平成２６年度

群馬県高校生

数学コンテスト

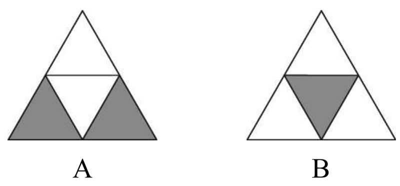
注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
4　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
5　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
6　コンテスト終了後，解答用紙は４枚提出してください。

1　600 以下である 3 桁の自然数について，各桁の数字をそれぞれ 3 乗して加えると，もとの自然数と同じ値になるような自然数をすべて求めなさい。また，求めた過程を説明しなさい。

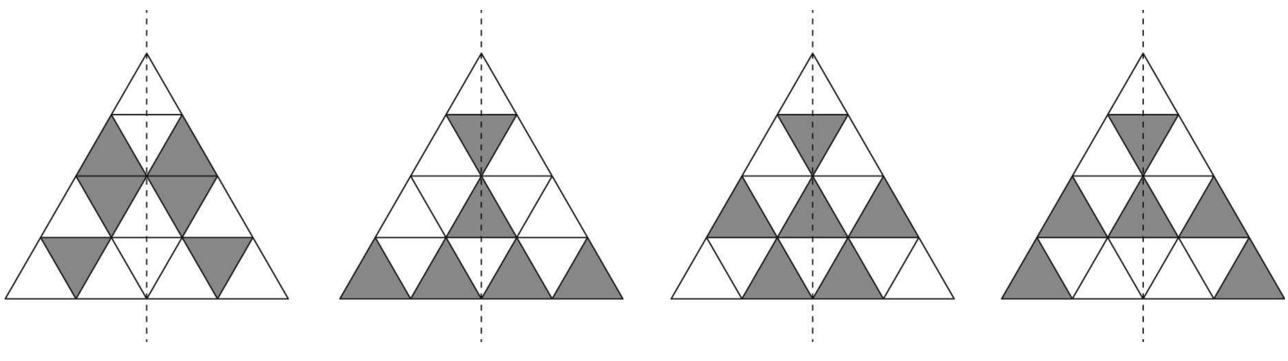
例えば，125 は $1^3 + 2^3 + 5^3 = 1 + 8 + 125 = 134$ となり，$125 \neq 134$ より，この条件を満たさない。また，最高位が 0 となる 001,010 のような数は除くものとする。

2　同じ大きさの正三角形のタイルがある。この三角形のそれぞれの辺の中点を利用して，図 A，B のような 2 種類の模様をつけた。



A，B のタイルを敷き詰めて正三角形を作り，模様が左右線対称になるものについて考えるとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。必要があれば，別紙の図を切り抜いて利用してもよい。

例）A 2 枚，B 2 枚を用いて左右線対称になるものは全部で次の 4 種類ある。

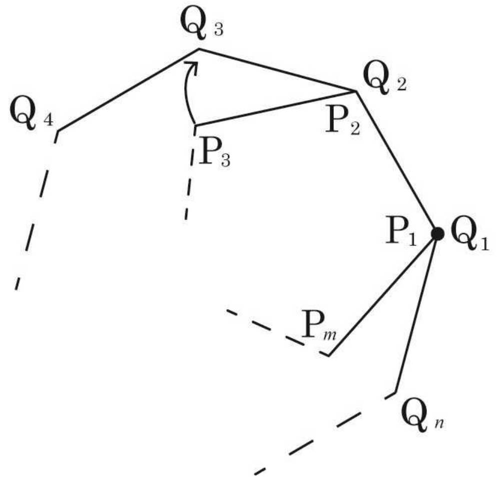


(1)　A 2 枚，B 7 枚の合計 9 枚を用いてできる左右線対称な正三角形は 12 種類ある。これらをすべて書き出しなさい。

(2)　A 4 枚，B 32 枚の合計 36 枚を用いてできる左右線対称な正三角形は何種類あるか。考えた過程も含めて答えなさい。

3　$m < n$ である 3 以上の自然数 m，n に対し，1 辺の長さが a の正 m 角形 $P_1P_2\cdots P_m$ と正 n 角形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ を考える。

正 m 角形は正 n 角形に内接していて，正 n 角形の辺上をすべらずに回転する。この回転は，正 m 角形の辺 P_1P_2 と正 n 角形の辺 Q_1Q_2 が一致した状態から開始し，再び辺 P_1P_2 と辺 Q_1Q_2 が一致した状態で終了する。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

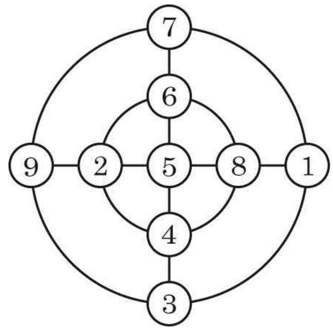


(1)　$m = 3$，$n = 6$ であるとき，回転が終了するまでに点 P_1 が描く曲線の長さを求めなさい。

(2)　$m = 5$ であり，n が 5 の倍数でないとき，回転が終了するまでに点 P_1 が描く曲線の長さを n で表しなさい。

4　右の図のように，2 つの同心円と 2 本の直径において円と直径の交わる場所及び円の中心に，異なる自然数を 1 から順に記入する。いま，図には自然数を記入する場所が 9 か所あるので，この場合は 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ記入していくことになる。

図では，直径上に並ぶ 5 つの自然数の和と，同一円周上の 4 つの自然数と中心の自然数を合わせた 5 つの自然数の和がすべて等しくなっている。



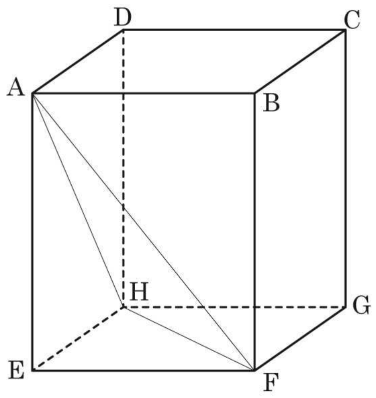
この例を参考にして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　3 つの同心円と 3 本の直径があり，例と同様に円と直径の交わる場所及び円の中心に自然数を記入する。直径上に並ぶ 7 つの自然数の和と，同一円周上の 6 つの自然数と中心の自然数を合わせた 7 つの自然数の和がすべて等しくなるような並べ方を 2 つ答えなさい。ただし，中心に入る自然数は異なる数にすること。

(2)　6 つの同心円と 6 本の直径があり，(1)と同様に円と直径の交わる場所及び円の中心に自然数を記入する。直径上に並ぶ自然数の和と，同一円周上の自然数と中心の自然数を合わせた自然数の和がすべて等しくなるように並べることはできるか。

できる場合は，並べ方の方針とその方針によってうまくいく理由を，できない場合は，その理由を答えなさい。

5　AB ＝ 4，AD ＝ 3，AE ＝ 5 である直方体 ABCD-EFGH の 4 つの頂点 A，E，F，H を結んでできる四面体 AEFH について次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1)　四面体 AEFH に外接する（四面体の 4 つの頂点を通る）球の半径 R を求めなさい。

(2)　四面体 AEFH に内接する（四面体の 4 つの面に接する）球の中心を I，直線 EI と平面 AFH との交点を P，直線 AP と辺 FH との交点を Q とするとき，次の問いに答えなさい。

（i）　FQ : QH を求めなさい。

（ii）　AP : PQ を求めなさい。

6　分母または分子が分数からなる分数を繁分数という。次の例のような，繁分数を用いた数値の表し方について考える。

例：　$\dfrac{99}{29} = 3+\dfrac{12}{29} = 3+\dfrac{1}{\dfrac{29}{12}} = 3+\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{12}} = \cdots\cdots = 3+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}$

ここで，繁分数を用いた $\sqrt{7}$ の表し方について考えたい。$\sqrt{7}$ は，次のような限りなく続く繁分数で表されることが知られている。

$$\sqrt{7} = a+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\cfrac{1}{b_4+\cfrac{1}{b_5+\cdots\cdots}}}}}$$

この等式を満たす自然数 a，b_1，b_2，b_3，b_4 の値を求めなさい。また b_5 以降の値も考えるとき，b_1，b_2，b_3，b_4，…には，どのような規則性があるか。その理由も含めて説明しなさい。