平成２４年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ．概　要

今年度の数学コンテストは７月２７日（金）に実施され、参加者は４０６名（１４校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１５回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞１２名、奨励賞２４名、アイデア賞６名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞２３名、アイデア賞８名）計４３名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓やはさみの使用も認めている。

今回は、自然数の和に関する問題、四角形の面積比と四面体の体積比の問題、継子立てや最短経路、整数の最高位の数字に関する問題、ルールに従って移動する経路に関する問題などがあった。参加生徒は、電卓を用いることで試行錯誤を繰り返したり、紙一面に数字を書き並べて法則性を見いだしたりしていた。ほとんどの生徒が３時間集中して取り組み、最後まで熱心に取り組んでいた姿が印象に残っている。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する良い機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後いろいろな教科を学習して行く上でよい経験になっていると思われる。今後も、この群馬県高校生数学コンテストを継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会としてさらに充実するよう切に望んでいる。

○　参加生徒の内訳

学　科	普　通　科		理数科		工業科	計	
学年(中等)	男	女	男	女	男	男	女
１年(４年)	９８	４６	４			１０２	４６
２年(５年)	１２２	９０	２５	９	３	１５０	９９
３年(６年)	９					９	
計	２２９	１３６	２９	９	３	２６１	１４５

合 計　４０６名

※次のページ以降に平成２４年度数学コンテストの問題と解答・解説があります。
　下記は問題表紙の注意事項です（参考まで）。

注　　意　　事　　項

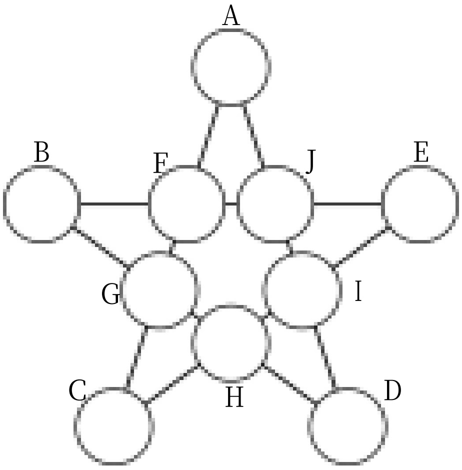
１　問題は，１ページから３ページまであります。また，解答用紙は６枚あります。
２　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
３　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
４　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
５　コンテスト終了後、解答用紙は４枚提出してください。

Ⅱ．問題及び解答例

1　下の図は，10個の円Ａ～Ｊを星形に並べたものである。それぞれの円の中に異なる自然数を，同一直線上にある４つの円に入れた数の和がすべて等しくなるように入れる。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，どの円にも自然数は１個だけ入れるものとする。

(1)　１から10までの自然数では完成できないことが知られている。完成できない理由を説明しなさい。

(2)　1，2，3，4，5，6，8，9，10，12の10個の自然数では完成することができる。どのように数を入れればよいか，具体例を１つ書きなさい。また，考え方の過程も書きなさい。



[解答例]

(1) 1から10までの自然数で完成できたとする。同一直線上の4つの円の数の和をkとおくと，

A＋F＋G＋C＝k …①
B＋G＋H＋D＝k …②
C＋H＋I＋E＝k …③
D＋I＋J＋A＝k …④
E＋J＋F＋B＝k …⑤

①＋②＋③＋④＋⑤より，

2(A+B+C+D+E+F+G+H+I+J)＝5k

AからJには，1から10の数が入るから，2×55＝5k。よって，k＝22。

1をA，B，C，D，Eのいずれかに入れても，F，G，H，I，Jのいずれかに入れても一般性は失われないから，1をAに入れて考えることにする。

ここで，1をAに入れると，①，④のいずれかには必ず10が入る。なぜなら，

①，④上にある1以外の6つの数の和は，

F＋G＋C＋D＋I＋J＝(22－1)×2＝42

6つの数が10以外の数であるとすると，9＋8＋7＋6＋5＋4＝39＜42となり，題意を満たす数の組はない。

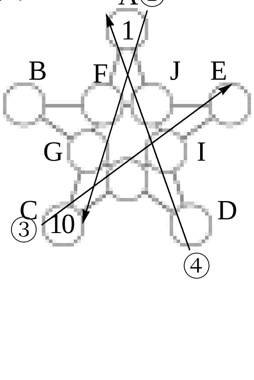
したがって，①，④のいずれかには必ず10が入る。

ここで，10が①上にあるとする。

10は，F，G，Cのいずれの円に入れても一般性は失われないので，図Ⅰのように10をCに入れて考えることにする。

①，③，④に入る数の組み合わせをすべて考えると次の組み合わせになる。

図Ⅰ



①(1，2，9，10)，③(3，4，5，10)，④(1，6，7，8)
①(1，3，8，10)，③(2，4，6，10)，④(1，5，7，9)
①(1，4，7，10)，③なし　　　　，④なし
①(1，5，6，10)，③(2，3，7，10)，④(1，4，8，9)

③と④には，共通する数字が存在しない。このことは，どんな 2 つの直線にも共通する数が 1 つ存在しなければならないことに矛盾する。

したがって， 1 から 10 までの自然数では完成することはできない。

（2） 1，2，3，4，5，6，8，9，10，12 の 10 個の自然数の和は，

1＋2＋3＋4＋5＋6＋8＋9＋10＋12＝60

したがって，1 本の直線上の 4 つの数の和は，60 × 2 ÷ 5 ＝ 24。

まず，A に 12 を入れる。(F, G, C)と(D, I, J)に入る数の組み合わせは，

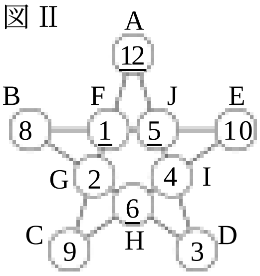
（1，2，9)，（1，3，8)，（1，5，6)，（2，4，6)，（3，4，5）

の 5 通り。これから，重複なく 2 組を選ぶと

（1，2，9)と(3，4，5)，（1，3，8)と(2，4，6)

の 2 通り。

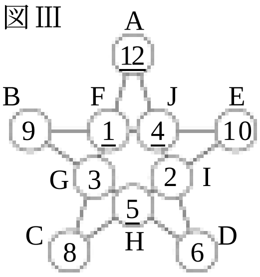
図Ⅱ



ⅰ）（1，2，9)と(3，4，5)のとき

図Ⅱのように，F に 1 を入れると，(B，J，E)に入る数の組み合わせは，J には 3，4，5 のいずれかが入り，B，E には残りの 6，8，10 のうちの 2 つが入る。B＋J＋E ＝ 23 だから，(B, J, E)に入る数の組み合わせは(5, 8, 10)のみ。このとき，J に 5，H に 6 が入り，B，E には 8，10，C，G には 2，9，D，I には 3，4 のいずれかが入る。しかし，いずれの場合でも直線上の 4 つの数の和が 24 になる組み合わせは存在しない。

図Ⅲ



ⅱ）（1，3，8)と(2，4，6)のとき

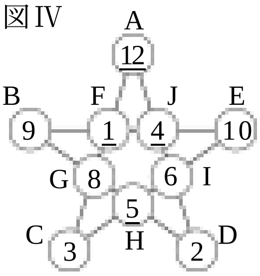
図Ⅲのように，F に 1 を入れると，(B，J，E)に入る数の組み合わせは，J には 2，4，6 のいずれかが入り，B，E には残りの 5，9，10 のうちの 2 つが入る。B ＋ J ＋ E ＝ 23 だから，(B, J, E)に入る数の組み合わせは(4, 9, 10)のみ。このとき，H には 5 が入り，B，E には 9，10，C，G には 3，8，D，I には 2，6 のいずれかが入る。直線上の 4 つの数の和が 24 になる組み合わせは，(B, G, H, D)と(E，I，H，C)で，

（9，8，5，2)と(10，6，5，3)

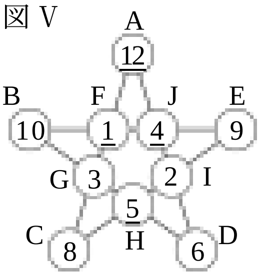
（10，3，5，6)と(9，2，5，8)

となる。したがって，具体例は図Ⅳ，図Ⅴのようになる。

図Ⅳ



図Ⅴ



[出題の意図]

星陣からの出題です。今回は 5 星陣の出題でしたが，星陣には，6 星陣，7 星陣…と種類も豊富で，古くからパズルとして親しまれてきています。5 星陣は，1 から 10 までの自然数では完成できないことが知られています。また，条件を少し変えることで 5 星陣を完成することができます。この問題では，具体的に試行錯誤をすることを通して，論理的思考力やどの数も重複することなく，また，漏らさず数え上げる力を問う問題として出題しました。

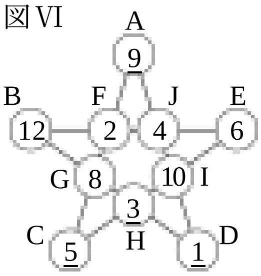
[講評]

406 名中 268 名が選択し，7名が完答しました。(1)では，どの円も 2 本の直線が交わっている点に着目し，それぞれの直線上の 4 つの数の和が 22 となることに気付くことがポイントとなるでしょう。(2)では，奇数が 1，3，5，9 の 4 つしかないことに着目した次のような答案もみられました。

奇数は 4 つあり，各直線上に奇数は偶数個必要となる。したがって，図Ⅵのように，仮に(A, C, H, D)に(9, 5, 3, 1)とすると，B＋G ＝ 20，E＋I ＝ 16，F＋G ＝ 10，J＋I ＝ 14，…となる。

<以下省略>

図Ⅵ



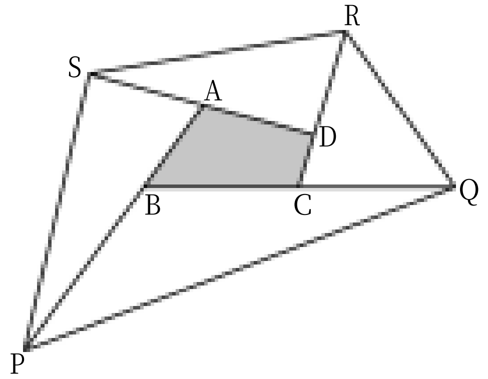
このような方法で試行錯誤しながら完成させた答案もみられました。

2　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　図Ⅰのように，四角形ABCDの各辺の延長上に，次の条件に従ってそれぞれ点P, Q, R, Sをとり四角形PQRSを作るとき，四角形ABCDと四角形PQRSの面積比を求めなさい。

条　件
AP＝ 3 AB，BQ＝ 2 BC
CR＝ 3 CD，DS＝ 2 DA

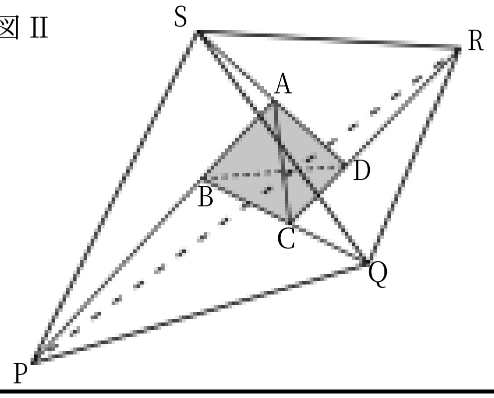
図Ⅰ



(2)　図Ⅱのように，四面体ABCDの各辺の延長上に，次の条件に従ってそれぞれ点P, Q, R, Sをとり四面体PQRSを作るとき，四面体ABCDと四面体PQRSの体積比を求めなさい。

条　件
AP＝ 3 AB，BQ＝ 2 BC
CR＝ 3 CD，DS＝ 2 DA

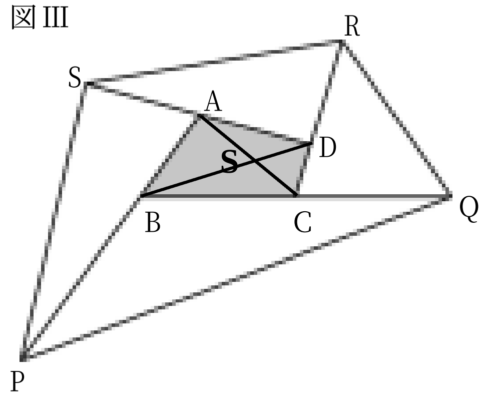
図Ⅱ



[解答例]

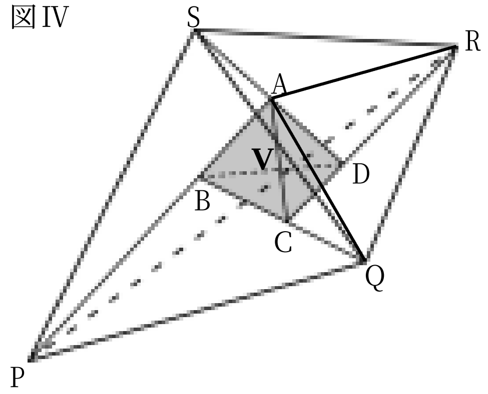
(1)　図Ⅲのように，四角形ABCDの面積を **S** とする。
CD：DR ＝ 1：2，DA：DS ＝ 1：2 より，
△ ACD：△ SDR ＝ 1：4
また，AB：BP ＝ 1：2，BC：BQ ＝ 1：2 より
△ ABC：△ BPQ ＝ 1：4
よって，△SDR＋△BPQ ＝ 4(△ACD＋△ABC)
＝ 4**S** …①
同様に，△ ABD：△ APS ＝ 1：3
△ BCD：△ CQR ＝ 1：3
よって，△APS ＋△CQR ＝ 3(△ABD＋△BCD)
＝ 3**S** …②
①，②より，四角形 PQRS ＝ 4**S** ＋ 3**S** ＋ **S** ＝ 8**S**
したがって，四角形 ABCD と四角形 PQRS の面積比は 1：8。

図Ⅲ



(2)　図Ⅳのように，四面体 ABCD の体積を**V**とする。
点 A は四面体 PQRS の内部の点であり，点 A と 4点 P，Q，R，S をそれぞれ結び，四面体 APQR，四面体 AQRS，四面体 APRS，四面体 APQS に分割する。
それぞれの四面体について，四面体 ABCD との底面積比と高さの比から体積を求める。
四面体 APQR は，△ ABC と△ APQ が同一平面上にあり，面積比は 1：6。また，CD：CR ＝ 1：3 なので，体積は 18**V**。
四面体 AQRS は，△ ACD と△ ARS が同一平面上にあり，面積比は 1：2。また，BC：CQ ＝ 1：1 なので，体積は 2**V**。

図Ⅳ



四面体 APRS は，△ ACD と△ ARS が同一平面上にあり，面積比は 1：2。また，AB：AP = 1：3 なので，体積は 6**V**。

四面体 APQS は，△ ABC と△ APQ が同一平面上にあり，面積比は 1：6。また，AD：AS = 1：1 なので，体積は 6**V**。

よって，四面体 PQRS の体積は，18**V**＋6**V**＋6**V**＋2**V** ＝32**V**。

したがって，四面体 ABCD と四面体 PQRS の体積比は 1：32。

[出題の意図]

２つの図形の面積比及び体積比を求める問題です。(1)では，四角形を三角形に分割することで，底辺の長さの比と高さの比から三角形の面積比を求めるのが一般的な方法です。(2)は, (1)の考え方を立体図形に応用して，底面積比と高さの比から四面体の体積比を求められるかを問う問題として出題しました。

[講評]

406 名中 164 名が選択し，残念ながら完答者はいませんでした。

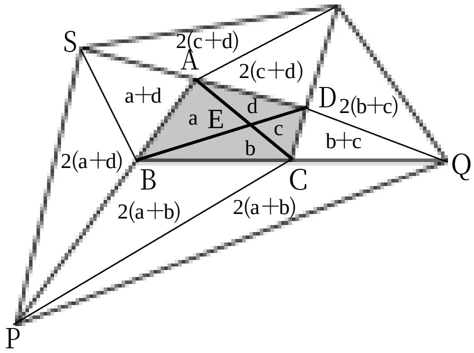
(1)では次のような答案も見られました。図Ⅴのように, 四角形 ABCD の対角線の交点を E とし, △EAB, △EBC, △ECD, △EDA の面積をそれぞれ a, b, c, d とする。

四角形 PQRS の面積は,

四角形 ABCD＋△BPQ＋△CQR＋△DRS ＋△ASP
＝(a＋b＋c＋d)＋4(a＋b)＋3(b＋c)＋4(c＋d)＋3(a＋d)
＝ 8(a＋b＋c＋d)

となる。

図Ⅴ



したがって，四角形 ABCD と四角形 PQRS の面積比は 1：8。

(2)では，解答例のように四面体 PQRS を分割する際，四面体 PQRS の内部の点 A(点 B, C, D でもよい)と，4 つの面の頂点を結んでできる 4 つの四面体に分割して考えるとよいでしょう。

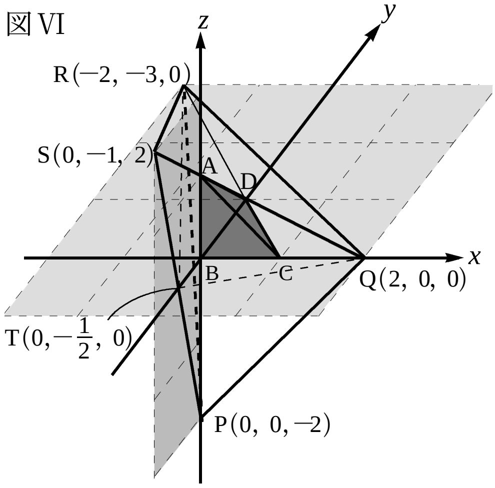
また，図Ⅵのように，座標を用いて考えることもできます。

四面体 ABCD の形を変えても一般性は失われないから，点 A(0, 0, 1)，点 B(0, 0, 0)，点 C(1, 0, 0)，点 D(0, 1, 0)とする。

与えられた条件から，点 P(0, 0,−2)，点 Q(2, 0, 0)，点 R(−2, −3, 0)，点 S(0, −1, 2)と表せる。

四面体PQRS を，xy 平面で切った切り口を△TQR とすると，T は線分 PS と xy 平面との交点だから T$(0, -\frac{1}{2}, 0)$となる。

図Ⅵ



よって，△TQR ＝ 2BD × 4BC $\times\frac{1}{2}$＝ 8 $\times\frac{1}{2}$(BD×BC)＝ 8 ×△BCD となる。また，xy 平面を底面と考えると，四面体 STQR と四面体 PTQR の高さは，それぞれ四面体 ABCD の高さの 2 倍となる。

したがって，四面体 ABCD と四面体 PQRS の体積比は 1：8×(2＋2) ＝ 1：32。

3　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　生徒８人が，１番から８番までのゼッケンを付け，次の手順で勝者を決める。

手　順

１．１番の生徒から番号順に時計回りに並んで輪をつくる。
２．１番の生徒を輪から除く。
３．除いた場所から時計回りに数えて２番目の生徒を除く。
４．３の操作を最後の１人になるまで繰り返し，残った人を勝者とする。

例えば，生徒が５人の場合は，右の図のように並んで輪をつくり，①１番の生徒を除く→②３番の生徒を除く→③５番の生徒を除く→④４番の生徒を除く。最後に２番の生徒が残り，勝者となる。

1
5　2
4　3

生徒が８人の場合，勝者となる生徒のゼッケンの番号を求めなさい。

(2)　あなたは，部員が237名のダンス部の部員であるとします。発表会のセンターポジションを(1)の手順で決まる勝者とすることになった。センターポジションを取りたいあなたは，１番から237番までのゼッケンの中で，何番のゼッケンを選びますか。考え方も含めて説明しなさい。

[解答例]

(1)　8番。

(2)　例えば，人数が16人のとき，

1周目は

~~1~~，2，~~3~~，4，~~5~~，6，~~7~~，8，~~9~~，10，~~11~~，12，~~13~~，14，~~15~~，16

2周目は

~~2~~，4，~~6~~，8，~~10~~，12，~~14~~，16

3周目は

~~4~~，8，~~12~~，16

4周目は

~~8~~，16

となり，16番が残る。

つまり，人数が 2^n 人のときは各周で半分ずつ人数が減っていき，2^n 番が残る。生徒を除いていって，残りの人数が 2^n 人になったとき，直前に除いた生徒の次の番号の生徒が，最後に残る生徒である。

生徒の人数と最後に残る生徒のゼッケンの番号との関係は

2^n ＋１人のとき　2番
2^n ＋２人のとき　4番
2^n ＋３人のとき　6番

と続くので

2^n ＋m人のとき 2m番（ただし，$1 \leqq m \leqq 2^n$）である。

$237 - 128 = 109$

したがって，$m = 109$ のとき，$109 \times 2 = 218$ より，求めるゼッケンの番号は218番。

[出題の意図]

継子立てからの出題です。(2)は(1)の結果から，人数が 2^n 人のときは 2^n 番が残ることが発見できるとよいでしょう。また，人数が2人から16人までの場合について調べて，何番が残るかを考えても上記の法則があることに気付けるのではないかと思います。「法則をつかむ」力や法則を利用して「正確な解答を求める」力を問う問題となっています。

[講評]

406名中392名が選択し，116名が完答しました。(2)は，237人全員について，番号を正確に１つずつ除いていっても求めることができます。

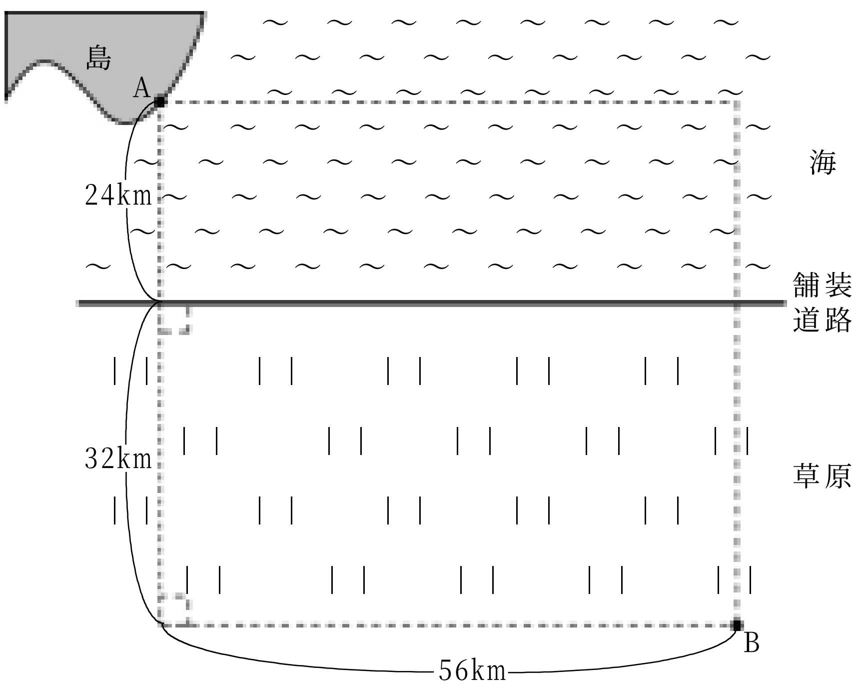
正答者の中には，(1)をヒントにして，生徒の人数を１人，２人，３人…と増やし，次のような表を作って最後に残る番号(勝者の番号)の規則性に着目した例もありました。

生徒の人数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
勝者の番号	-	2	2	4	2	4	6	8	2	4	6	8	10	12	14	16
生徒の人数	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
勝者の番号	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32

表より，生徒の人数と勝者の番号が一致するまで，勝者の番号は，2，4，6，…と2ずつ大きくなる。生徒の人数と勝者の番号が一致するのは，2，4，8，16，32，64，128，256だから $256 - 237 = 19$，$19 \times 2 = 38$ だから，$256 - 38 = 218$。したがって，218。

4　ある水陸両用車は，海上では波や水の流れなどに影響されることなく時速28kmで，舗装道路では時速100kmで，草原では時速60kmで，それぞれ一定の速さで進むことができる。この車で，図の島にあるA地点から海に入り，舗装道路を通り草原を横切ってB地点まで進むとする。このとき，A地点からB地点まで進むのにかかる最短時間を求めなさい。

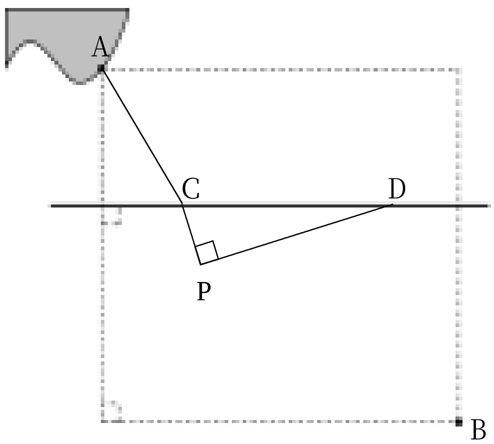
ただし，舗装道路は直線で，幅は考えないものとする。また，海上から舗装道路，舗装道路から草原に移る際は，時間を要しないものとする。



[解答例]

(1) 図Ⅰのように，海から舗装道路に移る地点をC, 舗装道路から草原に移る地点をDとする。

図Ⅰ



まず，点Cをどこにとれば所要時間が最短になるかを考える。

海上と舗装道路上での速度の比が 28：100＝7：25だから，CD：CP＝25：7かつ∠CPD＝90 となる点Pをとると，A→C→Dの所要時間と，A→C→Pの所要時間は等しくなる。(ただし，CP間は時速28kmで進むものと考える。)

A→C→Pの所要時間が最短になるのは，図Ⅱのように3点A，C，Pが一直線上に並ぶときである。

図Ⅱにおいて，Aから直線CDに下ろした垂線をAQとすると，△ACQ∽△DCPであることと，三平方の定理よりDP：CP＝24：7

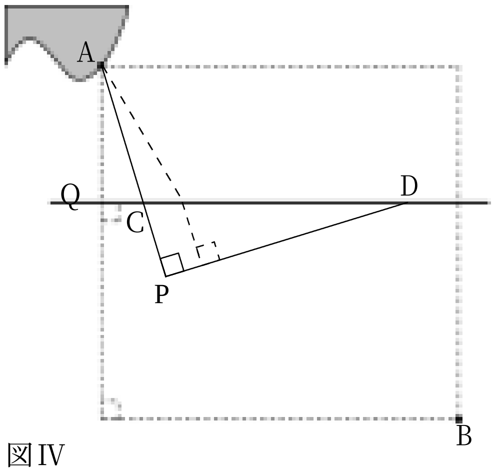
より，AQ:QC＝24：7 。よって，QC ＝ 7(km)。

このとき，A → C → D の所要時間が最短となる。また，AC ＝ 25(km)。

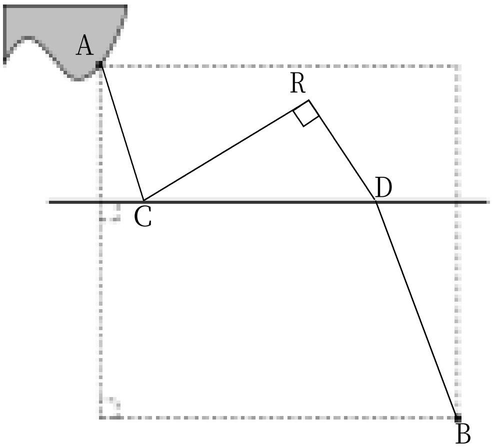
次に，点 D をどこにとれば所要時間が最短になるかを考える。

舗装道路上と草原上の速度の比が 100：60＝5：3だから，図Ⅲのように CD：DR＝5：3かつ∠CRD＝ 90゜となる点 R をとると，C→D→Bの所要時間と，R→D→Bの所要時間は等しくなる。(ただし，DR 間は時速 60 km で進むものと考える。)

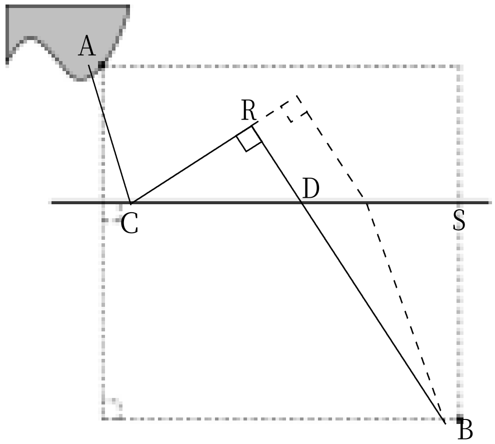
図Ⅱ



図Ⅲ



図Ⅳ



したがって，R → D → B の所要時間が最短になるのは，図Ⅳのように 3 点 B，D，R が一直線上に並ぶときである。

図Ⅳにおいて，B から直線 CD に下ろした垂線を BS とすると，△BDS ∽△CDR であることと，三平方の定理より CR：RD＝4：3。BS ＝ 32(km)だから，DS ＝ 24(km)。このとき，C → D → B の所要時間が最短となる。また，DB ＝ 40(km)。CD ＝ 56－(7＋24) ＝ 25(km)。以上により，求める最短時間は，

$$\frac{AC}{28}+\frac{CD}{100}+\frac{DB}{60}=\frac{25}{28}+\frac{25}{100}+\frac{40}{60}=\frac{38}{21}\ (\text{時間})$$

[出題の意図]

最短経路の問題です。この問題は，数式を用いて計算することもできますが，相似と三平方の定理という既習の知識だけで求めることができます。海上での速度と舗装道路上での速度の比から直角三角形を作り，その直角三角形を手がかりにして最短経路を求めることができます。また，同様に舗装道路上での速度と草原上での速度の比から直角三角形を作り，その直角三角形を手がかりにして最短経路を求め，A からBまでの最短経路を求めることができます。問題解決の場面では，一見難解にみえる問題でも，既習の知識をうまく活用して粘り強く問題を解決しようとする態度も大切です。

[講評]

406 名中 295 名が選択し，2 名が完答しました。解答例のように平面図形のアイデアを用いた正答は 1 名だけでした。もう 1 つの正答は，2 変数の関数を微分することによって次のようにして正解にたどり着いたものでした。

図Ⅱ，Ⅳにおいて，QC ＝ x，DS ＝ y とすると，

$$f(x,\ y)=\frac{\sqrt{24^2+x^2}}{28}+\frac{56-x-y}{100}+\frac{\sqrt{y^2+32^2}}{60}$$

y を固定して x で微分すると，

$$\frac{df}{dx}=\frac{2x}{28\cdot 2\sqrt{24^2+x^2}}-\frac{x}{100}$$

$\dfrac{df}{dx}=0$ とおくと，$x=7$(cm)。同様に x を固定して y で微分すると y ＝ 24 が求まります（詳細は略）。

答案の中には，①直線 AB が最短経路と考えたもの，② A，B からそれぞれ舗装道路に垂線を引き，垂線を通る経路が最短経路と考えた誤答が多くみられました。また，問題文の「舗装道路は直線で，幅は考えない」を，舗装道路は通れないと考えてしまったものや，答えを「約○○時間」としたもの，論証せずに「○○のように進めばよい」とだけ書いたものも多数みられました。

「○○であればよい」という表現には根拠が必要であり，その根拠となる事柄をきちんと説明する必要があります。問題解決場面では，なぜそうなるのかをつねに問い続ける姿勢が重要です。また，立式して行き詰まった場合には，引き返して考え直す粘り強さも身に付けたいものです。

5　5^{2012} は 1407 桁の数であり，最高位の数字は 2 である。 n を 1 から 2012 までの自然数とするとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。
(1)　5^n で表される数の中で，最高位の数字が 1 となる数は全部でいくつあるか，求めなさい。
(2)　5^n で表される数の中で，最高位の数字が 2 または 3 となる数は全部でいくつあるか，求めなさい。
(3)　5^n で表される数の中で，最高位に最も多く現れる数字は何か，求めなさい。また，その理由も書きなさい。

[解答例]

(1) 5^n が m 桁の数であるとする。最高位の数字が 1 であるとき 5^{n+1} も m 桁の数であり，最高位の数字が 1 以外のとき，5^{n+1} は m+1 桁の数となる。（例えば，$5^3=125$ で 3 桁，$5^4=625$ で 3 桁。）

5^{2012} は 1407 桁の数で，最高位の数字は 1 ではないので，5 をかけても桁数が変わらなかった回数が，最高位の数字が 1 となる 5^n の個数である。したがって最高位の数字が 1 となる数は，2012 － 1407 ＝ 605(個)。

(2) 5^n における最高位の数字の変化は，次の 5 通りのみである。

ア　1 → 5 → 2 → 1　　イ　1 → 6 → 3 → 1　　ウ　1 → 7 → 3 → 1
エ　1 → 8 → 4 → 2 → 1　　オ　1 → 9 → 4 → 2 → 1

いずれの場合も最高位の数字が 1 となる直前に 2 または 3 が最高位の数字となっている。また，5^{2012} の最高位の数字は 2 であるから，(1)の結果より最高位の数字が 2 または 3 となる数は，605 ＋ 1 ＝ 606（個）

(3) まず，(2)と同様に，最高位の数字が 5 ～ 9 のいずれかになる場合を考える。

いずれの場合も最高位の数字が 1 となる直後に現れることと，$5^1=5$，5^{2012} の最高位の数字は 2 であることから，最高位の数字が 5 から 9 のいずれかになる数字の個数は 605 ＋ 1 ＝ 606(個)となる。したがって，最高位の数字が 4 となるのは

$$2012-\underset{(\text{最高位が}1)}{605}-\underset{(\text{最高位が}2\text{or}3)}{606}-\underset{(\text{最高位が}5\sim 9)}{606}=195(\text{個})$$

以上をまとめると次のようになる。

①　最高位の数字が 1 となる数字の個数　… 605 個
②　最高位の数字が 2 または 3 となる数字の個数… 606 個
③　最高位の数字が 5 から 9 となる数字の個数　… 606 個
④　最高位の数字が 4 となる数字の個数　… 195 個

ここで，②に関して，$5^2=25$，$5^5=3125$，$5^8=390625$，5^{2012} の最高位の数字は 2 で，③に関して，$5^1=5$，$5^4=625$，$5^7=78125$ であることから，最高位の数字が 2，3，5，6，7，8，9 となる数字の個数は，それぞれ 604 個以下であることがわかる。このことと④から，最高位の数字が 1 となる数字の個数（605 個）が最大となる。

したがって，最高位に最も多く現れる数字は 1 である。

[出題の意図]

電卓を使って同じ数字を繰り返し掛け合わせると,思わぬ性質に気付くことができます。この問題は，数の規則性を論理的に深く考察してもらいたいという思いで出題しています。

5^n の最高位の数字について考察してみると，単純な周期こそ見つかりませんが，その数字の変化のパターンや桁数の上がり方に規則性があることがわかります。様々な状況について試行錯誤して考察し,それを一般の場合に拡張して整理するというアプローチの仕方は，数学ではとても有効であり，是非身に付けて欲しい考え方のひとつです。

[講評]

406 名中 166 名が選択し，2 名が完答しました。5^n を $n=1$ から順に書き並べてみると

$5^1 = \underline{5}$	$5^8 = \underline{3}90625$
$5^2 = \underline{2}5$	$5^9 = \underline{1}953125$
$5^3 = \underline{1}25$	$5^{10} = \underline{9}765625$
$5^4 = \underline{6}25$	$5^{11} = \underline{4}8828125$
$5^5 = \underline{3}125$	$5^{12} = \underline{2}44140625$
$5^6 = \underline{1}5625$	$5^{13} = \underline{1}220703125$
$5^7 = \underline{7}8125$	$5^{14} = \underline{6}103515625$

$5 \to 2 \to 1 \to 6 \to 3 \to 1 \to 7 \to 3 \to 1 \to 9 \to 4 \to 2 \to 1 \to 6 \cdots$ となります。これは，単純に「$2 \to 1 \to 6 \to 3 \to 1 \to 7 \to 3 \to 1 \to 9 \to 4$」が繰り返されるわけではありません。また，「n の一の位が 3 の倍数」のときを推測したものや，常用対数や確率を利用した答案も見られましたが正答には至りませんでした。ここでは，2 人の正答例(略解)を示します。

【A 君の解答】

(1) 最高位の桁が 1 上がるのは，最高位の数字が 2 以上のときである。よって，最高位の数字が 1 の場合は桁が上がらない。また，最高位の数字が 2 から 9 のどの数字も，一気に桁は 2 つ上がらない。5^{2012} が 1407 桁の数字で，$n = 2012$ のときの最高位の数字が 2だから(最高位の数字が 1だったら＋ 1 しなければいけない)，最高位の数字が 1 である個数は，$2012 - 1407 = 605$(個)。

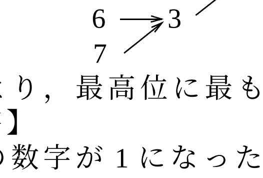
(2) 最高位の数字が 2 または 3 となるのは，必ず最高位の数字が 1 になる 1 つ前である(最高位とその 1 つ下の桁でできる数が 20 から 39 の，どの数に 5 をかけても，最高位の数字は 1 になる）。よって，最高位の数字が 1 である個数は 605 個で，5^{2012} の最高位の数字が 2 だから，最高位の数字が 2 または 3 となるのは $605 + 1 = 606$(個)。

(3) ①最高位の数字が 2 または 3 である個数を合わせたものから 1 を引いた数が，最高位の数字が 1 である数字の個数である。

②最高位の数字が 4 または 5 のとき，その数に 5 をかけた数の最高位の数字は必ず 2 になる。

③最高位の数字が 6 または 7 のとき，その数に 5 をかけた数の最高位の数字は必ず 3 になる。

④最高位の数字が 8 または 9 のとき，その数に 5 をかけた数の最高位の数字は必ず 4 になる。



①～④より，最高位に最も多く現れる数字は 1 である。

【B 君の解答】

(1) 最高位の数字が 1 になった次の数は桁が変わらず，最高位の数字が 2 から 9 のとき桁が変わるから，$2012 - 1407 = 605$(個)。

(2) 最高位の数字が 2 または 3 になった次の数は最高位の数字が 1 である。また，5^{2012} の最高位の数字は 2 だから，$605 + 1 = 606$(個)。

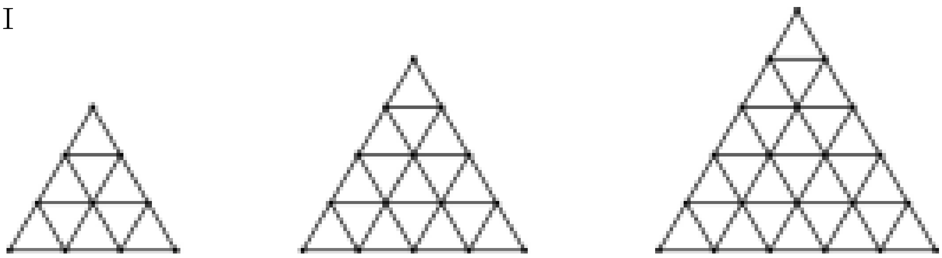
(3) 最高位の数字は次のように現れる。

n	n＋1	n＋2	n＋3
1 →	5〜9		
2 →	1		
3 →	1		
4 →	2 →	1	
5 →	2 →	1	
6 →	3 →	1	
7 →	3 →	1	
8 →	4 →	2 →	1
9 →	4 →	2 →	1

3 〜 4 乗ごとに 1 が必ず出るから，1 が最も多く現れる。（詳細は略）

6　1辺の長さが 1の正三角形を敷き詰めて，1辺の長さが nの正三角形をつくる。図Ⅰは，n＝3, 4, 5の場合を示している。

図Ⅰ



n＝3　　n＝4　　n＝5

正三角形のすべての頂点(図Ⅰの・)に人が立ち, 次のルールに従って正三角形の辺に沿って動くものとする。

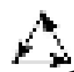
ルール
① 全員が同時に動き出し，毎秒 1 の速さで動き続ける。
② 最初に動き出す方向は，正三角形の辺に沿っていればどちらでもよい。
③ 次の点に到着したら向きを変えて進まなければならない。また，1秒前にいた点に戻ることはできない。

このとき，どの 2人も出会うことなく動き続けることができるかを考える。

例えば，n＝1の場合では，図Ⅱの矢印の向きに動けば，どの 2人も出会うことなく動き続けることができる。

n ＝3, 4, 5の各場合について，どの 2人も出会うことなく動き続けることができるか調べなさい。できる場合は，図Ⅱのように動き方を矢印で示し，できない場合は，その理由を説明しなさい。

図Ⅱ

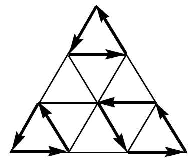


n＝1

[解答例]

n ＝ 3 の場合，図Ⅰのように動き続けることができる。

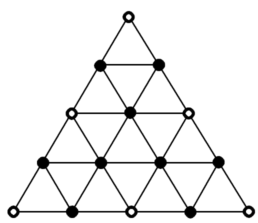
図Ⅰ



n ＝ 4 の場合，動き続けることはできない。

図Ⅱのように，頂点に○と●の印を付ける。常に動き続けることができるとすると，常に○に 6 人，●に 9 人がいることになる。…①

図Ⅱ



1 秒後の動きを考えると

A：6 人が○から●へ動く。

B：6 人が●から○へ動く。

C：3 人が●から●へ動く。

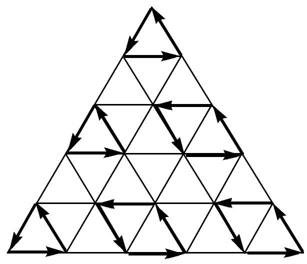
2 秒後の動きを考えると，○→●→○の動きは，ルール③より直進はできないので不可能である。したがって，6 人とも○→●→●となる。（図Ⅲ）

また，●→○と動いた 6 人は，○から 1 秒で再び○に動くことはできないので●→○ →●となる。（図Ⅲ）

図Ⅲ

1秒後 2秒後	1秒後 2秒後	1秒後 2秒後
○ → ● → ●	● → ○ → ●	● → ● → ○
○ → ● → ●	● → ○ → ●	● → ● → ○
○ → ● → ●	● → ○ → ●	● → ● → ○
○ → ● → ●	● → ○ → ●	
○ → ● → ●	● → ○ → ●	
○ → ● → ●	● → ○ → ●	

図Ⅳ



ここで，2 秒後に ● の人が 12 人となり，このことは①に矛盾する。

よって，n ＝ 4 の場合は，動き続けることができない。

n ＝ 5 の場合，図Ⅳのように動き続けることができる。

[出題の意図]

n ＝ 3，5 の場合は，動き続けることができますが，n＝4 の場合は動き続けることはできません。動き続けることができないことを証明することで，論理的思考力や表現力を問う問題として出題しました。

[講評]

406 名中 254 名が選択し，残念ながら完答者はいませんでした。この問題も，まずは題意を理解して手を動かしてみることで，規則性を調べてみることから初めて見るとよいでしょう。答案の中には，「正三角形」と「ひし形」の動きを組み合わせて説明してくれたものもありましたが，これは特別な場合を示したに過ぎず，証明としては不十分です。解答例のように，○ にいる人と ● にいる人の集合に分けて考えてみると，ある特定の図形を考えることなく，うまく矛盾を導くことができます。

なお，一般に，n ＝ 2，4，6 は動き続けることができません。また，n ＝ 2，4，6 以外のすべての自然数について動き続けることができることは，数学的帰納法を用いて証明することができます。