平成２５年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ｉ．概　要

今年度の数学コンテストは７月２９日（金）に実施され、参加者は４３５名（１４校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１６回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞１０名、奨励賞３２名、アイデア賞６名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞１２名、奨励賞２４名、アイデア賞６名）の計４９名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓やはさみ、あらかじめ配付した立体模型の使用も認めている。

今回は、カードの並べ方に関する問題や、ルールにしたがってマスを移動する方法に関する問題などに取り組んでもらった。これらの問題では、まず試行錯誤を十分行うことが重要であり、試行錯誤する中から解決につながる法則性等を見つけ出す発想力などが問われている。また、大問６の立体図形の問題では、解答開始前に作成した正十二面体の模型を活用したり、あらかじめ配付した正十二面体の立体模型を用いたりして、正十二面体の対辺間の距離を求める問題に取り組んでもらった。立体図形については、普段から模型などの具体物に触れ、イメージをふくらませることが重要である。ほとんどの生徒が３時間集中して取り組み、最後まで熱心に取り組んでいた姿が印象に残っている。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する良い機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後様々な教科を学習して行く上でよい経験になっていると思われる。今後も、この群馬県高校生数学コンテストを継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会として更に充実したものとなることを切に望んでいる。

○　参加生徒の内訳

学　　科	普　通　科		理　数　科		計	
学年（中等）	男	女	男	女	男	女
１年（４年）	１１１	２６			１１１	２６
２年（５年）	１０５	１３８	２６	２０	１３１	１５８
３年（６年）	７		２		９	
計	２２９	１３６	２８	２０	２５１	１８４

合 計　４３５名

※次のページ以降に平成２５年度群馬県高校生数学コンテストの問題と解答・解説があります。（下記は問題表紙の注意事項です。）

注　　意　　事　　項

１　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
２　制限時間は３時間です(13：00 ～ 16：00)。６問中４問を選択して解答してください。
３　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
４　途中の考え方などをきちんと書くようにしてください。論理性，表現力，アイデアの観点で評価します。正解でなくても，アイデア賞を授与することもあります。
５　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみ，セロハンテープを用いてもかまいません。
６　コンテスト終了後、解答用紙は４枚提出してください。

Ⅱ．問題及び解答例

1　１からｎまでの自然数が１つずつ書かれたｎ枚のカードをがある。これらのカードをすべて用いて，次のルールにしたがって，１段目に１枚，２段目に２枚，３段目に３枚，…と，カードを三角形状に並べる。

ルール

1　それぞれのカードの数は，その下にある２枚のカードの数の差になるようにする。
2　最下段のカードは，ルール１に当てはまらなくてよい。
3　左右対称(線対称)となっている並べ方は，１通りと数える。

図１

$\boxed{2}$

$\boxed{1}$ $\boxed{3}$

図２

$\boxed{2}$

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$

図３

$\boxed{1}$

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$

例えば，ｎ＝３のときは，図1，図２，図3のように並べることができる。また，図１と図２の並べ方は１通りと数える。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　ｎ＝６のとき，具体例を２通り書きなさい。

(2)　ｎ＝10のとき，具体例を１通り書きなさい。また，考え方の過程も書きなさい。

［解答例］

(1) ｎ＝６のときは，次のようになる。（４例を示す。）

$\boxed{1}$　　　$\boxed{2}$　　　$\boxed{3}$　　　$\boxed{3}$

$\boxed{3}$ $\boxed{4}$　　$\boxed{3}$ $\boxed{5}$　　$\boxed{4}$ $\boxed{1}$　　$\boxed{2}$ $\boxed{5}$

$\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$　$\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$　$\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$　$\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{1}$

(2) $n = 10$ のとき，

上から１段目の数を・・・　a_1
２段目の数を左から・・・　b_1，b_2
３段目　〃　・・・　c_1，c_2，c_3
４段目　〃　・・・　d_1，d_2，d_3，d_4　とおく。

ここで，１～10の数について，並べることができる位置を調べる。例えば，10は１～９の２数では差をつくることができないので，必ず４段目に並べる。

また，a_1，b_1，b_2，c_2，c_3，d_3，d_4，の７つの数は，３つの条件式

$a_1 = | b_2 - b_1 |$，$b_2 = | c_3 - c_2 |$，$c_3 = | d_4 - d_3 |$

をそれぞれ満たす。

ここで，$b_1 < b_2$，$c_2 < c_3$，$d_3 < d_4$とすると，$a_1 = b_2 - b_1$，$b_2 = c_3 - c_2$，$c_3 = d_4 - d_3$より，$a_1 = d_4 - d_3 - c_2 - b_1$となる。さらに$d_4$を最大の数10とし，$d_3 + c_2 + b_1$を１～３の和とすると，$a_1 = 10 - 6 = 4$となる。よって，$a_1 \leqq 4$となる。

次に，９について考えると，次の①～③より１，２段目には並べることができない。

①	②	③
$\underline{9}$ 1　10 c_1　c_2　c_3 d_1　d_2　d_3　d_4	a_1 b_1　$\underline{9}$ c_1　1　10 d_1　d_2　d_3　d_4	a_1 b_1　b_2 c_1　c_2　$\underline{9}$ d_1　d_2　1　10

このように，１～８の数についても同様に調べると，それぞれの数の並べることができる条件は次の４点となる。

・1 ～ 4 の数は，1 列目に並べる候補として考えられる。
・5，6，7 の数は，1 列目に並べることができない。
・8，9 の数は，3，4 列目のいずれかになる。
・10 の数は，4 段目の数のいずれかになる。

ここで，1 列目の数を 1 ～ 4 で検討していく。

まず，④のように $a_1 = 4$，$b_1 = 1$，$b_2 = 5$ を並べる。

$c_2 = 2$，$c_3 = 7$，また，$d_3 = 3$，$d_4 = 10$ とすると，$c_1 = d_3 = 3$ であり不適となる。

次に，⑤のように $c_2 = 7$, $c_3 = 2$ と入れ替えて，$d_2 = 3$, $d_3 = 10$ とすると，$c_1 = 6$ のとき，$d_1 = 9$，$d_4 = 8$ となり条件を満たす（右図）。

④
4
1　5
c_1　$\underline{2}$　$\underline{7}$
d_1　d_2　3　10

⑤
4
1　5
c_1　$\underline{7}$　$\underline{2}$
d_1　$\underline{3}$　$\underline{10}$　d_4

4
1　5
6　7　2
9　3　10　8

［出題の意図］

差の関係を組み入れたカード並べからの出題です。$n = 6$ の場合で，カードを並べる法則や条件を見つけられると，$n = 10$ の場合にも活用することができます。

この問題では，カードの並べ方の規則性を，試行錯誤を通して見つけ出すことにより，論理的思考力や表現力を問う問題として出題しました。

［講評］

435 名中 428 名が選択し，16名が完答しました。(2)では，各カードを三角形状に並べる際，右の図のように，偶数を G，奇数を K として，1 ～ 10 の自然数を偶数，奇数と分けて調べてみることも有効です。

G
K　K
G　K　G
K　K　G　G

(2)の別解としては，次のような例もあげられます。

＜別解＞

3
2　5
7　9　4
8　1　10　6

3
7　4
2　9　5
8　10　1　6

4
6　2
1　7　5
9　10　3　8

2　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　次の①～④を同時に満たす整数 x_1，x_2，x_3，x_4 の組をすべて求めなさい。ただし，④の x_4^2 に注意して求めること。

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=21\cdots① \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=16\cdots② \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\cdots③ \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4^2=22\cdots④ \end{cases}$$

(2)　次の①～⑧を同時に満たす整数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8 の組をすべて求めなさい。ただし，⑧の x_8^2 に注意して求めること。

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8=54\cdots① \\ 8x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6+6x_7+7x_8=50\cdots② \\ 7x_1+8x_2+x_3+2x_4+3x_5+4x_6+5x_7+6x_8=54\cdots③ \\ 6x_1+7x_2+8x_3+x_4+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8=66\cdots④ \\ 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4+x_5+2x_6+3x_7+4x_8=54\cdots⑤ \\ 4x_1+5x_2+6x_3+7x_4+8x_5+x_6+2x_7+3x_8=42\cdots⑥ \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4+7x_5+8x_6+x_7+2x_8=54\cdots⑦ \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+6x_5+7x_6+8x_7+x_8^2=58\cdots⑧ \end{cases}$$

［解答例］

(1)　①＋②＋③＋④より，$10(x_1+x_2+x_3+x_4)-x_4+x_4^2=62$

したがって，$x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{62+x_4-x_4^2}{10}$

$\dfrac{62+x_4-x_4^2}{10}=k\cdots$⑤とすると，$x_1+x_2+x_3+x_4=k\cdots$⑥

①－②－⑥より，$-4x_1=5-k$。よって，$x_1=\dfrac{k-5}{4}\cdots$⑦

同様にして，②－③－⑥，(③－①)÷2－⑥，④－①－⑥より，

$x_2=\dfrac{k-13}{4}\cdots$⑧，　$x_3=\dfrac{k+9}{2}-x_4\cdots$⑨，　$x_4^2-5x_4=1-k\cdots$⑩

⑩に⑤を代入すると，

$x_4^2-5x_4=1-\dfrac{62+x_4-x_4^2}{10}$

$9x_4^2-49x_4+52=0$

$(x_4-4)(9x_4-13)=0$

よって，$x_4=4,\dfrac{13}{9}$

$x_4=4$ のとき，$k=5$ となり，$x_1=0$，$x_2=-2$，$x_3=3$

しがたって，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(0,-2,\ 3,\ 4)$

$x_4=\dfrac{13}{9}$のとき，$k=\dfrac{497}{81}$となり，$x_1=\dfrac{23}{81}$，$x_2=-\dfrac{139}{54}$，$x_3=\dfrac{473}{81}$

しがたって，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(\dfrac{23}{81},-\dfrac{139}{81},\ \dfrac{473}{81},\ \dfrac{13}{9})$

(2)　①＋②＋…＋⑧より $36(x_1+x_2+\cdots+x_7)=432-35x_8-x_8^2$

したがって，$x_1+x_2+\cdots+x_8=\dfrac{432+x_8-x_8^2}{36}$

$\dfrac{432+x_8-x_8^2}{36}=k$とすると，$x_1+x_2+\cdots+x_8=k\cdots$⑨

①－②－⑨より，$-8x_1=4-k$。よって，$x_1=\dfrac{k-4}{8}\cdots$⑩

同様にして，②－③－⑨，③－④－⑨，…，⑦－⑧－⑨より，

$x_2=\dfrac{k+4}{8}$，$x_3=\dfrac{k+12}{8}$，$x_4=\dfrac{k-12}{8}$，$x_5=\dfrac{k-12}{8}$，$x_6=\dfrac{k+12}{8}$，$x_7=\dfrac{k+x_8-x_8^2+4}{8}\cdots$⑪

また，⑧－①－⑨より，$x_8^2-9x_8=4-k\cdots$⑫

$x_8^2-9x_8=1-\dfrac{432+x_8-x_8^2}{36}$

$35x_8^2-323x_8+288=0$

$(x_8-1)(35x_8-288)=0$

よって，$x_8 = 1, \dfrac{288}{35}$

ここで，⑫より，$k = 4 + 9x_8 - x_8^2$ だから，⑩，⑪より，

$$x_1 = \frac{(4+9x_8-x_8^2)-4}{8} = \frac{x_8(9-x_8)}{8},\quad x_7 = \frac{(4+9x_8-x_8^2)+x_8-x_8^2+4}{8} = 1 + \frac{x_8(5-x_8)}{4}$$

$$x_2 = x_1 + 1,\quad x_3 = x_6 = x_1 + 2,\quad x_4 = x_5 = x_1 - 1$$

ゆえに，$x_8 = 1$ のとき，

$$x_1 = \frac{1\cdot 8}{8} = 1,\quad x_7 = 1 + \frac{1\cdot 4}{4} = 2,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = x_6 = 3,\quad x_4 = x_5 = 0$$

しがたって，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 2, 3, 0, 0, 3, 2, 1)$

また，$x_8 = \dfrac{288}{35}$ のとき，

$$x_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{288}{35}\cdot\frac{27}{35} = \frac{972}{1225},\quad x_7 = 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{288}{35}\cdot\left(-\frac{113}{35}\right) = -\frac{6911}{1225}$$

$$x_2 = \frac{2197}{1225},\quad x_3 = x_6 = \frac{3442}{1225},\quad x_3 = x_6 = -\frac{253}{1225}$$

しがたって，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$

$$= \left(\frac{972}{1225}, \frac{2197}{1225}, \frac{3422}{1225}, -\frac{253}{1225}, -\frac{253}{1225}, \frac{3442}{1225}, -\frac{6911}{1225}, \frac{288}{35}\right)$$

［出題の意図］

連立方程式からの出題です。普段は，多くても変数が3つ程度，次数は2次程度のものを扱うことが多いと思います。今回は，変数を増やし，さらに2次の項も含む式を題材としました。

連立方程式は，変数を1つずつ消去していくことによって解くことができますが，変数が増えるにしたがって，その処理に膨大な時間がかかります。ここでは，方程式の係数の規則性に着目して効果的に変数を消去する方法や，1つだけ含まれている2次の項の処理の仕方など，与えられた情報を効果的に整理し，処理する能力を問う問題として出題しました。

［講評］

435名中130名が選択し，1名が完答しました。

問題集などでは，次のような連立方程式の問題を目にすることがあります。

> 次の連立方程式を解きなさい。
>
> $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \cdots ① \\ x_2 + x_3 = 4 \cdots ② \\ x_3 + x_1 = 5 \cdots ③ \end{cases}$$

解答

①＋②＋③より $x_1 + x_2 + x_3 = 6 \cdots$④を作って，

④－①より，$x_3 = 3$

④－②より，$x_1 = 2$

④－③より，$x_2 = 1$

したがって，$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$

この問題では，④の式を作ることが有効です。この考え方をヒントに考えていくとよいでしょう。(1)の⑥式や，(2)の⑨式のように，式の値を k と置いて考える方法も効果的です。また，この問題では，上下の式は，1つの変数を除いて，同じ変数の係数の差が1であることに着目できるとよいでしょう。

3　外見では区別がつかないが，重さがすべて異なっているコインが並んでいる。これらのコインを，天秤(てんびん)を用いて重い順に並べることを考える。
次の例を参考にして，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

例:コイン３枚の場合

３枚のコインA，B，Cを重い順に並べる場合，まず，AとB，BとCを比べ，A＞B，B＞Cのときは，２回比べることで重い順に並べることができる。一方で，A＞B，B＜Cのときは，さらにAとCを比べ，A＞CならばA＞C＞B，A＜CならばC＞A＞Bとなり，３回比べることで重い順に並べることができる。
このことから，３枚のコインが最初にどのような順で並んでいても，重い順に並べることができる最小の比べる回数は３回となる。

(1)　４枚のコイン A，B，C，D を重い順に並べる場合，最初にどのような順で並んでいても，５回比べることで重い順に並べることができる。その手順を説明しなさい。
(2)　６枚のコイン A，B，C，D，E，Fを重い順に並べる場合，最初にどのような順で並んでいても，重い順に並べることができる最小の比べる回数を求めなさい。また，その理由も書きなさい。

［解答例］

丸数字で天秤の回数を表すことにする。

(1) まず，A と B，C と D で比較する(②)。仮に，A ＜ B，C ＜ D となったとする。
次に，重いもの同士である B と D を比較する(③)。仮に，B ＜ D となったとする。
この時点で，A ＜ B ＜ D が決まる。
残った C を B と比較する(④)。
C ＜ B のとき，A と比較して重い順に並べることができる(⑤)。
C ＞ B のとき，D と比較して重い順に並べることができる(⑤)。
したがって，5 回比べることで重い順に並べることができる。

(2) (1)と同様にして，A と B，C と D で比較する(②)。仮に，A ＜ B，C ＜ D となったとする。
次に，重いもの同士である B と D を比較する(③)。仮に，B ＜ D となったとする。
この時点で，A ＜ B ＜ D が決まる。
ここで，重さが真ん中の B と E を比較する(④)。
(a) B ＜ E のとき，E と D を比較する(⑤)。
ア）E ＜ D のとき，A ＜ B ＜ E ＜ D が決まる。
次に，C と B を比較する(⑥)。
C ＜ B のとき，C と A を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
C ＞ B のとき，C と E を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
イ）D ＜ E のとき，A ＜ B ＜ D ＜ E が決まる。
次に，C と B を比較する(⑥)。
C ＜ B のとき，C と A を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
C ＞ B のとき，B ＜ C ＜ D となり，重い順に並べることができる。
(b) E ＜ B のとき，E と A を比較する(⑤)。
ア）A ＜ E のとき，A ＜ E ＜ B ＜ D が決まる。
次に，C と E を比較する(⑥)。
C ＜ E のとき，C と A を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
C ＞ E のとき，C と B を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
イ）E ＜ A のとき，E ＜ A ＜ B ＜ D が決まる。
次に，C と A を比較する(⑥)。
C ＜ A のとき，C と E を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
C ＞ A のとき，C と B を比較して(⑦)，重い順に並べることができる。
したがって，5 枚のコインを重い順に並べる最小の比べる回数は 7 回である。
次に，6 枚目の F を，5 枚のコインの中で真ん中の重さのコイン（3 番目に重いコイン）と比較する(⑧)。
F が真ん中の重さのコインよりも重いときは，重い方のコインと順に 2 回比較すれば，F の重さの順位は決まる(⑨，⑩)。また，F が真ん中の重さのコインよりも軽いときも同様に順位は決まる(⑨，⑩)。したがって，6 枚のコイン を重い順に並べる場

合，最初にどのような順で並んでいても，重い順に並べることができる最小の比べる回数は 10 回となる。

［出題の意図］

論理的思考力を育む問題として出題しました。この問題のように，すべての場合を漏れなくかつ重複なく考えることは根気が必要ですが，数学においては大変重要な活動のひとつです。自分の思いこみにとらわれず，客観的に判断する力を身に付けておきましょう。

［講評］

435 名中 337 名が選択しましたが，残念ながら完答者はいませんでした。

(1)は次のような別解もあります。

〔別解 1〕

まず，A，B，C の 3 枚の順を，例にならって決める。(③)

この後，残った D と，A，B，C の中で，重さが真ん中のものと比較する。(④)

D が軽ければ，A，B，C の中で最も軽いものと比較する。(⑤)

D が重ければ，A，B，C の中で最も重いものと比較する。(⑤)

以上で，4 枚の重さの順位が決まる。

〔解法Ⅱ〕

A と B，C と D で各々大小を比較する。(②)

次に，重いもの同士(③)，及び軽いもの同士(④)で比較する。

③で最大が決まり，④で最小が決まる。

最後に，最大，最小でない残りの 2 枚のコインを比較して(⑤)，4 枚の重さの順位が決まる。

4　下の図のように，マスが等間隔に並んでおり，左から順に1，2，3，4，5，…，n の番号が付いている。

1	2	3	4	5	…	n

かえるのピョン太は，次のルールでマスを移動する。

ルール
1　最初は1番のマスに止まっている。
2　移動できるのは，今止まっているマスの隣のマスか，2つ隣のマスである。
3　一度止まったマスには止まることができない。

このルールにしたがって，n個のマスにすべて止まる移動方法について，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。
ただし，最後に止まったマスがn番のマスでなくてもよい。
また，例えばn＝3のときのピョン太の移動方法は，次の2通りとなる。
【n＝3のときの例】　1→2→3
　　　　　　　　　　1→3→2

(1)　n＝4のときのピョン太の移動方法を，例にならってすべて書きなさい。
(2)　n＝5のときのピョン太の移動方法を，例にならってすべて書きなさい。
(3)　n＝12のときのピョン太の移動方法は全部で何通りあるか，求めなさい。また，その理由も書きなさい。

［解答例］

(1) 1→2→3→4
1→2→4→3
1→3→2→4
1→3→4→2の4通り。

(2) 1→2→3→4→5
1→2→3→5→4
1→2→4→3→5
1→2→4→5→3
1→3→2→4→5
1→3→5→4→2の6通り。

(3) $n=k(\geqq 6)$のときの移動方法の数を$P(k)$とする。
始めに，1→2と進んだ場合，2番を含めて2，3，4,…，kの$k-1$個のマスが残っている。これらのマスにあらためて1，2，3,…，$k-1$の番号を付け直せば，$n=k-1$のときの移動方法を考えることと同じになるので，移動方法の数はP$(k-1)$通りである。
次に，始めに1→3と進んだ場合，次に進めるマスは2番，4番，5番のいずれかである。

① 1→3→2と進んだ場合
進めるのは4番となる。このとき，4番を含めて4，5，6,…，kの$k-3$個のマスが残っている。したがって，移動方法数はP$(k-1)$通りと表せる。

② 1→3→4と進んだ場合
進めるのは2番，5番，6番となる。2番に進むと次に進めない。また，5番または6番に進むと2番に進めない。したがって，条件を満たす移動方法は存在しない。

③ 1→3→5と進んだ場合
そのまま1つ飛ばしで進み，
k が奇数のとき，1→3→5→…→k→k−1→k−3→…→4→2
k が偶数のとき，1→3→5→…→k−1→k→k−2→…→4→2
と進む方法のみとなる。つまり，移動方法数は，kが偶数，奇数にかかわらず1通りとなる。

以上より，$k \geqq 6$ のとき，

$P(k) = P(k-1) + P(k-3) + 1 \cdots$ ※ I

が成り立つ。（論証の都合上，$k \geqq 6$ としたが，実際は $k \geqq 4$ で成り立つ。）

よって，例や(1)，(2)で求めた $P(3) = 2$，$P(4) = 4$，$P(5) = 6$ であることに注意して，$k = 6, 7, 8, \cdots, 12$ に対しての $P(k)$ の値を順に求めると，

$$\left.\begin{array}{l} P(6) = P(5) + P(3) + 1 = 6 + 2 + 1 = 9 \\ P(7) = P(6) + P(4) + 1 = 9 + 4 + 1 = 14 \end{array}\right\} \cdots \text{※ II}$$

$$P(8) = P(7) + P(5) + 1 = 14 + 6 + 1 = 21$$

$$P(9) = P(8) + P(6) + 1 = 21 + 9 + 1 = 31$$

$$P(10) = P(9) + P(7) + 1 = 31 + 14 + 1 = 46$$

$$P(11) = P(10) + P(8) + 1 = 46 + 21 + 1 = 68$$

$$P(12) = P(11) + P(9) + 1 = 11 + 31 + 1 = 100$$

したがって，求める移動方法数は 100 通りとなる。

［出題の意図］

この問題は，「場合の数」と「数列の漸化式」の融合問題であり，大学入試問題としてもよく出題されています。ここでは，いくつかの簡単な例を確かめてみることで，1年生でも規則性が発見できると考え，出題しました。

また，数学では，具体的な事象から規則性を見つけて一般化し，それが正しいことを示す手法がよく用いられます。このような数学的な考え方は，日常生活においても活用してほしい考え方のひとつです。

［講評］

435 名中 417 名が選択し，10名が完答しました。※ I の式は，数列の漸化式（ぜんかしき）と呼ばれているもので，例えば，※IIのように第 6 項か第 5 項と第 3 項の値で決まり，第 7 項か第 6 項と第 4 項の値で決まります。このように，漸化式は，各項がそれ以前の項の関数として再帰的に定められている式のことをいいます。

漸化式の例として，次のようなフィボナッチ数列があります。

0，1，1，2，3，5，8，13，21，…

$f(x) = f(x-1) + f(x-2)$　（$x \geqq 3$），$f(1) = 0$，$f(2) = 1$

フィボナッチ数は，自然界の現象に数多く出現します。花びらの数やひまわり，マツボックリの実に現れる螺旋の数などがあげられます。

答案の中には，樹形図から見事に規則性を見つけ出すことができたものや，数字の並びから正しい漸化式を導くことができたものもみられました。「場合の数」では，いきなり式を作ろうとせず，基準を設けて（例えば樹形図などを用いて）実際に書き並べることが大切です。

5 次の条件を満たす「メッセージ交換アプリ『L』」について，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。

条　件

1 「アプリ『L』」は2人組で登録でき，その2人を「L友」と呼ぶ。AとBが「L友」であるとき，これをL(A, B)と表す。1人が複数の相手と登録することができる。

2 ある集団における「アプリ『L』」の登録状況を｛L(A, B), L(A, C), L(B, D)｝のように表す。これは，集団の中においてAとB，AとC，BとDの3組だけが「L友」であり，それ以外のどの2人も「L友」でないことを示している。

3 次のいずれの場合も「グループ」と呼ぶ。

① ある3人のうち，どの2人も「L友」である場合

② ある3人のうち，どの2人も「L友」でない場合

【グループの例】

A, B, C, D, Eの5人の集団における「アプリ『L』」の登録状況が｛L(A, B), L(A, C), L(B, C), L(C, D)｝のとき，A, B, Cの3人はどの2人も「L友」なので「グループ」となり，A, D, Eの3人はどの2人も「L友」でないので，これも「グループ」となる。

(1) A, B, C, D, Eの5人の集団において，「グループ」が1つも作れないような「アプリ『L』」の登録状況を1つ書きなさい。

(2) A, B, C, D, E, Fの6人の集団において，「アプリ『L』」の登録状況が，どのような場合であっても「グループ」が少なくとも1つ作れることを示しなさい。

［解答例］

(1) ｛L(A, B)，L(B, C)，L(C, D)，L(D, E)，L(E, A)｝

(2) Aを基準として考える。Aと「L友」である人(もしくは「L友」でない人)は少なくとも3人いる。その3人を仮にB，C，Dとする。もし，B，C，Dの中に「L友」である2人組(もしくは「L友」でない2人組)が1組あれば，Aを含めたその3人で「グループ」が作れる。また，B，C，Dの中に「L友」である2人組がなければ(もしくはすべて「L友」どうしであれば)，B，C，Dの3人で「グループ」が作れる。したがって，どのような登録状況であっても「グループ」が少なくとも1つ作れる。

［出題の意図］

「10羽の鳩が9つの巣の中にいる。すると，少なくとも2羽は同じ巣の中にいることになる。」

数学の証明において，よく用いられるこの考え方を「鳩の巣原理」(もしくは「ディリクレの原理」や「引き出し論法」など)と言います。この問題では，その「鳩の巣原理」をさらに一般化した「ラムゼーの定理」に関する問題を出題しました。「鳩の巣原理」や「ラムゼーの定理」などの考え方は，数学の論証における重要な考え方のひとつであると同時に，「ラムゼーの定理」の基礎となる「グラフ理論」は，コンピュータのデータ構造やアルゴリズムなどに広く応用されています。

［講評］

435名中251名が選択し，9名が完答しました。

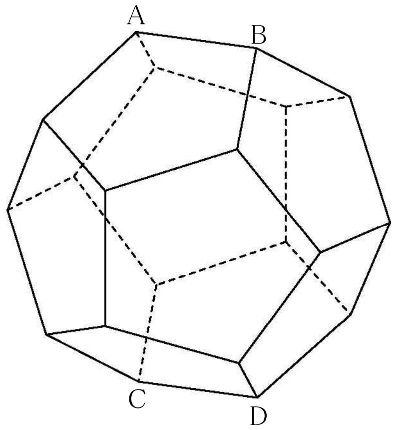
(1)は，他に｛L(A, C)，L(C, E)，L(E, B)，L(B, D)，L(D, A)｝なども正解です。

(2)は，丁寧に場合分けを行うことで，論理的に説明することができます。また，(1)を利用してきちんと説明できていた答案もみられました。ただ，(1)を利用する場合は，一般性が失われないよう注意する必要があります。図で表して考えるアイディアなど，分かりやすく工夫されたすばらしい答案も見られました。

6　１辺の長さが１の正十二面体について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。
必要があれば，別紙の展開図を切り抜いて利用してもよい。

(1)　１辺の長さが１の正五角形の対角線の長さを求めなさい。

(2)　下の図のように，辺ABに対し，頂点Aから最も離れた頂点をD，頂点Bから最も離れた頂点をCとすると，辺ABとCDは平行になる。辺ABとCDの間の距離を求めなさい。



［解答例］

(1) 図Ⅰのように１辺が 1cm の正五角形 RSTUV において，対角線 RT と SV の交点を W とする。△ RST と△ RSV はともに二等辺三角形であり，△ RSV と△ WSR において，

∠RSV ＝∠RVS ＝∠SRW ＝ 36°

２組の角がそれぞれ等しいので，△ RSV ∽△ FSR …①

正五角形の１つの内角は 108°なので

∠ VRW ＝ 108°－ 36°＝ 72°

また，∠ VWR=∠ WSR ＋∠ WRS ＝ 36°＋ 36°＝ 72°

２角が等しいので，△ VRW も二等辺三角形である。

したがって，VR ＝ VW ＝ 1

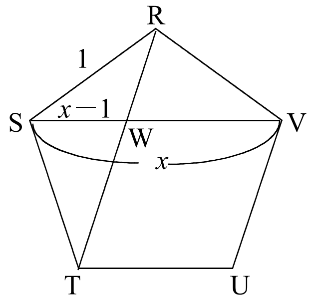
以上のことから，SV ＝ x cm とすれば，①より

$1 : x = (x-1) : 1$ より，$x^2 - x - 1 = 0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ なので，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって対角線の長さは $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

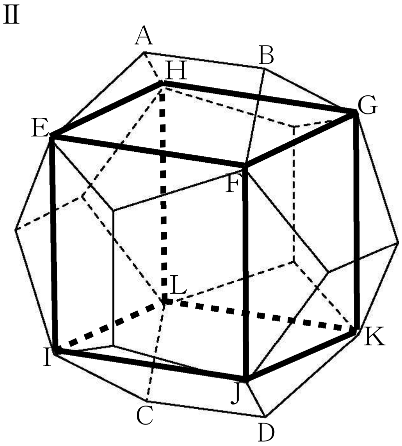
図Ⅰ



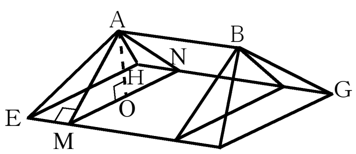
(2) 図Ⅱのように正十二面体の８つの頂点を結ぶと立方体 EFGH-IJKL ができる。この立方体と残った屋根のような形をした６つの立体を合わせた立体が正十二面体であると考えることができる。

図Ⅲは，屋根のような形をした立体 AB - EFGH であり，A から辺 EF，GH へ，それぞれ垂線 AM，AN を引き，線分 MN の中点を O とすると，立体の高さは AO となる。ここで，AO ＝ h とする。

図Ⅱ



図Ⅲ



図Ⅳにおいて，A から辺 EH に垂線を引き，辺 EH との交点を P とすると

$$AH = AE = 1$$

$$EH = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$OP = (EF - AB) \div 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

また，$AH^2 = AP^2 + HP^2$，$AP^2 = OP^2 + AO^2$ より

$$AO^2 = AP^2 - OP^2 = (AH^2 - HP^2) - OP^2$$

$$= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

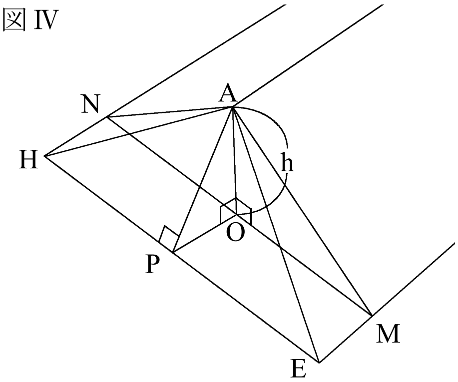
よって

$$AO = h = \frac{1}{2}$$

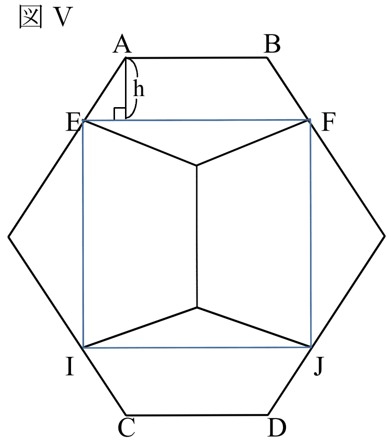
図Ⅴは，正十二面体の 2 辺 AB と CD を含む平面に対し，垂直方向から正十二面体を見た図であり，辺 AB と CD の間の距離 ℓ は

$$\ell = 2h + EI = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

図Ⅳ



図Ⅴ



［出題の意図］

正十二面体を用いた空間図形の問題です。正多面体には，正四面体，立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体があります。正多面体は，各面の中心を結ぶという操作で別の正多面体を作ることができます。例えば，

・正二十面体⇔正十二面体
・立方体⇔正八面体
・正四面体⇔正四面体

これらの関係を双対といいます。(このうち正四面体は正四面体自身になる。「自己双対」という。)

その他，正六面体の 1 つおきの頂点を結ぶことで正四面体ができたり，正四面体の各辺の中点を結ぶことで正八面体ができたりします。

ここでは，正十二面体の適当な頂点を結ぶことによって立方体ができる（すなわち，正十二面体の中に立方体が隠されている）ことなど，着眼点を見つけることが重要です。

［講評］

435 名中 166 名が選択し，11 名が完答しました。

2 辺間の距離を求めるには，図Ⅱのように，正十二面体にひそむ立方体に気付くことや，図Ⅴのように，2 辺が含まれる平面で考察することがポイントとなるでしょう。

図Ⅵのように，正十二面体の中に含まれる正五角形に着目して，線分 AC を，この正五角形の対角線として求めた独創的なすばらしい答案も見られました。

図Ⅵ