平成２３年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。問題用紙には，参考資料がはさんであるので，切り取るなどして利用してください。また，解答用紙は６枚あります。
2　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して解答してください。
3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。
5　コンテスト終了後、解答用紙は４枚提出してください。
6　トイレ等に行くときは，監督の指示に従ってください。

1　次のような時計を「n時計」と呼ぶことにする。ただし，nは2以上の自然数とする。

「n時計」

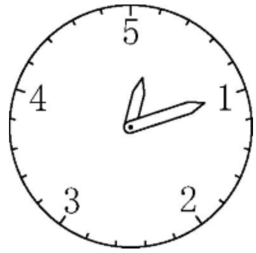
> 円形の文字盤には，円周上に1からnまでの自然数が右回りで等間隔に並べられており，文字盤の一番上の位置に「n」の数字が固定されている。また，円周上の数字と数字の間には，それぞれ5等分となるよう4つの目盛りが刻まれている。
> 長針は，右回りで1分ごとに1目盛り動く。
> 短針は，右回りで1分ごとに等間隔に動き，長針が文字盤を1周すると，短針は数字と数字の間を1つ分動く。
> ただし，2つの針はそれぞれ1分ごとに「瞬時に」動くものとし，連続的には動かないものとする。

「n時計」のスタート時における長針と短針の位置は，ともに「n」の数字を指して重なっている。「n時計」はすべて同時にスタートするものとして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　右の図は，「5時計」を模式的に示したものである。
　「12時計」と「5時計」の2つの時計の短針の動きに着目する。それぞれの短針がスタートしてから,「5時計」の短針が「12時計」の短針を初めて追い抜くのは何分後か，求めなさい。

(2)　「12時計」と「n時計」($n \neq 12$)について，スタートしてから12時間後までの間に，2つの時計の短針の位置が一致するのと同時に，長針の位置も一致することはあるか。
　ある場合には，そうなるすべてのnの値を求め，それぞれについて，スタートから条件を満たすまでの時間を求めなさい。
　ない場合には，ない理由を説明しなさい。

図　「5時計」



※長針は25分で1周する。
※短針は，長針が5周すると1周する。

2　右の図は，OA＝AB＝1，∠OAB＝90°の直角二等辺三角形の形をしたビリヤード台を模式的に示したものである。頂点Oから球を打ち出し，1回目の反射点Pを「第1反射点」と呼ぶことにする。また，次の理想化を行う。

理想化

> Ⅰ　球は大きさのない点とし，直線的に動く。
> Ⅱ　球は頂点を除く辺上で,「入射角＝反射角」を満たすように反射する。
> Ⅲ　球は，動き始めてから頂点O，A，Bのいずれかに到達すると停止する。

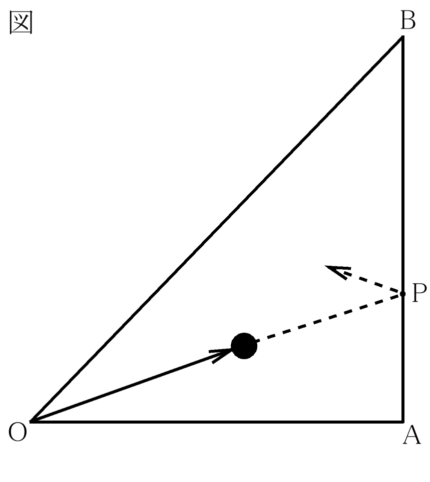
このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　AP＝$\frac{1}{2}$のとき，球はどの頂点で停止するか答えなさい。また，このとき，停止するまでに反射する回数を求めなさい。

(2)　球が停止するまでに，ちょうど3回反射するような第1反射点Pの個数を求めなさい。また，球が停止するまでに，ちょうど4回反射するような第1反射点Pの個数を求めなさい。

(3)　球が停止するまでに，ちょうど51回反射するような第1反射点Pの個数を，頂点O，A，Bで停止する場合に分けて，それぞれ求めなさい。また，そうなることを説明しなさい。

図



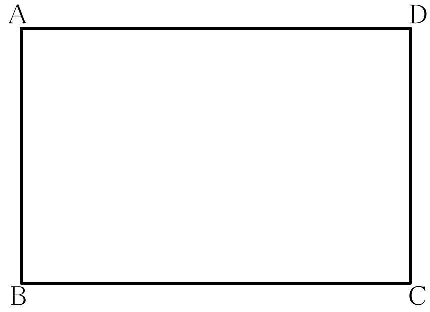
3　右の図の長方形ABCDにおいて，定規のみを用いて面積を等分することを考える。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，定規は直線を引くことのみに用い，長さを測ることはできない。また，紙を折ったりすることもできないものとする。

(1) 定規のみを用いて，長方形ABCDを辺ABに平行な直線で2等分する方法を説明しなさい。

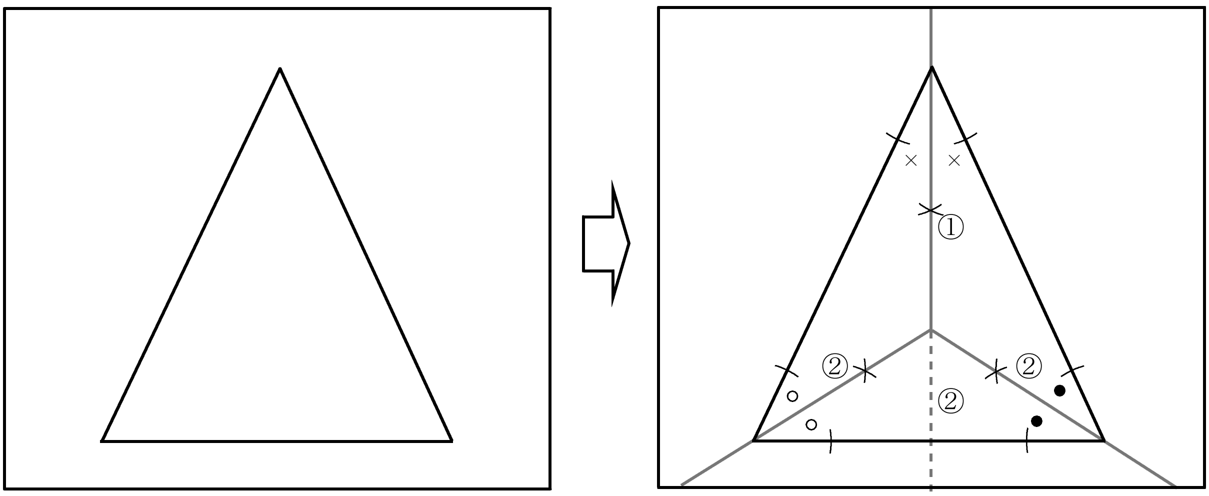
(2) 定規のみを用いて，長方形ABCDを5等分する方法を説明しなさい。ただし，面積が等しければ，図形の形は異なってもかまわない。

図



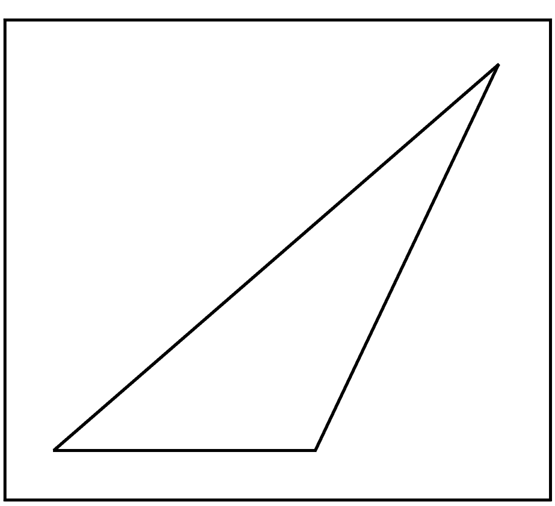
4　紙を何回か折った後，はさみを用いて1回だけ直線的に切ることで，ある図形を切り出したい。次の例は，二等辺三角形を切り出すとき，折ってできる折れ線を作図したものである。後の(1)，(2)のそれぞれの図形を切り出すとき，折ってできる折れ線を例にならって作図し，その手順を説明しなさい。

(例)二等辺三角形　　　　　　　　　　　　　折ってできる折れ線を作図したもの

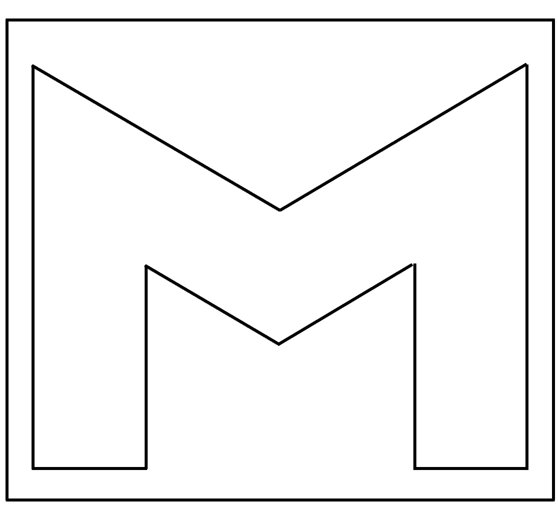


Ⅰ　折る順番を丸数字で示す。 Ⅱ　折れ線のうち，山折りは実線，谷折りは点線で示す。 Ⅲ　作図した線が，もとの図形に対して何を表す線であるか分かるように，文字や記号を用いて示す。

(1)



(2)



5　次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　1から10までの整数から，異なる6個の数を選ぶ。
　異なる6個の数をどのように選んでも，その数の中に，和が11となる2つの数が必ず含まれることを説明しなさい。

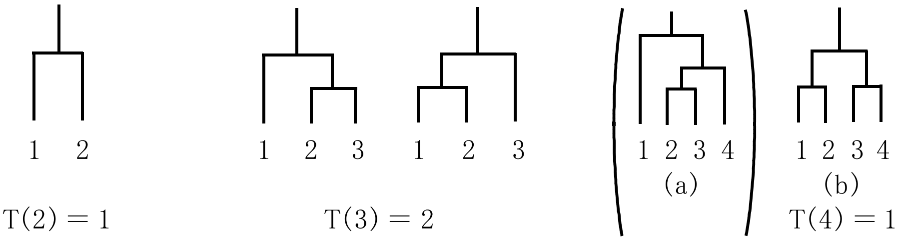
(2)　3で割って2余る2から101までの整数から，異なる何個かの数を選ぶ。
　異なる何個かの数をどのように選んでも，その数の中に，和が106となる2つの数が必ず含まれるようにするためには，最低何個の数を選べばよいか，理由を含めて答えなさい。

(3)　1から101までの整数から，異なる何個かの数を選ぶ。
　異なる何個かの数をどのように選んでも，その数の中に，差が9となる2つの数が必ず含まれるようにするためには，最低何個の数を選べばよいか，理由を含めて答えなさい。

6　次に示す「適正な」トーナメント表を用いて，n人が参加する腕相撲大会を行い，優勝者を決定したい。n人が参加する「適正な」トーナメント表の作り方の総数をT(n)とするとき，後の(1)～(3)の問いに答えなさい。
　ただし，nは2以上の自然数とし，トーナメント表には，左から順に1，2，3，…，nと番号が付けられているものとする。

「適正な」トーナメント表
　すべての試合において，p人の中から勝ち上がった人とq人の中から勝ち上がった人が対戦する場合，pとqの差が0または1となっている。ただし，pとqは人数を表す。

（例）　n＝2のとき　　n＝3のとき　　n＝4のとき



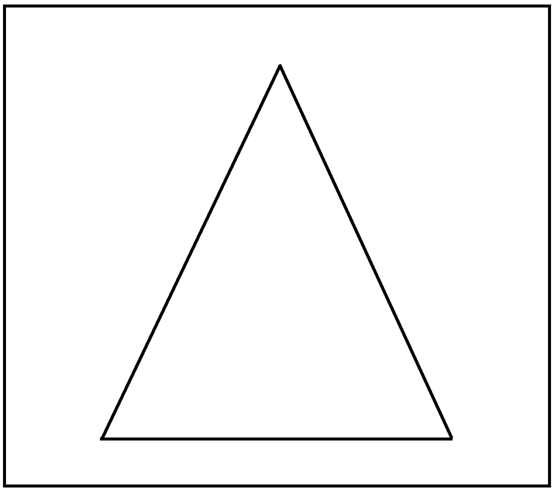
　n＝2のとき，「適正な」トーナメント表は1通りであり，T(2)＝1となる。
　n＝3のとき，2つのトーナメント表はいずれも「適正な」トーナメント表である。1回戦が免除となる人の位置が異なるため，この2つのトーナメント表は異なるものとみなし，T(3)＝2となる。
　n＝4のとき，(a)は決勝の両者がそれぞれ1人及び3人の代表者であり，その差が2となるので，「適正な」トーナメント表とはならない。n＝4の場合は，(b)のみが「適正な」トーナメント表となるので，T(4)＝1となる。

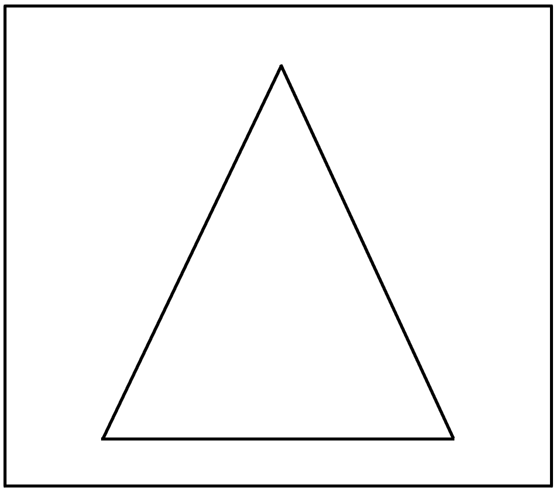
(1)　n＝5，6について，それぞれ「適正な」トーナメント表をすべて作りなさい。また，T(5)，T(6)を求めなさい。
(2)　T(n)＝1となるnはどんな性質をもった数であるか，説明しなさい。
(3)　T(68)を求めなさい。また，途中の説明も書きなさい。

平成２３年度群馬県高校生数学コンテスト参考資料

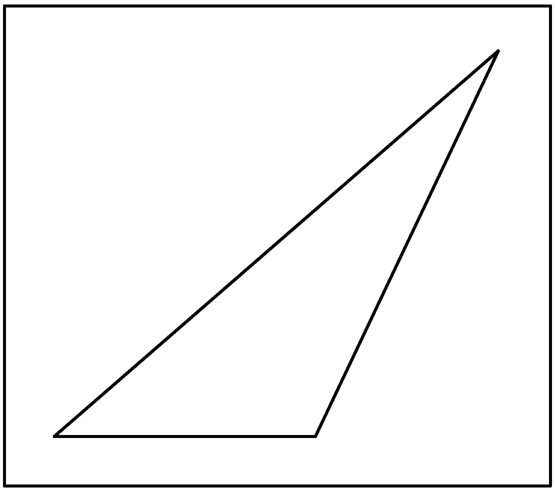
4　※切り取るなどして利用してください。

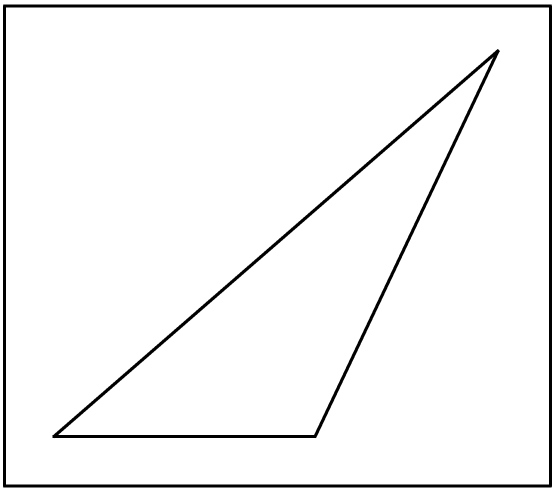
(例)二等辺三角形





(1)





(2)