平成２６年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ　概　要

今年度の数学コンテストは７月２８日（月）に実施され、参加者は４３２名（１９校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１７回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞７名、奨励賞２３名、アイデア賞９名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞１０名、奨励賞３２名、アイデア賞６名）の計４０名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓やはさみ、あらかじめ配付した補助資料の使用も認めている。

今回は、回転する正多角形に関する問題や、条件を満たす自然数を求める問題、また、空間図形の内部に現れる線分の比を考察する問題などに取り組んでもらった。これらの問題では、まず試行錯誤を十分行うことが重要であり、試行錯誤する中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。また、大問２のタイルを敷き詰める問題では、問題用紙とともに配付した参考資料を切り抜き、それらを並べ替えるなどして、左右線対称になる図形の作り方に関する問題に取り組んでもらった。解答への見通しを立てる上で、イメージをふくらませながら取り組む様子が多く見られた。ほとんどの生徒が解答時間の３時間に集中し、最後まで粘り強く問題に向き合っていた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する、よい機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後様々な教科を学習して行く上でよい経験になっていると思われる。今後も、この群馬県高校生数学コンテストを継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会として更に充実したものとなることを切に望んでいる。

○　参加生徒の内訳

学　科	普通科		理数科		計	
学年（中等）	男	女	男	女	男	女
１年（４年）	１１７	１６			１１７	１６
２年（５年）	１０８	１５２	１１	１３	１１９	１６５
３年（６年）	１４	１			１４	１
計	２３９	１６９	１１	１３	２５０	１８２

合計　４３２名

※次のページ以降に平成２６年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　意　事　項

１　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
２　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
３　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
４　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
５　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみ，セロハンテープを用いてもかまいません。
６　コンテスト終了後、解答用紙は４枚提出してください。

Ⅱ　問題及び解答例

1　600以下である3桁の自然数について，各桁の数字をそれぞれ3乗して加えると，もとの自然数と同じ値になるような自然数をすべて求めなさい。また，求めた過程を説明しなさい。

例えば，125は $1^3+2^3+5^3=1+8+125=134$ となり，$125 \neq 134$ より，この条件を満たさない。また，最高位が0となる001,010のような数は除くものとする。

［解答例］

百，十，一の位の数をそれぞれ a,b,c（a,b,c はいずれも整数）とする。

$9^3=729>600$，$6^3+0^3+0^3=216 \neq 600$ より，

$0<a \leqq 5$，$0 \leqq b \leqq 8$，$0 \leqq c \leqq 8$ となる。

条件より，　$a^3+b^3+c^3=100a+10b+c$

この式を変形して

$(a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)+(c-1)c(c+1)=9(11a+b)$・・・①

左辺の各項はいずれも連続する3数なので6の倍数であり，その和も6の倍数。

したがって，右辺の $11a+b$ は偶数となる。

よって，a と b はともに偶数またはともに奇数となる。　・・・②

また，n を整数として $0 \leqq n \leqq 8$ のとき，$(n-1)n(n+1)$ を9で割った余りは，

$n=0,1,8$ のとき 0，$n=2,3,4$ のとき 6，$n=5,6,7$ のとき 3　・・・③

となる。

②，③を考慮し，①の左辺が9の倍数となるような a,b,c の組合せを考える。

$(a,b)=(1,1),(1,3),(1,7),(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),$
$(4,6),(4,8),(5,1),(5,3),(5,5),(5,7)$　のとき，

①の左辺が9の倍数となるような c について調べると，①の等式を満たさず不適。

$(a,b)=(1,5)$ のとき，$c=2,3,4$ が候補となり，

$c=3$ のとき $1^3+5^3+3^3=153$　となるので，自然数153は条件を満たす。

$(a,b)=(3,7)$ のとき，$c=0,1,8$ が候補となり，

$c=0$ のとき $3^3+7^3+0^3=370$　となるので，自然数370は条件を満たす。

また，$c=1$ のとき $3^3+7^3+1^3=371$　となるので，自然数371も条件を満たす。

$(a,b)=(4,0)$ のとき，$c=5,6,7$ が候補となり，

$c=7$ のとき $4^3+0^3+7^3=407$　となるので，自然数407は条件を満たす。

以上より，153, 370, 371, 407

［出題の意図］

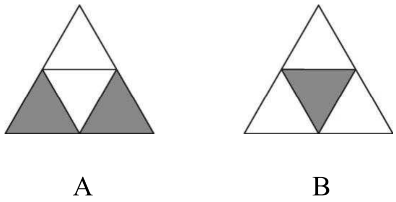
ある美しい性質をもった自然数についての出題です。こういった問題では，与えられた条件を満たす自然数を一つ一つ調べ上げていく方法もありますが，アイデアを駆使して効率的に見つける方法を考えたり，それを解答としてどのように表現できるのかを問う問題として出題しました。

［講評］

432名中350名が選択し，50名が完答しました。正解した解答の中には，求める過程も丁寧に記述され，関係式の変形に工夫が見られたものもいくつかありました。各位の数でできた関係式を考察することにより，より簡単に見つけられる方法を導くことができます。解答例に示した方法は，整数に関わる問題ではよく使われる手法の一つです。

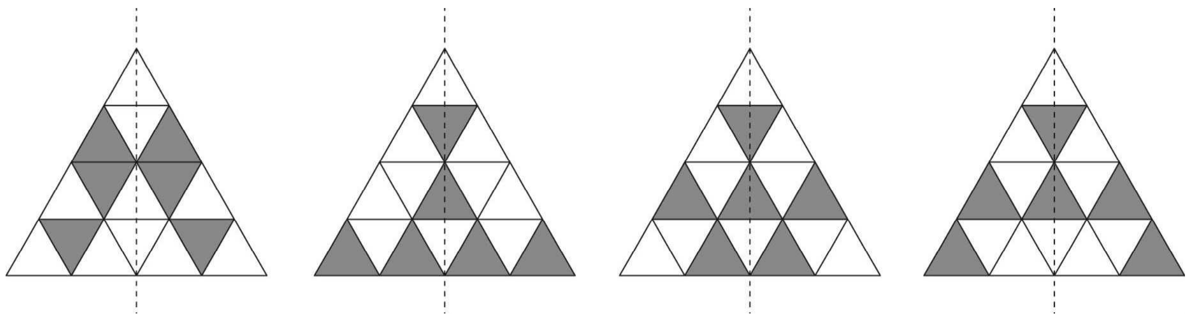
このような性質をもった数は，アームストロング数と呼ばれており，3桁のものは解答にある4つの自然数以外にはありません。また，3桁よりも多い桁数のものも存在することが知られています。例えば1634は各桁の数の4乗の和になっています。さらに，最大のアームストロング数は39桁の数であることがわかっています。

2　同じ大きさの正三角形のタイルがある。この三角形のそれぞれの辺の中点を利用して，図 A，B のような 2 種類の模様をつけた。



A, B のタイルを敷き詰めて正三角形を作り，模様が左右線対称になるものについて考えるとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。必要があれば，別紙の図を切り抜いて利用してもよい。

例）A 2 枚，B 2 枚を用いて左右線対称になるものは全部で次の 4 種類ある。

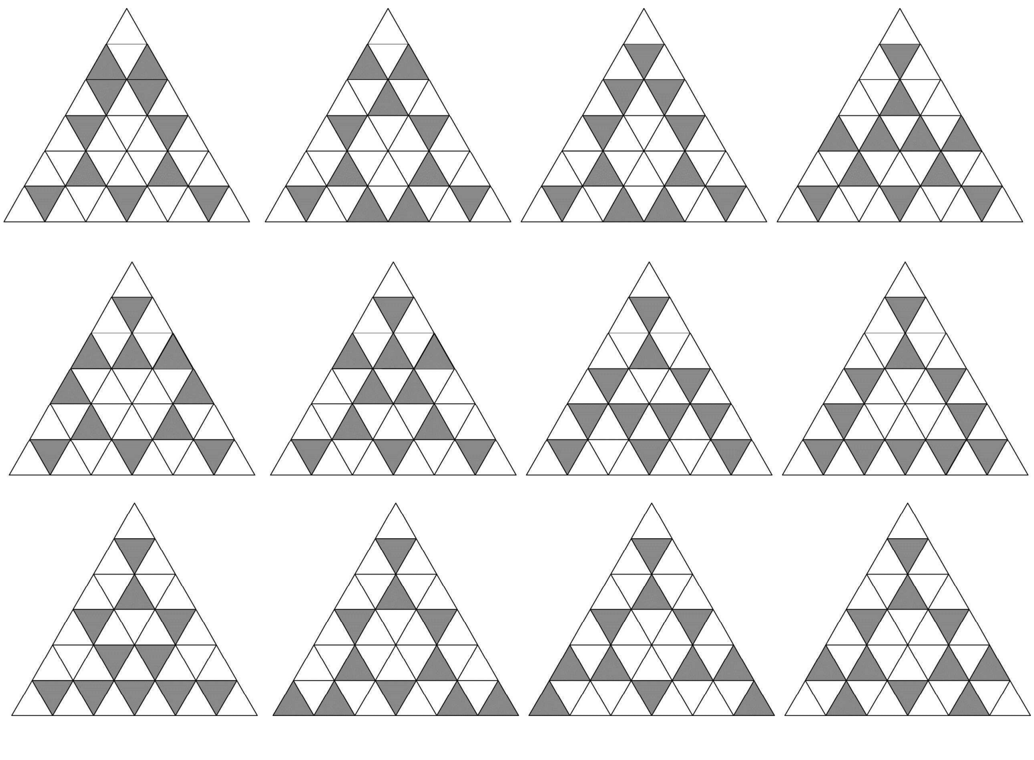


(1)　A 2 枚，B 7 枚の合計 9 枚を用いてできる左右線対称な正三角形は 12 種類ある。これらをすべて書き出しなさい。

(2)　A 4 枚，B 32 枚の合計 36 枚を用いてできる左右線対称な正三角形は何種類あるか。考えた過程も含めて答えなさい。

［解答例］

(1)

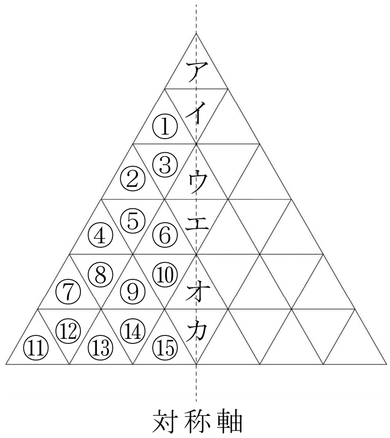


(2) 36 枚を用いてできる正三角形では，対称軸上に 6 枚のタイルがある。この 6 枚のタイルについて A，B の組合せは，左右の対称性を考慮して，次の 3 つが考えられる。

（i） A が 4 枚，B が 2 枚

（ii） A が 2 枚，B が 4 枚

（iii） A が 0 枚，B が 6 枚



(i)のとき，対称軸上の B の置き方は，(ア,イ),(ア,ウ),(ア,エ),(ア,オ),(ア,カ),(イ,ウ),(イ,エ),(イ,オ),(イ,カ),(ウ,エ),(ウ,オ),(ウ,カ),(エ,オ),(エ,カ),(オ,カ) の 15 通り。対称軸の空いたところに A，それ以外の部分に B を置くと条件を満たす。よって，(i)の場合は 15 通り。

(ii)のとき，対称軸上の A，B の置き方は(i)と同様に 15 通り。対称軸以外のタイルの置き方は，軸を挟んで左右対称なので，左側の 15 枚のみ考えればよい。A は 1 枚だけ置くのでその置く場所は 15 通り，A は回転させると 3 通りの向きがあるので，A の置き方は全部で，15 × 3 ＝ 45 通り。よって，(ii)の場合は 15 × 45 ＝ 675 通り。

(iii)のとき，対称軸上は全て B なので，置き方は 1 通り。(ii)と同様に左側のみ考える。左側のタイルに①～⑮と番号をつけると，A を置く場所の選び方は，

(①，②)，(①，③)，・・・・・・・・，(①，⑮)　14 通り

(②，③)，(②，④)，・・・，(②，⑮)　13 通り

・
・
・

(⑭，⑮)　1 通り

となるから，14 ＋ 13 ＋・・・＋ 1 ＝ 105 通り。2 枚の A にはそれぞれ 3 通りの向きがあるので，(iii)の場合は 105 × 3 × 3 ＝ 945 通り。

したがって，(i)～(iii)より，15 ＋ 675 ＋ 945 ＝ 1635 種類ある。

［出題の意図］

「場合の数」からの出題です。(1)では，具体的な場合について，すべてのパターンをもれなく重複なく書き出すことが必要とされます。(2)は左右対称であることを利用して，効率よく場合分けをすることにポイントを置いた出題でした。対称性を持った模様の美しさを感じると同時に，効率よく整理して考えることのよさを実感してもらいたい問題です。

［講評］

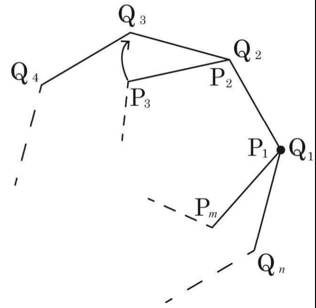
432 名中 404 名が選択し，20名が完答しました。

対称軸に着目して場合分けをした，すばらしい解答もいくつか見受けられました。特に(2)では，タイルを置く「位置」と「向き」に着目できるかがポイントとなりました。実際に切り抜いた紙を用いて試行錯誤しながら，考え方を見つけていくことも大切な活動です。

効率よく場合分けをすることや，対称性を利用することは，数学における大切な考え方の一つです。

3　$m < n$ である 3 以上の自然数 m, n に対し，1 辺の長さが a の正 m 角形 $P_1P_2\cdots P_m$ と正 n 角形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ を考える。

　正 m 角形は正 n 角形に内接していて，正 n 角形の辺上をすべらずに回転する。この回転は，正 m 角形の辺 P_1P_2 と正 n 角形の辺 Q_1Q_2 が一致した状態から開始し，再び辺 P_1P_2 と辺 Q_1Q_2 が一致した状態で終了する。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

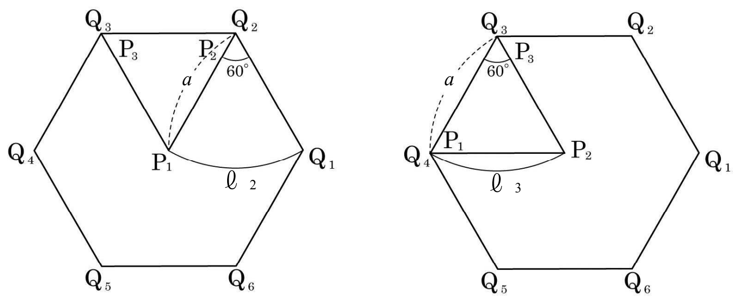


(1)　$m = 3$，$n = 6$ であるとき，回転が終了するまでに点 P_1 が描く曲線の長さを求めなさい。

(2)　$m = 5$ であり，n が 5 の倍数でないとき，回転が終了するまでに点 P_1 が描く曲線の長さを n で表しなさい。

［解答例］

(1)



　P_1P_2 と Q_1Q_2 が一致したときから P_2P_3 と Q_2Q_3 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを ℓ_2 とすると，

$$\ell_2 = 2\pi a \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}\pi a$$

である。また，P_2P_3 と Q_2Q_3 が一致したときから P_3P_1 と Q_3Q_4 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを ℓ_3 とすると，

$$\ell_3 = 2\pi a \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}\pi a$$

である。P_3P_1 と Q_3Q_4 が一致したときから P_1P_2 と Q_4Q_5 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを ℓ_1 とすると，$\ell_1 = 0$ である。

　正三角形が回転を始めてから，P_1P_2 が再び正六角形の辺と一致するまでを 1 サイクルとすると，この 1 サイクルで P_1 が描く曲線の長さ ℓ は，

$$\ell = \ell_2 + \ell_3 + \ell_1 = \frac{2}{3}\pi a$$

である。この場合，P_1 は 2 サイクルで再び P_1P_2 と Q_1Q_2 が一致するので，求める曲線の長さは，

$$2\ell = 2 \times \frac{2}{3}\pi a = \frac{4}{3}\pi a$$

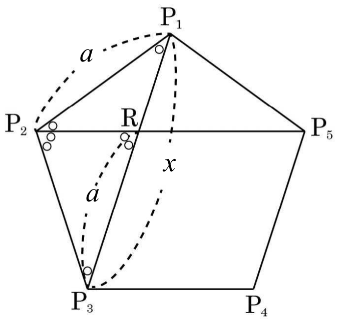
(2) 正 n 角形の 1 つの内角の大きさを θ_n とすると，$\theta_n = 180^\circ \times \dfrac{n-2}{n}$ である。

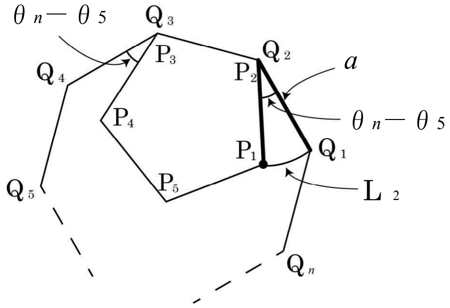
　1 辺の長さが a の正五角形について，対角線の長さを x とすると，

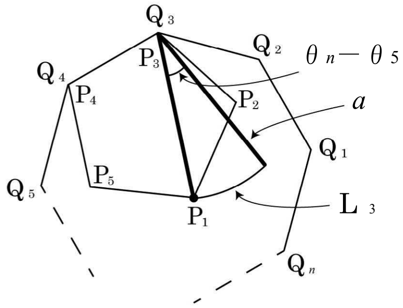
　　$\triangle P_1P_2P_3 \backsim \triangle P_1RP_2$ より $P_1P_2 : P_1P_3 = P_1R : P_1P_2$

すなわち，$a : x = x - a : a$　　$a > 0$，$x > 0$ であるから　$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$

　また，正五角形の 1 つの内角の大きさは $\theta_5 = 108^\circ$







P_1P_2 と Q_1Q_2 が一致したときから P_2P_3 と Q_2Q_3 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを L_2 とすると,

$$L_2 = 2\pi a \times \frac{\theta_n - \theta_5}{360^\circ}$$

である。P_2P_3 と Q_2Q_3 が一致したときから P_3P_4 と Q_3Q_4 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを L_3 とすると,

$$L_3 = 2\pi x \times \frac{\theta_n - \theta_5}{360^\circ}$$

である。同様に,P_3P_4 と Q_3Q_4 が一致したときから P_4P_5 と Q_4Q_5 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを L_4,P_4P_5 と Q_4Q_5 が一致したときから P_5P_1 と Q_5Q_6 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを L_5 とすると,$L_4 = L_3$,$L_5 = L_2$ であることがわかる。

また,P_5P_1 と Q_5Q_6 が一致したときから P_1P_2 と Q_6Q_7 が一致するまでに P_1 が描く曲線の長さを L_1 とすると,$L_1 = 0$ である。

正五角形が回転を始めてから,P_1P_2 が再び正 n 角形の辺と一致するまでを 1 サイクルとすると,この 1 サイクルで P_1 が描く曲線の長さ L は,

$$\begin{aligned} L &= L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_1 \\ &= 4\pi(a+x) \times \frac{\theta_n - \theta_5}{360^\circ} \end{aligned}$$

である。ここで,s サイクルで P_1P_2 と Q_1Q_2 が再び一致したとすると,等式

$$5s = nt$$

を満たす自然数 s,t が存在する。n は 5 の倍数でないから,この等式を満たす最小の自然数 s は,$s = n$ である。よって求める曲線の長さは,

$$nL = 4\pi n(a+x) \times \frac{\theta_n - \theta_5}{360^\circ} = \frac{2(3+\sqrt{5})(n-5)}{5}\pi a$$

［出題の意図］

ある円が定円に内接しながらすべらずに回転するとき,回転する円の周上の定点が描く曲線を内サイクロイド（ハイポサイクロイド）といいます。円は正 n 角形の n を限りなく大きくしたものとみなせます。この問題では,正多角形どうしで同じように回転させたらどのような曲線を描くのか,という着想から出題しました。図形の回転について柔軟に考察できるかどうかを問う出題でした。

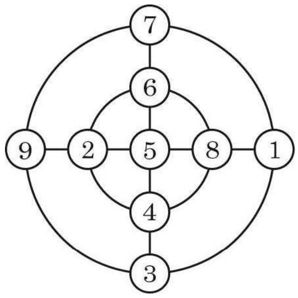
［講評］

432 名中 270 名が選択し,1 名が完答しました。完答した答案は,論理的に考えられているすばらしい解答でした。

解答の糸口を見つけるために,実際に作図をして図形を動かしてみることも大切です。実際の動きの中で,求める曲線の長さは扇形の弧の長さをもとに考えられることに

気がつくのではないでしょうか。さらに，(2)のような一般的な場合でも，簡単な実験が解法の糸口になることあります。具体的な事象から考えるのも，数学において重要な思考の方法です。

4　右の図のように，2 つの同心円と 2 本の直径において円と直径の交わる場所及び円の中心に，異なる自然数を 1 から順に記入する。いま，図には自然数を記入する場所が 9 か所あるので，この場合は 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ記入していくことになる。



図では，直径上に並ぶ 5 つの自然数の和と，同一円周上の 4 つの自然数と中心の自然数を合わせた 5 つの自然数の和がすべて等しくなっている。

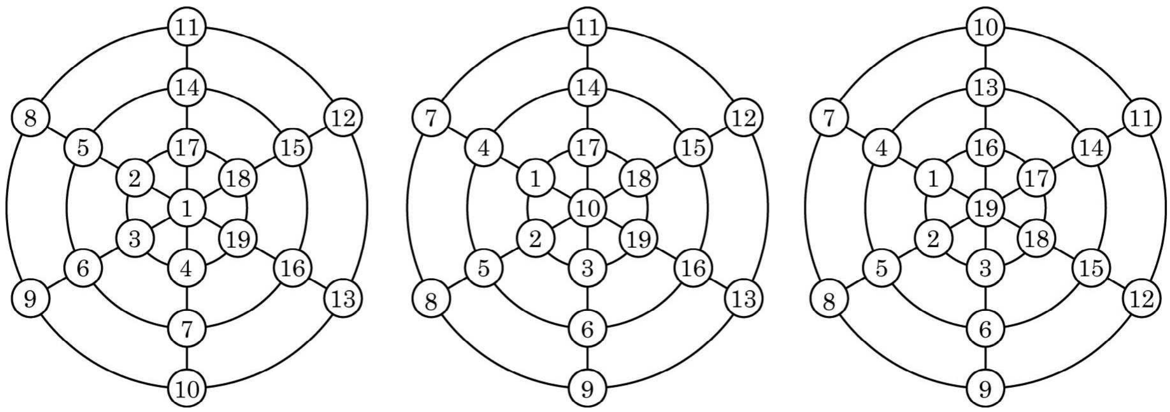
この例を参考にして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　3 つの同心円と 3 本の直径があり，例と同様に円と直径の交わる場所及び円の中心に自然数を記入する。直径上に並ぶ 7 つの自然数の和と，同一円周上の 6 つの自然数と中心の自然数を合わせた 7 つの自然数の和がすべて等しくなるような並べ方を 2 つ答えなさい。ただし，中心に入る自然数は異なる数にすること。

(2)　6 つの同心円と 6 本の直径があり，(1)と同様に円と直径の交わる場所及び円の中心に自然数を記入する。直径上に並ぶ自然数の和と，同一円周上の自然数と中心の自然数を合わせた自然数の和がすべて等しくなるように並べることはできるか。できる場合は，並べ方の方針とその方針によってうまくいく理由を，できない場合は，その理由を答えなさい。

［解答例］

(1)



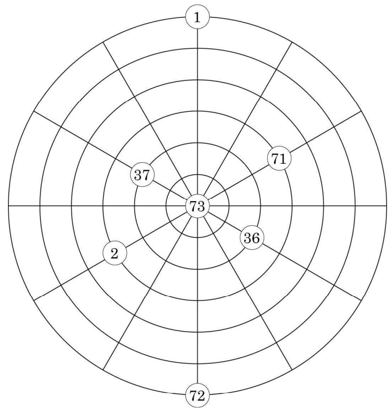
(2)　1 つの円周上に並ぶ自然数の個数は 2 × 6 ＝ 12 個，同心円は 6 個あるからすべての円周上に並ぶ自然数の個数は 12 × 6 ＝ 72 個，中心に入る自然数を合わせると記入する自然数は全部で 73 個である。中心に入る自然数を最大の自然数 73 とする（最小の自然数 1 または中央の自然数 37 でもよい）。残る自然数は 1 から 72 の 72 個。これを小さい順に 1 列に並べて考える。

1, 2, 3, ・・・, 35, 36, 37, 38, ・・・70, 71, 72

一番小さな自然数 1 と一番大きな自然数 72 の和は 73，同様に，二番目に小さな自然数 2 と二番目に大きな数 71 の和も 73 である。このように，和が 73 になる 2 つの自然数の組を順につくっていくと，この組は 72 ÷ 2 ＝ 36 組できる。

この2つの自然数の組を，図の1と72，2と71，・・・，36と37のように，同心円の中心に関して点対称となる位置関係にある2つの交点に配置する。すると，同じ直径上でかつ同じ円周上にある交点どうしには必ず和が73となる2つの自然数が入る。

よって，どの直径上にも和が73になる自然数の組が6組と中心の73が並んでおり，その合計は73 × 6 ＋ 73 ＝ 511となる。また，どの円周上にも和が73になる自然数の組が6組あり，中心の73を加えると合計は73 × 6 ＋ 73 ＝ 511となり，条件は満たされる。



［出題の意図］

この魔方陣のような問題は,「円陣」と呼ばれ,「和算」の中で扱われていたものです。挑戦したことのある人もいたかもしれません。まず，同心円の個数が2個，3個という問題で答えを複数見つけていくことで,うまく並べていく規則性に気づいてもらいたいと考えました。同心円の個数が増えていっても，正しく自然数を並べていけるルールが存在するのです。

そして，この問題の最大のポイントは，その正しい並べ方のルールを理由と合わせてしっかりと自分の言葉で表現できるかどうかです。複雑な事象を，数式や図などの数学的な表現と正しいことばで,曖昧さや誤解のないよう的確に説明できるかどうかを採点の基準としました。

［講評］

432名中360名が選択し，119名が完答しました。

一般に，n 個の同心円と n 本の直径を使っても同じルールで並べることができます。n 個の円周上に並ぶ数字の個数は $2n$ 個，同心円は n 個あるからすべての円周上に並ぶ自然数の個数は $2n^2$ 個，中心に入る自然数を合わせると全部で $2n^2+1$ 個です。(2)の解答例にある場合と同じルールで1から $2n^2+1$ までの自然数を並べればよいのです。中心には最大の自然数 $2n^2+1$ を置きます（最小の1か，中央の n^2+1 でもよい)。残る自然数は $2n^2$ 個なので，和が $1+2n^2$ になる2つの自然数の組が $2n^2 \div 2 = n^2$ 組つくれるので，この自然数の組を同心円の中心に関して点対称な位置関係にある2つの交点に配置すれば，円陣は完成します。

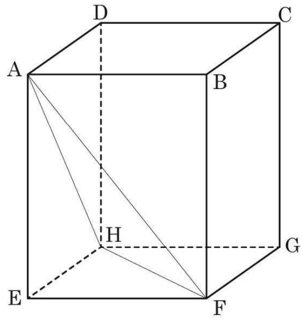
5　AB ＝ 4，AD ＝ 3，AE ＝ 5である直方体ABCD-EFGHの4つの頂点A，E，F，Hを結んでできる四面体AEFHについて次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　四面体AEFHに外接する（四面体の4つの頂点を通る）球の半径Rを求めなさい。

(2)　四面体AEFHに内接する（四面体の4つの面に接する）球の中心をI，直線EIと平面AFHとの交点をP，直線APと辺FHとの交点をQとするとき，次の問いに答えなさい。

（i）　FQ : QHを求めなさい。

（ii）　AP : PQを求めなさい。



[解答例]

(1) この直方体に外接する球は，四面体 AEFH にも外接するので，直方体に外接する球の半径を求めればよい。よって，

$$R = \frac{AG}{2} = \frac{\sqrt{AF^2+FG^2}}{2} = \frac{\sqrt{AB^2+BF^2+FG^2}}{2} = \frac{\sqrt{4^2+5^2+3^2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(2)（i）四面体 IEFH，四面体 IAEH，四面体 IAEF の体積をそれぞれ V_A，V_F，V_H とすると，V_F，V_H は，△ AEH，△ AEF を底面とすると，高さは内接する球の半径で等しいので，$V_H : V_F$ ＝△ AEF : △ AEH　・・・①

また，点 F，H から平面 AEI に下ろした垂線の足を，それぞれ F'，H' とすると，△ FQF' ∽△ HQH' より，FQ : QH ＝ FF' : HH'・・・②

一方，底面（△ AEI）の面積が等しいので，$V_H : V_F$ ＝ FF' : HH'・・・③

①，②，③より，FQ : QH ＝△ AEF : △ AEH

よって，　$FQ : QH = \frac{1}{2}\cdot4\cdot5 : \frac{1}{2}\cdot3\cdot5 = 4 : 3$

(ii) 四面体 IEFQ，四面体 IEHQ の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。底面（△ IEQ）の面積が等しいので，（i）と同様に考えて，$V_1 : V_2$ ＝ FQ : QH ＝ 4 : 3

よって，　$V_1 = \frac{4}{7}V_A$　・・・①

また，V_H，V_1 は△ IEF を底面と考えると，$V_H : V_1$ ＝ AP : PQ　・・・②

ここで，V_A，V_H は，△ EFH，△ AEF を底面とすると，高さは内接する球の半径で等しいので，$V_A : V_H$ ＝△ EFH : △ AEF

よって，

$$V_H = \frac{\triangle AFG}{\triangle FGH}\cdot V_A = \frac{\frac{1}{2}\cdot4\cdot5}{\frac{1}{2}\cdot3\cdot4}\cdot V_A = \frac{5}{3}V_A \quad \cdots ③$$

①，②，③より

$$AP : PQ = \frac{5}{3}V_A : \frac{4}{7}V_A = 35 : 12$$

[出題の意図]

この問題は，空間図形における知識，センス，そして考え方を問う問題です。

一般の四面体において外接する球の半径を求めることは難しいのですが，(1)ではこの四面体の特殊性に着目して，視点を変えることがポイントです。

(2)では，内接する球の半径を求める必要はなく，四面体の体積比，底面積の比，高さの比に着目すれば，解答を導くことができます。この四面体の特殊性に着目すれば，ベクトルを用いた解法も考えられますが，一般の四面体の場合には解答例のような視点の切り替えが有効な場合があります。

[講評]

432 名中 177 名が選択し，1名が完答しました。完答した解答は，ベクトルを用いたすばらしい答案でした。

この問題に関連して，一般に次のことが成り立ちます。

四面体 ABCD に内接する球の中心を I，直線 AI と平面 BCD との交点を P，直線 BP と辺 CD の交点を Q とする。△ BCD，△ CDA，△ DAB，△ ABC の面積をそれぞれ，S_A，S_B，S_C，S_D とすると，

CQ : QD ＝ $S_D : S_C$

BP : PQ ＝ $(S_C+S_D) : S_B$

AI : IP ＝ $(S_B+S_C+S_D) : S_A$

さらに，この結果から次のような美しい式を導くことができる。

四面体の頂点および内接する球の中心の位置ベクトルをそれぞれ，

$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$, $I(\vec{i})$ とすると，

$$\vec{i} = \frac{S_A\vec{a}+S_B\vec{b}+S_C\vec{c}+S_D\vec{d}}{S_A+S_B+S_C+S_D}$$ が成り立つ。

6 分母または分子が分数からなる分数を繁分数という。次の例のような，繁分数を用いた数値の表し方について考える。

例： $$\frac{99}{29} = 3+\frac{12}{29} = 3+\cfrac{1}{\cfrac{29}{12}} = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}} = \cdots\cdots = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

ここで，繁分数を用いた $\sqrt{7}$ の表し方について考えたい。$\sqrt{7}$ は，次のような限りなく続く繁分数で表されることが知られている。

$$\sqrt{7} = a+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\cfrac{1}{b_4+\cfrac{1}{b_5+\cdots\cdots}}}}}$$

この等式を満たす自然数 a，b_1，b_2，b_3，b_4 の値を求めなさい。また b_5 以降の値も考えるとき，b_1，b_2，b_3，b_4，…には，どのような規則性があるか。その理由も含めて説明しなさい。

［解答例］

$$\sqrt{7} = 2+\left(\sqrt{7}-2\right) = 2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{7}-2}} = 2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+2}{3}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-1}{3}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7}-1}}}$$

$$= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{2}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-1}{2}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{7}-1}}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{3}}}}$$

$$= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7}-2}}}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{7}+2}}}}$$

$$= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\left(\sqrt{7}-2\right)}}}} = \cdots\cdots$$

よって，$a=1$，$b_1=b_2=b_3=1$，$b_4=4$

また，b_5以降の値も考えるとき，最後の繁分数における $\sqrt{7}-2$ は，最初の変形における $\sqrt{7}-2$ と同じであるから，以上の変形を繰り返すことによって変形することができるので，b_1，b_2，b_3，b_4，…の値をこの順に並べると，

1，1，1，4，1，1，1，4，1，・・・

したがって，n を自然数とするとき，

$b_{4n-3}=b_{4n-2}=b_{4n-1}=1$，$b_{4n}=4$

［出題の意図］

分数の分母に分数が登場するという構造の分数を，連分数といいます。本問は，実数の連分数展開に関する出題です。$\sqrt{7}$ を連分数展開した結果は1通りではありません。今回は，分子が1となる場合を取り上げましたが，このように分子がすべて1であるような連分数を，正則連分数といいます。

連分数展開したときの規則性は，式変形を繰り返していく中で発見できます。工夫して式変形を行う過程を通して，論理的思考力や表現力を問う問題として出題しました。

［講評］

432名中151名が選択し，13名が完答しました。

問題文の例に示された変形を参考にして，分数の逆数を利用しながら変形していくところがポイントです。試行錯誤しながら変形することで，式の美しさや規則性に気づくことができます。

また，例えば $\sqrt{7}$ について，分子がすべて6となるような連分数展開は，

$$\sqrt{7}-1 = \frac{6}{\sqrt{7}+1} = \frac{6}{2+\left(\sqrt{7}-1\right)}$$

という変形から求めることができます。その他にどのような連分数展開があるか，調べてみると，いろいろな発見ができるのではないでしょうか。