平成２７年度

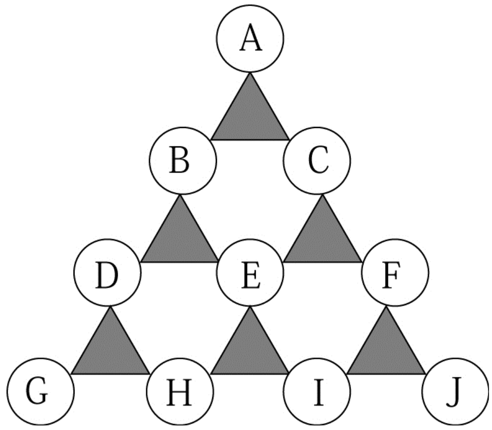
群馬県高校生

数学コンテスト

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
4　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
5　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみ，のり（テープ）を用いてもかまいません。
6　コンテスト終了後，解答用紙は４枚提出してください。

1　右の図において，次の＜条件＞を満たすようにＡ～Ｊに０から９までの整数をそれぞれ１つずつ入れる。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。



＜条件＞

Ａ＋Ｂ＋Ｃ＝Ｂ＋Ｄ＋Ｅ＝Ｃ＋Ｅ＋Ｆ
＝Ｄ＋Ｇ＋Ｈ＝Ｅ＋Ｈ＋Ｉ＝Ｆ＋Ｉ＋Ｊ

(1)　Ｅ＝３のとき，Ａ～Ｊにあてはまる整数の組を１つ求め，解答用紙の図に記入しなさい。

(2)　Ａ～Ｊにあてはまる整数の組は全部で何通りあるか，理由も含めて答えなさい。

2　半径１の円Ｏに内接する円について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

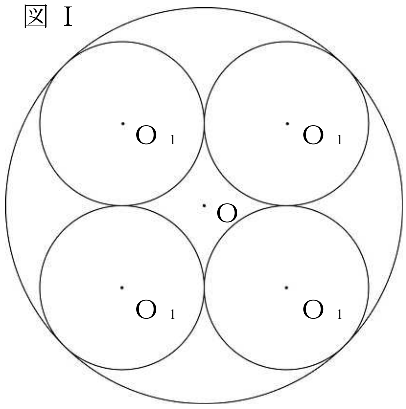
(1)　右の図Ⅰのように，半径の等しい４つの円O_1がそれぞれ円Ｏに内接しており，さらに円O_1はそれぞれ他の円O_1と図のように接している。

　このとき，円O_1の半径を求めなさい。

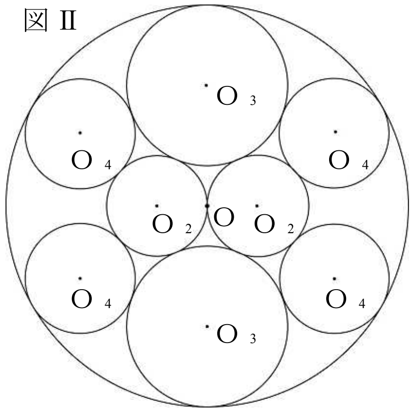
(2)　右の図Ⅱのように，３種類の円O_2，O_3，O_4がそれぞれ図のように接しており，このうち２種類の円O_3，O_4は円Ｏに内接している。

　O_2の半径が$\frac{1}{4}$であるとき，円O_3，O_4の半径をそれぞれ求めなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



3　次の＜手順＞に従って，例に示したように自然数を並べる。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

＜手順＞

①　1 行目（最も上の行）に，1 から n までの自然数を左から小さい順に並べる。
②　1 行目（上の行）の隣り合った数の和を，2 行目（次の行）に並べる。
③　以降，この操作を繰り返し，n 行目の数を書いたら終了する。

例）1 行目に 1 から 5 までの自然数を並べた場合

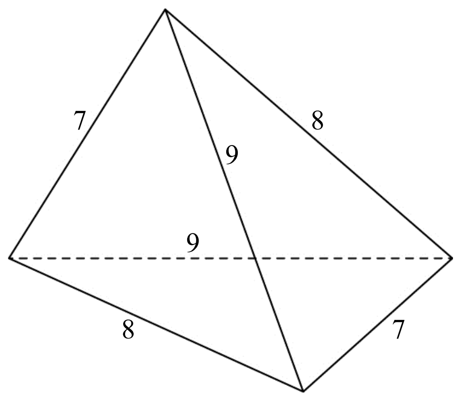
1	2	3	4	5	← 1 行目
3	5	7	9		← 2 行目
8	12	16			← 3 行目
20	28				← 4 行目
48					← 5 行目

(1)　1 行目に 1 から 10 までの自然数を並べたとき，10 行目に書く数を求めなさい。
(2)　1 行目に 1 から n までの自然数を並べたとき，n 行目に書く数を n の式で表しなさい。また，その式を求める過程を説明しなさい。

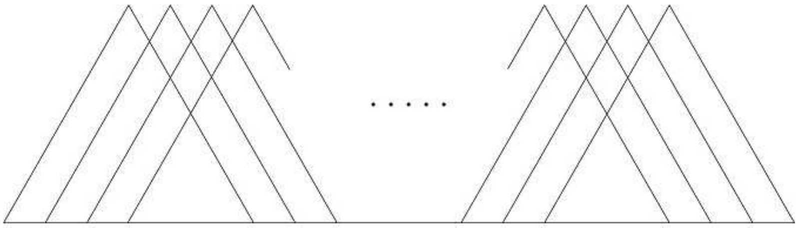
4　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。
(1)　x，y，z を正の数とする。

『　$x^2 + y^2 = 7^2$　・・・①　，$y^2 + z^2 = 8^2$　・・・②　，$z^2 + x^2 = 9^2$　・・・③　』

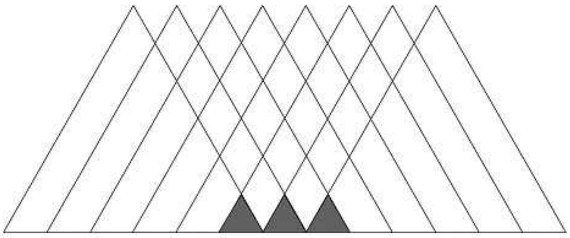
をすべて満たす x，y，z は存在するか。存在するならば，x，y，z の値をそれぞれ求めなさい。存在しないならば，その理由を示しなさい。
(2)　3 つの辺の長さが 7，8，9 である三角形を 4 つ組み合わせて，下の図のような四面体をつくるとき，この四面体の体積を求めなさい。必要があれば，別紙を切り抜いて利用してもよい。



5　1辺が 6 cm の正三角形の紙が何枚かある。この正三角形の紙を，下の図のように左から 1 cm ずつずらしながら重ねていく。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。



(1)　下の図は，8枚の正三角形の紙を重ねたときのもので，紙がちょうど6枚重なった部分に色をつけたものである。同様に8枚の正三角形の紙を重ねたとき，ちょうど3枚重なっている部分はどこか。解答用紙の図に色を塗って示しなさい。



(2)　(1)の解答で色を塗った部分の面積の和は，1辺を 1 cm とする正三角形の面積の何倍となるか，求めなさい。

(3)　m 枚の正三角形の紙を重ねたとき，n 枚重なった部分の面積の和は，1辺を 1 cm とする正三角形の面積の何倍となるか，m，n を用いた式で表しなさい。
　ただし，正三角形の紙は6枚以上使用し，重なる部分の枚数は1～5枚のときのみ考えるものとする。

6　2桁以上の自然数Nが7の倍数であるかどうかの判定法の1つとして，次の方法が知られている。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

7の倍数の判定法

①　最高位の数字に3をかける。
②　次に大きい位の数字を加える。
③　その結果に3をかける。
④　次に大きい位の数字を加える。
以降，③，④の操作を一の位の数字まで繰り返す。
最後の結果が7の倍数であるならば，調べる自然数Nは7の倍数である。

(1)　この判定法を用いて，自然数 69356 が7の倍数であることを確認しなさい。

(2)　この判定法によって，自然数Nが7の倍数であるかどうかを判定できることを証明しなさい。必要があれば，次の【等式】が成り立つことを用いてもよい。

【等式】

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdot \cdot \cdot + ab^{n-2} + b^{n-1})$
（ただし，n は自然数とする。）

＜別紙＞　※　切り抜いて組み立てるなどして，利用してもよい。