平成２７年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

今年度の数学コンテストは７月２７日（月）に実施され、参加者は４５３名（２１校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１８回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞２３名、アイデア賞１０名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞７名、奨励賞２３名、アイデア賞９名）の計４２名であった。

前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４校を会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓、はさみやのり、あらかじめ配付した補助資料の使用も認めている。

今回は、円に内接する小さな円に関する問題や、条件を満たす自然数の組合せを求める問題、また、7の倍数の判定法を考察する問題などに取り組んでもらった。これらの問題では、まず試行錯誤を十分行うことが重要であり、試行錯誤する中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。また、大問４の四面体の体積を求める問題では、問題用紙とともに配付した展開図を組み立てることで、等面四面体のもつ性質について考察する問題に取り組んでもらった。コンテスト会場では、解答への見通しを立てるために実際の立体図形を眺め、イメージをふくらませながら取り組む様子が多く見られた。ほとんどの生徒が解答時間の３時間に集中し、最後まで粘り強く問題に向き合っていた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する、よい機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後様々な教科を学習して行く上でよい経験になっていると思われる。今後も、この群馬県高校生数学コンテストを継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会として更に充実したものとなることを切に望んでいる。

○　参加生徒の内訳

学年（中等）	１年（４年）	２年（５年）	３年（６年）
男	１３３	１０２	３８
女	１３	１５２	１５
計	１４６	２５４	５３

合 計　４５３名

※次のページ以降に平成２７年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
4　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
5　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみ，のり（テープ）を用いてもかまいません。
6　コンテスト終了後，解答用紙は４枚提出してください。

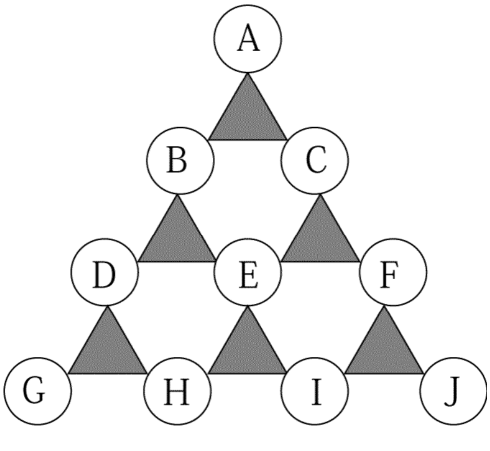
Ⅱ　問題及び解答例

1　右の図において，次の＜条件＞を満たすように
Ａ～Ｊに０から９までの整数をそれぞれ１つずつ入れる。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

＜条件＞

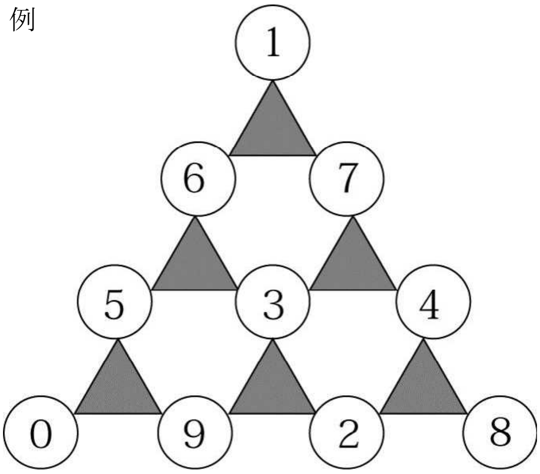
Ａ＋Ｂ＋Ｃ＝Ｂ＋Ｄ＋Ｅ＝Ｃ＋Ｅ＋Ｆ
＝Ｄ＋Ｇ＋Ｈ＝Ｅ＋Ｈ＋Ｉ＝Ｆ＋Ｉ＋Ｊ

(1)　Ｅ＝３のとき，Ａ～Ｊにあてはまる整数の組を１つ求め，解答用紙の図に記入しなさい。
(2)　Ａ～Ｊにあてはまる整数の組は全部で何通りあるか，理由も含めて答えなさい。



［解答例］

(1)　例



(2)　Ａ＋Ｂ＋Ｃ＝Ｂ＋Ｄ＋Ｅ＝Ｃ＋Ｅ＋Ｆ
　　＝Ｄ＋Ｇ＋Ｈ＝Ｅ＋Ｈ＋Ｉ＝Ｆ＋Ｉ＋Ｊ＝Ｓ

とおくと

　Ｅ＝(0＋1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9)－3Ｓ
　　＝45－3Ｓ
　　＝3(15－Ｓ)

よってＥは３の倍数となるので，Ｅ＝０，３，６，９の場合を考えればよい。

(i)　Ｅ＝０のとき

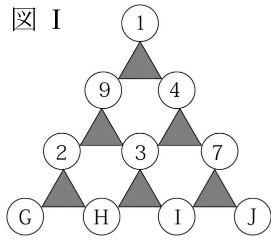
3(15－Ｓ)＝0　すなわち　Ｓ＝15
Ｅ＝０なので，Ｂ＋Ｄ＝Ｃ＋Ｆ＝Ｈ＋Ｉ＝15
しかし，０から９までの２つの整数で和が15となるのは，
（9，6），（8，7）しかないため，Ｅ＝０は不適である。

(ii)　Ｅ＝３のとき

3(15－Ｓ)＝3　すなわち　Ｓ＝14
Ｅ＝３なので，Ｂ＋Ｄ＝Ｃ＋Ｆ＝Ｈ＋Ｉ＝11
０から９までの２つの整数で和が11となるのは，Ｅ＝３を考慮すると
（9，2），（7，4），（6，5）の３組である。
ここで，仮にＢ＝９とすると，Ｓ＝14よりＣに入るのは４または５である。

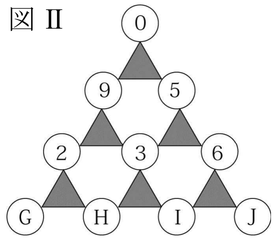
①C＝4のとき
S＝14よりA＝1，D＝2，F＝7となる。
このとき，H，Iには5または6が入るが，
いずれの場合もG，Jに入る整数が既に使
われているため，不適。（図Ⅰ）

図Ⅰ



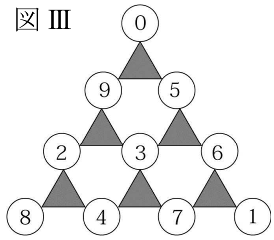
②C＝5のとき
S＝14よりA＝0，D＝2，F＝6となる。
このとき，H，Iには4または7が入る。
H＝7，I＝4のとき，G，Jに入る整数が
既に使われているため，不適。（図Ⅱ）
H＝4，I＝7のとき，図Ⅲのようにすると，
条件を満たす。

図Ⅱ



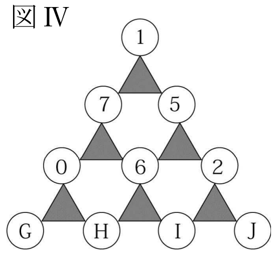
(iii) E＝6のとき
3(15－S)＝6　すなわち　S＝13
E＝6なので，B＋D＝C＋F＝H＋I＝7
0から9までの2つの整数で和が7となるのは，
E＝6を考慮すると
（7，0），（5，2），（4，3）の3組である。
ここで，仮にB＝7とすると，S＝13よりCに
入るのは4または5である。

図Ⅲ



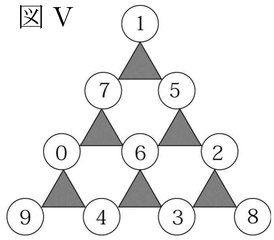
①C＝4のとき
S＝13よりA＝2となるが，2はC，F，H，I
のいずれかで使用するので不適。
②C＝5のとき
S＝13よりA＝1，D＝0，F＝2となる。（図Ⅳ）
このとき，H，Iには3または4が入る。
H＝3，I＝4のとき，G＝10となり，不適。
H＝4，I＝3のとき，図Ⅴようにすると，条件を満たす。

図Ⅳ



(iv) E＝9のとき
3(15－S)＝9　すなわち　S＝12
E＝9なので，B＋D＝C＋F＝H＋I＝3
しかし，0から9までの2つの整数で和が3となるのは，
（0，3），（1，2）しかないため，E＝9は不適である。

図Ⅴ



以上より，条件を満たすのは　(ii)の②と，(iii)の②のときの2種類に限る。
また，それぞれの場合について，Eを中心に120°ずつ回転した場合が3通りあり，
そのそれぞれについて，A，Eを通る直線に関して対称となる場合が2通りあるので，
A～Jにあてはまる整数の組は全部で，2×3×2＝12（通り）である。

［出題の意図］

論理的な思考を用いて，当てはまる自然数を考察する出題です。こういった問題の考え方として，「範囲を狭めてから，しらみつぶしで考える」という方法が用いられることがあります。ただやみくもに代入して考えるのではなく，いかに条件を絞っていくのかがポイントとなります。その条件の絞り方について，工夫する力を問う問題として出題しました。

［講評］

453名中247名が選択し，7名が完答しました。正解した解答の中には，Eの条件を絞っていく際に工夫をして，論理的に解答しているものもいくつか見られました。また，E

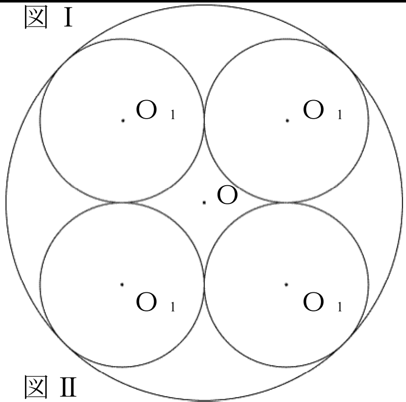
の条件までは絞っていたものの，その後がうまく進められなかった解答や，最初から全ての場合を考えてしまい挫折している解答も見られました。整数に関わる問題では，条件を狭めてから考えるという方法が，有効な手段の一つといえます。解答例に示した方法だけでなく，いろいろな方法を試してみるのもよいでしょう。

2　半径1の円Oに内接する円について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

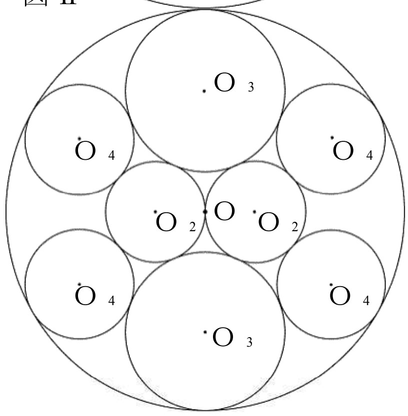
(1)　右の図Ⅰのように，半径の等しい4つの円O_1がそれぞれ円Oに内接しており，さらに円O_1はそれぞれ他の円O_1と図のように接している。
　このとき，円O_1の半径を求めなさい。

(2)　右の図Ⅱのように，3種類の円O_2，O_3，O_4がそれぞれ図のように接しており，このうち2種類の円O_3，O_4は円Oに内接している。
　O_2の半径が$\frac{1}{4}$であるとき，円O_3，O_4の半径をそれぞれ求めなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



［解答例］

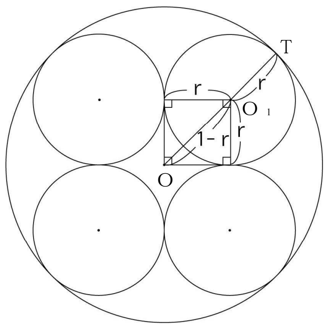
(1)　円O_1の半径をrとし，円Oと円O_1の接点をTとする。

$$OO_1 = 1 - O_1T = 1 - r$$

三平方の定理より，

$$(1-r)^2 = r^2 + r^2$$

$r > 0$より，これを解いて　$r = -1+\sqrt{2}$

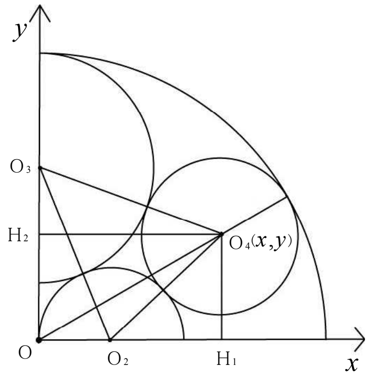


(2)　座標平面上で考える。
円Oの中心を原点，円O_2，円O_3の中心はそれぞれx軸上，y軸上にあるとする。
図形の対称性を考慮すると，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$の範囲で考えればよい。
円O_3，円O_4の半径をそれぞれr_3，r_4，
円O_4の中心の座標を$(x,\ y)$とすると，

円O_2の中心　$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$　　半径　$\frac{1}{4}$

円O_3の中心　$(0,\ 1-r_3)$　　半径　r_3

円O_4の中心　$(x,\ y)$　　半径　r_4



また，円O_4からx軸，y軸に下ろした垂線の足をH_1，H_2とする。

△OO_2O_3において三平方の定理より，

$$O_3O_2{}^2+OO_2{}^2=OO_3{}^2$$

$$\left(r_3+\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+(1-r_3)^2$$

これを解いて，$r_3=\dfrac{2}{5}$

△OO_4H_1において

$$OO_4{}^2=OH_1{}^2+O_4H_1{}^2$$

$$(1-r_4)^2=x^2+y^2 \qquad \cdots\cdots①$$

△$O_2O_4H_1$において

$$O_2O_4{}^2=O_2H_1{}^2+O_4H_1{}^2$$

$$\left(\frac{1}{4}+r_4\right)^2=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2 \qquad \cdots\cdots②$$

△$O_4O_3H_2$において

$$O_3O_4{}^2=O_4H_2{}^2+O_3H_2{}^2$$

$$\left(\frac{2}{5}+r_4\right)^2=x^2+\left(\frac{3}{5}-y\right)^2 \qquad \cdots\cdots③$$

①，②よりy^2を消去して整理すると，

$$x=2-5r_4 \qquad \cdots\cdots④$$

①，③よりx^2を消去して整理すると，

$$y=1-\frac{7}{3}r_4 \qquad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤を①に代入して整理すると，

$$265r_4{}^2-204r_4+36=0$$

$0<r_4<1$　に注意してこれを解くと，

$$r_4=\frac{102-12\sqrt{6}}{265}$$

したがって，円O_3の半径は $\dfrac{2}{5}$ ，円O_4の半径は $\dfrac{102-12\sqrt{6}}{265}$

［出題の意図］

平面幾何の分野から，円に内接する円についての出題です。円が円に内接する図形としては，シュタイナーチェーンというものが有名ですが，本問では，対称性を持ったいくつかの条件の下で，知識や発想力を問う問題として出題しました。幾何の問題では，自分の思い込みから間違った解釈をしないよう，数学的な根拠をもって論理的に突き詰めていくことが大切です。この問題は，三平方の定理を駆使して解答を導くことができます。問題解決の場面では，一見難解にみえるものに対しても，既習の知識をうまく活用しながら，粘り強く取り組む態度も必要です。

［講評］

453名中237名が選択し，2名が完答しました。完答した解答はそれぞれ，三平方の定理と余弦定理及び三角比の相互関係を用いた，素晴らしい解答でした。余弦定理は三平方の定理を一般の角度に対して拡張した定理とみることもできます。解答では，その考え方が十分に生かされたものになっていました。

(1)および(2)の円O_3の半径まで求められた解答は多くみられました。円O_4の半径を求める過程では，かなりの計算力を必要としたようです。

本問で扱った2つの図形は，対称性を持った美しい図形であるため，円を座標平面上にうまく配置することで考えやすくなります。対称性の利用は，数学における大切な考え方の一つです。

3 次の<手順>に従って，例に示したように自然数を並べる。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

<手順>
① 1行目（最も上の行）に，1からnまでの自然数を左から小さい順に並べる。
② 1行目（上の行）の隣り合った数の和を，2行目（次の行）に並べる。
③ 以降，この操作を繰り返し，n行目の数を書いたら終了する。

例）1行目に1から5までの自然数を並べた場合

1		2		3		4		5	← 1行目
	3		5		7		9		← 2行目
		8		12		16			← 3行目
			20		28				← 4行目
				48					← 5行目

(1) 1行目に1から10までの自然数を並べたとき，10行目に書く数を求めなさい。
(2) 1行目に1からnまでの自然数を並べたとき，n行目に書く数をnの式で表しなさい。また，その式を求める過程を説明しなさい。

[解答例]
(1) 2816
(2) 1行目の隣り合う数の差は1
2行目の隣り合う数の差は2
3行目の隣り合う数の差は$4 = 2^2$
4行目の隣り合う数の差は$8 = 2^3$
…
m行目の隣り合う数の差は2^{m-1}
であるから，m行目において隣り合う任意の3数はlを自然数として
$l - 2^{m-1}$，l，$l + 2^{m-1}$
と表せる。m行目，$(m+1)$行目，$(m+2)$行目を考えると，

$l - 2^{m-1}$		l		$l + 2^{m-1}$	……m行目
	$2l - 2^{m-1}$		$2l + 2^{m-1}$		……$(m+1)$行目
		$4l$			……$(m+2)$行目

となるので，m行目において隣り合う任意の3数のうち，中央の数lを4倍すると，lの2行下に書かれる数となる。

したがって，求める数は，kを自然数として考えると，

(i) $n = 2k$ のとき

2行目の中央の数 $2k+1$ に，4を $(k-1)$ 回かけた数であるから，

$$(2k+1)\cdot 4^{k-1} = (2k+1)\cdot 2^{2k-2} = (n+1)\cdot 2^{n-2}$$

(ii) $n = 2k-1$ のとき

1行目の中央の数 k に，4を $(k-1)$ 回かけた数であるから，

$$k\cdot 4^{k-1} = k\cdot 2^{2k-2} = 2k\cdot 2^{2k-3} = (n+1)\cdot 2^{n-2}$$

(i)，(ii) より，n 行目に書く数は　$(n+1)\cdot 2^{n-2}$

［出題の意図］

ある手順に従って自然数を並べると，いくつかの性質を見つけることができ，さらにその性質を使って，n 行目の数を求めることができます。その性質が正しいことを論理的に記述できるかどうかがこの問題のポイントです。

解法が複数あるのも，この問題の魅力であり，ぜひ別解の作成にチャレンジしてもらいたいという意図もあります。一つの問題に対して別のアプローチを試みることは，数学の楽しさの一つです。今回の問題を通じて，その楽しさを味わってもらいたいと思います。

［講評］

453名中419名が選択し，103名が正解となりました。そのうち13名は，論理的で素晴らしい解答をしてくれました。また，(1)の結果から(2)の考え方を導こうとしている答案が多くみられました。具体的な結果から類推し，それを論理的に示していくという姿勢はとても大切です。今後も様々な問題解決の場面で生かしてもらいたいと思います。

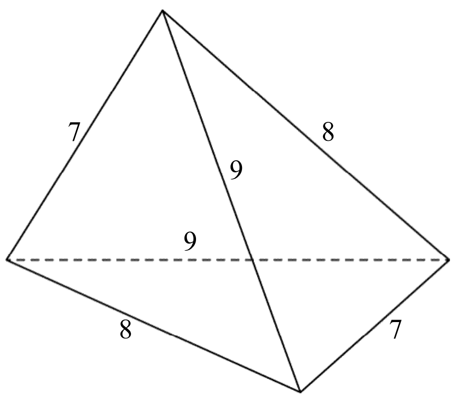
4　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　x，y，z を正の数とする。

『　$x^2 + y^2 = 7^2$　…①　，$y^2 + z^2 = 8^2$　…②　，$z^2 + x^2 = 9^2$　…③　』

をすべて満たす x，y，z は存在するか。存在するならば，x，y，z の値をそれぞれ求めなさい。存在しないならば，その理由を示しなさい。

(2) 3つの辺の長さが7，8，9である三角形を4つ組み合わせて，下の図のような四面体をつくるとき，この四面体の体積を求めなさい。必要があれば，別紙を切り抜いて利用してもよい。



［解答例］

（1） ①＋②＋③より

$$2(x^2+y^2+z^2)=194$$

すなわち

$$x^2+y^2+z^2=97 \quad \cdots\cdots ④$$

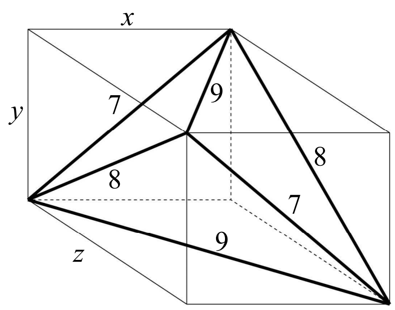
④－②より　$x^2=33$　　$x>0$ より　　$x=\sqrt{33}$

④－③より　$y^2=16$　　$y>0$ より　　$y=4$

④－①より　$z^2=48$　　$z>0$ より　　$z=4\sqrt{3}$

したがって，①，②，③を満たす正の数 x，y，z は存在する。

（2） (1)の 3 つの方程式を三平方の定理と考えると，右の図のように，等面四面体と頂点を共有する直方体が等面四面体に外接していることがわかる。



求める四面体の体積をＶとすると，Ｖは直方体の体積から求める四面体の周囲にある 4 つの合同な四面体の体積を除いたものである。

取り除く四面体 1 つの体積は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times xyz=\frac{xyz}{6}$ であるから

$$V=(\text{直方体の体積})-(\text{四面体の体積})\times 4=xyz-\frac{xyz}{6}\times 4=\frac{xyz}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2y^2z^2}$$

ここで，$\sqrt{x^2y^2z^2}=\sqrt{33\cdot 16\cdot 48}=48\sqrt{11}$

よって，$V=\frac{1}{3}\cdot 48\sqrt{11}=16\sqrt{11}$

［出題の意図］

合同な鋭角三角形を 4 つ組み合わせると，必ず四面体をつくることができます。本問で扱ったような、各面が合同な三角形である四面体を，等面四面体といいます。(2)で体積を求める際に，ベクトルの考え方で高さを求めることもできます。しかし，値が複雑で大変困難です。そこで，「等面四面体は，直方体から合同な 4 つの四面体を切り落とした図形である。」という性質を考えます。(1)の連立方程式をヒントに，この直方体を見つけられたかどうかが，この問題を解くポイントでした。

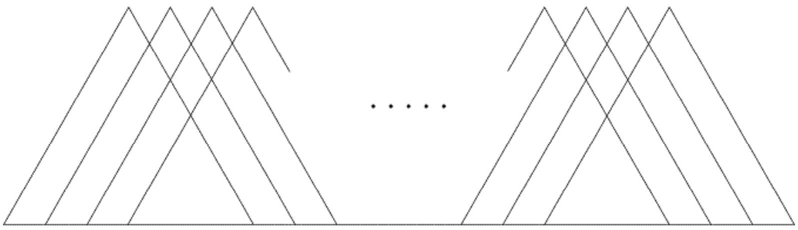
［講評］

453 名中 259 名が選択し，8 名が完答しました。

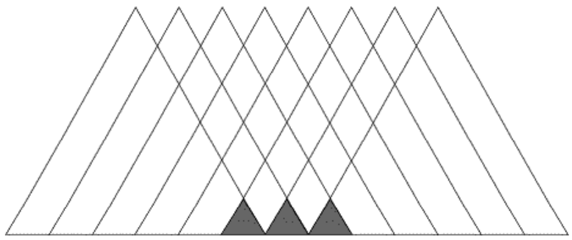
(2)の体積を求める問題では，底面積を求められたものの，四面体の高さを求めることができず，正解に至らなかった解答が多くみられました。ベクトルを使って高さを求めようとしている答案もいくつかありましたが，計算が複雑なため，どれも完答することはできなかったようです。

解答の糸口を見つけるために，実際の立体を観察してみることも大切です。完答した答案は，外接する直方体を見事にとらえ，論理的で素晴らしい解答ばかりでした。

5　1辺が 6 cm の正三角形の紙が何枚かある。この正三角形の紙を，下の図のように左から 1 cm ずつずらしながら重ねていく。後の(1)～(3)の問いに答えなさい。



(1)　下の図は，8 枚の正三角形の紙を重ねたときのもので，紙がちょうど 6 枚重なった部分に色をつけたものである。同様に 8 枚の正三角形の紙を重ねたとき，ちょうど 3 枚重なっている部分はどこか。解答用紙の図に色を塗って示しなさい。

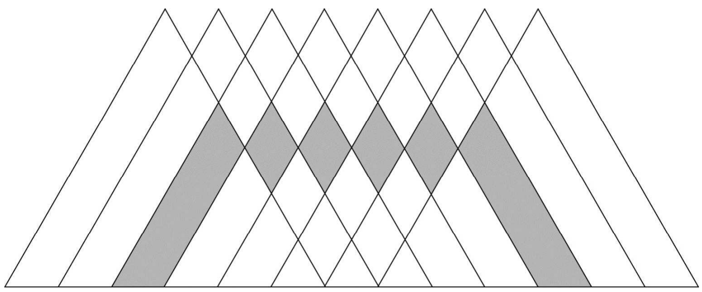


(2)　(1)の解答で色を塗った部分の面積の和は，1 辺を 1 cm とする正三角形の面積の何倍となるか，求めなさい。

(3)　m 枚の正三角形の紙を重ねたとき，n 枚重なった部分の面積の和は，1 辺を 1 cm とする正三角形の面積の何倍となるか，m，n を用いた式で表しなさい。
　ただし，正三角形の紙は 6 枚以上使用し，重なる部分の枚数は 1 ～ 5 枚のときのみ考えるものとする。

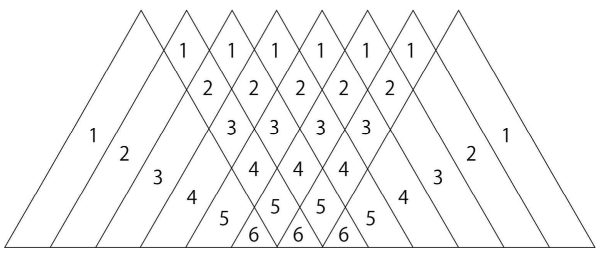
［解答例］

(1)



(2) (1)で図示した部分のうち，左右にある台形の部分は，1 辺が 1 cm である正三角形が 7枚分であり，ひし形になっている部分は2枚分なので，

　　7×2＋2×4＝22　　　　よって，22倍



※数字は重なる部分の枚数を表している。

(3) m 枚の正三角形を用いたとき，(2)の図を参考にすると，n 枚重なった部分はいずれも，2つの台形と複数のひし形になっている。

ここで，1辺が1cmである正三角形をAとして，2つの台形がAを何枚用いて作れる図形であるかを考える。重なった枚数 n とAの枚数の関係は以下の通りである。

n	1	2	3	4	5
Aの枚数	11	9	7	5	3

よって，1つの台形は，$\{11-2(n-1)\}$ 枚のAと同じ面積であるといえる。

また，重なった枚数 n とひし形の個数は以下の通りである。

n	1	2	3	4	5
ひし形の個数	$m-2$	$m-3$	$m-4$	$m-5$	$m-6$

よって，ひし形の個数は $\{m-(n+1)\}$ 個と表せる。

1辺が6cmの正三角形を何枚用いても，n 枚重なった部分は台形が2つあり，1つのひし形は正三角形Aが2枚分であるから，求める部分の面積は全部で，

$\{11-2(n-1)\}\times2+2\times\{m-(n+1)\}=2(m-3n+12)$

となるから，1辺が1cmである正三角形Aの面積の $2(m-3n+12)$ 倍となる。

［出題の意図］

与えられた図形の中に規則性を見つけ，より効率的に解決する力を問う問題です。本問では，重なった様子を図に表すことで，同じような図形が規則的に現れてくることに気付きます。

今回の条件においては，n 枚重なった部分が「2つの台形と複数のひし形」で表されることに着目するのがポイントです。重なった部分を1辺が1cmである正三角形に分割できることをうまく利用することで，規則性を見いだし，効率よく考えることのよさを実感してもらいたい問題でした。

［講評］

453名中370名が選択し，84名が完答しました。正解した解答の中には，図や表を用いてわかりやすく丁寧に記述できているものがいくつか見られました。(2)，(3)では，直接面積を求めたりせずに，台形とひし形を正三角形に分割して考えることで解きやすくなります。特に(3)では，すべての m について調べることができないため，$n=1\sim5$ についてそれぞれ考えていく必要があります。表などに整理して規則性を発見することは，数学において大切な活動の一つといえるでしょう。

6　2桁以上の自然数Nが7の倍数であるかどうかの判定法の1つとして，次の方法が知られている。後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

7の倍数の判定法

① 最高位の数字に3をかける。

② 次に大きい位の数字を加える。

③ その結果に3をかける。

④ 次に大きい位の数字を加える。

以降，③，④の操作を一の位の数字まで繰り返す。

最後の結果が7の倍数であるならば，調べる自然数Nは7の倍数である。

(1)　この判定法を用いて，自然数 69356 が 7 の倍数であることを確認しなさい。
(2)　この判定法によって，自然数Nが 7 の倍数であるかどうかを判定できることを証明しなさい。必要があれば，次の【等式】が成り立つことを用いてもよい。

【等式】
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
（ただし，n は自然数とする。）

［解答例］
(1) $6\times3 = 18$　　$18 + 9 = 27$　　$27\times3 = 81$　　$81 + 3 = 84$　　$84\times3 = 252$
$252 + 5 = 257$　　$257\times3 = 771$　　$771 + 6 = 777$
よって，777 は 7 の倍数なので，69356 は 7 の倍数であるといえる。

(2) 自然数Nの最高位の数字を a_{n-1}（n は自然数）とすると，
$$N = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \cdots\cdots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$$
とおける。判定法をこのNに対して行い，
$3a_{n-1} + a_{n-2}$
$3^2a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3}$
$3^3a_{n-1} + 3^2a_{n-2} + 3a_{n-3} + a_{n-4}$
……
$3^{n-1}a_{n-1} + 3^{n-2}a_{n-2} + \cdots\cdots + 3^2a_2 + 3a_1 + a_0 = P$　とおく。
NとPの差をとると，
$$N - P = (10^{n-1} - 3^{n-1})a_{n-1} + (10^{n-2} - 3^{n-2})a_{n-2} + \cdots\cdots + (10^2 - 3^2)a_2 + (10 - 3)a_1$$
与えられた等式より，$10^n - 3^n$ は $10 - 3 = 7$ で割り切れる。よって，Pが 7 の倍数ならば，Nも 7 の倍数である。

［出題の意図］
倍数の判定法についての問題です。7 の倍数かどうかの調べ方については，いくつかの方法が知られていますが，本問は，その 1 つの方法を題材にした問題です。この判定法のような知識を持っておくこともちろん大切ですが，なぜこの方法で判定できるのかという疑問を持ち，解決していくことも重要です。具体的な数値で確認した後，どのように一般化するか，その工夫のしかたを問う問題として出題しました。

［講評］
453 名中 270 名が選択し，7名が完答しました。
正解した解答の中には，自然数Nの一般化に工夫がみられたものがいくつかありました。解答例で示したNの表し方は数列を学んでいないと難しかったかもしれませんが，一般的な表記が必要なときにとても便利な表し方です。また，合同式という考え方を用いると，さらに簡単な計算ができます。