

平成25年度
群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページから3ページまであります。また、解答用紙は6枚あります。
- 2 制限時間は3時間です(13:00~16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 3 解答は、すべて解答用紙に記入してください。また、コンテスト番号と氏名も記入してください。
- 4 途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性、表現力、アイデアの観点で評価します。正解でなくても、アイデア賞を授与することもあります。
- 5 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。また、必要があれば、電卓、はさみ、セロハンテープを用いてもかまいません。
- 6 コンテスト終了後、解答用紙は4枚提出してください。

- 1 1 から n までの自然数が 1 つずつ書かれた n 枚のカードを n 枚がある。これらのカードをすべて用いて、次のルールにしたがって、1 段目に 1 枚、2 段目に 2 枚、3 段目に 3 枚、…と、カードを三角形に並べる。

ルール

- 1 それぞれのカードの数は、その下にある 2 枚のカードの数の差になるようにする。
- 2 最下段のカードは、ルール 1 に当てはまらなくてよい。
- 3 左右対称(線対称)となっている並べ方は、1 通りと数える。

例えば、 $n = 3$ のときは、図 1、図 2、図 3 のように並べることができる。また、図 1 と図 2 の並べ方は 1 通りと数える。

次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

- (1) $n = 6$ のとき、具体例を 2 通り書きなさい。
- (2) $n = 10$ のとき、具体例を 1 通り書きなさい。また、考え方の過程も書きなさい。

図 1

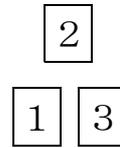


図 2

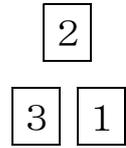
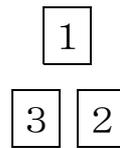


図 3



- 2 次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

- (1) 次の ①～④ を同時に満たす整数 x_1, x_2, x_3, x_4 の組をすべて求めなさい。ただし、④の x_4^2 に注意して求めること。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 21 \cdots \text{①} \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \cdots \text{②} \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \cdots \text{③} \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4^2 = 22 \cdots \text{④} \end{cases}$$

- (2) 次の ①～⑧ を同時に満たす整数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ の組をすべて求めなさい。ただし、⑧の x_8^2 に注意して求めること。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 = 54 \cdots \text{①} \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 7x_8 = 50 \cdots \text{②} \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 6x_8 = 54 \cdots \text{③} \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 5x_8 = 66 \cdots \text{④} \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 54 \cdots \text{⑤} \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 = 42 \cdots \text{⑥} \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + x_7 + 2x_8 = 54 \cdots \text{⑦} \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 8x_7 + x_8^2 = 58 \cdots \text{⑧} \end{cases}$$

- 3 外見では区別がつかないが、重さがすべて異なっているコインが並んでいる。これらのコインを、天秤を用いて重い順に並べることを考える。
次の例を参考にして、後の(1), (2)の問いに答えなさい。

例: コイン 3 枚の場合
3 枚のコイン A, B, C を重い順に並べる場合、まず、A と B, B と C を比べ、 $A > B, B > C$ のときは、2 回比べることで重い順に並べることができる。一方で、 $A > B, B < C$ のときは、さらに A と C を比べ、 $A > C$ ならば $A > C > B$, $A < C$ ならば $C > A > B$ となり、3 回比べることで重い順に並べることができる。
このことから、3 枚のコインが最初にどのような順で並んでいても、重い順に並べることができる最小の比べる回数は 3 回となる。

- (1) 4 枚のコイン A, B, C, D を重い順に並べる場合、最初にどのような順で並んでいても、5 回比べることで重い順に並べることができる。その手順を説明しなさい。
(2) 6 枚のコイン A, B, C, D, E, F を重い順に並べる場合、最初にどのような順で並んでいても、重い順に並べることができる最小の比べる回数を求めなさい。また、その理由も書きなさい。

- 4 下の図のように、マスが等間隔に並んでおり、左から順に 1, 2, 3, 4, 5, ..., n の番号が付いている。



かえるのピョン太は、次のルールでマスを移動する。

ルール

- 1 最初は 1 番のマスに止まっている。
- 2 移動できるのは、今止まっているマスの隣のマスか、2 つ隣のマスである。
- 3 一度止まったマスには止まることができない。

このルールにしたがって、n 個のマスにすべて止まる移動方法について、次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

ただし、最後に止まったマスが n 番のマスでなくてもよい。

また、例えば $n = 3$ のときのピョン太の移動方法は、次の 2 通りとなる。

【 $n = 3$ のときの例】 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

- (1) $n = 4$ のときのピョン太の移動方法を、例にならってすべて書きなさい。
(2) $n = 5$ のときのピョン太の移動方法を、例にならってすべて書きなさい。
(3) $n = 12$ のときのピョン太の移動方法は全部で何通りあるか、求めなさい。また、その理由も書きなさい。

- 5 次の条件を満たす「メッセージ交換アプリ『L』」について、後の(1), (2)の問いに答えなさい。

条 件

- 1 「アプリ『L』」は2人組で登録でき、その2人を「L友」と呼ぶ。AとBが「L友」であるとき、これを $L(A, B)$ と表す。1人が複数の相手と登録することができる。
- 2 ある集団における「アプリ『L』」の登録状況を $\{L(A, B), L(A, C), L(B, D)\}$ のように表す。これは、集団の中においてAとB, AとC, BとDの3組だけが「L友」であり、それ以外のどの2人も「L友」でないことを示している。
- 3 次のいずれの場合も「グループ」と呼ぶ。
 - ① ある3人のうち、どの2人も「L友」である場合
 - ② ある3人のうち、どの2人も「L友」でない場合

【グループの例】

A, B, C, D, Eの5人の集団における「アプリ『L』」の登録状況が $\{L(A, B), L(A, C), L(B, C), L(C, D)\}$ のとき、A, B, Cの3人はどの2人も「L友」なので「グループ」となり、A, D, Eの3人はどの2人も「L友」でないので、これも「グループ」となる。

- (1) A, B, C, D, Eの5人の集団において、「グループ」が1つも作れないような「アプリ『L』」の登録状況を1つ書きなさい。
- (2) A, B, C, D, E, Fの6人の集団において、「アプリ『L』」の登録状況が、どのような場合であっても「グループ」が少なくとも1つ作れることを示しなさい。

- 6 1辺の長さが1の正十二面体について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

必要があれば、別紙の展開図を切り抜いて利用してもよい。

- (1) 1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めなさい。
- (2) 下の図のように、辺ABに対し、頂点Aから最も離れた頂点をD、頂点Bから最も離れた頂点をCとすると、辺ABとCDは平行になる。辺ABとCDの間の距離を求めなさい。

