの数より1回少ない。折り目の総数は15個なので，山折りが7回，谷折りが8回である。

②は1回目の折り方が下側なので P_8 は山折りとなるため，山折りの数が谷折りの数より1回少ない。折り目の総数が15個なので，山折りが8回，谷折りが7回である。

(2)　7回折って広げたときの，左から k 番目の折り目を P_k とする。



ここで，3回折った状態と4回折った状態を比較して考えると，P_8 が中心となって P_{10} と P_6 が重なる。P_{10} が山折りであるから，P_6 の折り目は逆となり谷折りである。

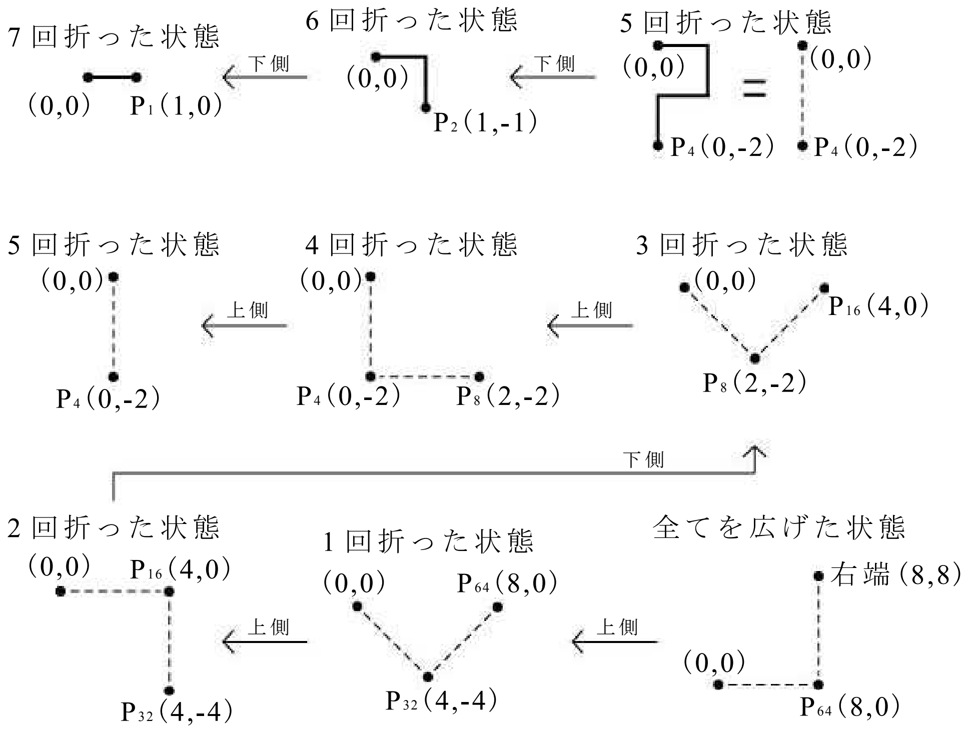
さらに，4回折った状態と5回折った状態を比較して考えると，P_4 が中心となって P_6 と P_2 が重なる。P_6 が谷折りであるから，P_2 の折り目は逆となり山折りである。

以上により，①，②の問いについて考察すると，次の通り。

①　折り目 P_{10} は，P_2 と P_{10} が重なって折られた6回目にできたものである。

②　P_2 が山折りなので，同時に折られた P_{10} は下側に折ってできたものである。

(3)　7回折った状態から逆に，下，下，上，上，下，上，上の順に広げていく。ただし，点線で表した部分は正確な折り目の記載を省略してある。



よって，右端の点の座標は（8，8）である。

［出題の意図］

細長い紙を半分，半分と折った後，その紙を開くと，山折りと谷折りが現れます。その現れ方は一見不規則に見えますが，そこには規則や性質が隠されています。自分で具体的に作業をしながら，その規則を発見して欲しいという思いで，出題しました。

本問では半分に折るときに，上側と下側を組合せましたが，常に上側（常に下側でも同じ）に何回か折って（３）のように折り目をすべて９０゜にして広げた図形は，「ドラゴン」と呼ばれるフラクタル図形（自己相似図形）としても知られています。紙を半分に折って広げるだけですが，考えていくとなかなか奥深い話題です。

［講評］

３４１名中２５１名が選択し，３名が完答しました。

初めは作業をしながら仕組みを考えた答案が多くありました。作業の中から規則性を見つけたり，その規則性を答案に表すところで工夫をしてくれた解答も見受けられました。（１）では１回折った状態から考えて場合分けができた答案がありました。また，（２）や（３）では，固定された左端から折り目までの長さで分析した答案や，折った状態からスタートして順に広げることにより，性質を明らかにしている素晴らしい答案が見受けられました。

6　男子 20 人と女子 20 人のあわせて 40 人のそれぞれが，1 から 10 までの自然数のうち 1 つ以上 5 つ以下の異なる数字を選んだ。その後，男子と女子 1 人ずつが組になってそれぞれが選んだ数を確認し合ったところ，どの組を作っても男女 2 人で一致する数字が 1 つ以上あった。このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　ある女子が 1 と 2 の 2 つの数字のみを選んでいたとする。このとき，1 の数字を選んだ男子の人数と 2 の数字を選んだ男子の人数のうち，どちらか一方は必ず 10 人以上であることを示しなさい。

(2)　1 人の女子が選んだ数字のうち，どれか 1 つは必ず 4 人以上の男子が選んでいることを示しなさい。

(3)　1 から 10 の数字の中で，男子 3 人以上と女子 3 人以上が選んだ数字が必ず存在することを示しなさい。

［解答例］

(1)　1 と 2 の 2 つの数字のみを選んだ女子を A とする。どの組を作っても男女 2 人で一致する数字があることから，全ての男子は，A が選んだ 1，2 のうち少なくとも 1 つを選んでいなければならない。

ここで，1 の数字を選んだ男子の人数と 2 の数字を選んだ男子の人数のどちらかが 9 人以下であるとすると，もう一方の人数が必ず 11 人以上となり，どちらかが 10 人であれば，もう一方の人数も 10 人となる。よって，題意は満たされた。

(2)　女子の選んだ数字に着目し，数字を選んだ個数によって場合分けして考える。

(i)　数字を 1 つ選んだ女子に対して　その数字は全ての男子が選んでいる。

(ii)　数字を 2 つ選んだ女子に対して

(1)より，2 つの数字のうちどちらか 1 つは，10 人以上の男子が選んでいる。

(iii)　数字を 3 つ選んだ女子に対して

(1)と同様に考えて，3 つの数字のうちいずれか 1 つは 7 人以上の男子が選んでいる。

(iv)　数字を 4 つ選んだ女子に対して

(1)と同様に考えて，4 つの数字のうちいずれか 1 つは 5 人以上の男子が選んでいる。

(v)　数字を 5 つ選んだ女子に対して

(1)と同様に考えて，5 つの数字のうちいずれか 1 つは 4 人以上の男子が選んでいる。

(i)～(v)より，1人の女子が選んだ数字のうち，どれか1つは必ず4人以上の男子が選んでいるといえる。

(3)　1から10のどの数字についても，2人以下の男子が選んでいる，または，2人以下の女子が選んでいると仮定する。

(2)より，どの女子も4人以上の男子が選んだ数字を選んでいる。この数字をXとすると，仮定よりXは2人以下の女子が選んでいる数字である。すなわち，どの女子についても，2人以下の女子だけが選んでいる数字を選んでいることがわかる。女子は20人いるので，2人ずつ異なる数字を選んでいくと10個の数字を全て使うことになる。

どの組を作っても男女2人で一致する数字があるので，女子20人が10個の数字を選んでいるとき，男子の1人で10個の数字を選ばなければならない。しかし，これは，1人で5つの数字までしか選べないことに矛盾する。

よって，1から10の数字の中で，男子3人以上と女子3人以上が選んだ数字が必ず存在するといえる。

［出題の意図］

論証の問題です。置かれている状況を的確に捉えて論理的に分析し，結論を導きます。思い込みによる論理の飛躍をすることなく，与えられた条件を結びつけて，客観的に表現できているかどうかをみる問題として出題しました。

［講評］

３４１名中１２５名が選択し，完答者はいませんでした。

１名の答案については最後の詰めでミスがあったものの，ほぼ正解といえる論理的で非常に優れた解答でした。

この問題では，与えられた結論を否定し，矛盾を導き出すことによってその正しさを証明する「背理法」を用いて示すことができます。実際，この「背理法」を利用した解答が多く見られました。しかし，（３）では結論を否定する際の間違いが多く見られました。具体的には，「または」とすべきところを「かつ」としたり，「どの数字も２人以下の男子が選んだ」と仮定したりという例です。論理的な思考力が試された問題であったと思われます。