平成２３年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

I．概　要

今年度の数学コンテストは７月２９日（金）に実施され、参加者は２９５名（１６校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１４回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞２３名、アイデア賞８名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞１７名、アイデア賞１０名）計４０名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓やはさみの使用も認めている。

今回も６問中３問が図形の問題であり、直角二等辺三角形の形をしたビリヤード台を題材にした球の反射回数を問う問題や長方形を等分する問題、紙を折ってはさみで1回だけ切って図形を切り出す問題などがあった。また、「ｎ時計」を定義して長針と短針の位置関係に関する問題や鳩ノ巣原理、トーナメント表の種類に関する問題も出題された。

参加生徒は、参考資料として提示した用紙を実際に切り取って試行錯誤を行ったり、具体的な例を書き並べて法則性を見いだしたりしていた。ほとんどの生徒が３時間集中して取り組み、最後まで熱心に取り組んでいた姿が印象に残っている。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも、発想のユニークなものも数多く見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、既存の学習の枠組みを超えて発想する良い機会を与えているものであると考えている。このことは、数学のみならず、今後いろいろな教科を学習して行く上でよい経験になっていると思われる。今後も、この群馬県高校生数学コンテストを継続・発展させ、生徒が数学を楽しむ機会としてさらに充実するよう切に望んでいる。

○　参加生徒の内訳

学　科	普通科		理数科		工業科学科	英語科	計	
学年(中等)	男	女	男	女	男	男	男	女
１年(４年)	７５	１４	１１	1			８６	１５
２年(５年)	９２	５０	２４	6	1		１１７	５６
３年(６年)	１７	2	1			1	１９	2
計	１８４	６６	３６	7	1	1	２２２	７３

合 計　２９５名

※次のページ以降に平成２３年度数学コンテストの問題と解答・解説があります。
下記は問題表紙の注意事項です（参考まで）。

注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページまであります。問題用紙には，参考資料がはさんであるので，切り取るなどして利用してください。また，解答用紙は６枚あります。

2　制限時間は３時間です(13：00 ～ 16：00)。６問中４問を選択して解答してください。

3　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。

4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。また，必要があれば，電卓，はさみを用いてもかまいません。

5　コンテスト終了後、解答用紙は４枚提出してください。

Ⅱ．問題及び解答例

1　次のような時計を「ｎ時計」と呼ぶことにする。ただし，ｎは２以上の自然数とする。

「ｎ時計」

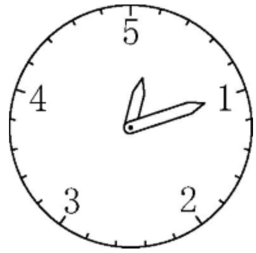
　円形の文字盤には，円周上に１からｎまでの自然数が右回りで等間隔に並べられており，文字盤の一番上の位置に「ｎ」の数字が固定されている。また，円周上の数字と数字の間には，それぞれ５等分となるよう４つの目盛りが刻まれている。
　長針は，右回りで１分ごとに１目盛り動く。
　短針は，右回りで１分ごとに等間隔に動き，長針が文字盤を１周すると，短針は数字と数字の間を１つ分動く。
　ただし，２つの針はそれぞれ１分ごとに「瞬時に」動くものとし，連続的には動かないものとする。

　「ｎ時計」のスタート時における長針と短針の位置は，ともに「ｎ」の数字を指して重なっている。「ｎ時計」はすべて同時にスタートするものとして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　右の図は，「５時計」を模式的に示したものである。
　「12時計」と「５時計」の２つの時計の短針の動きに着目する。それぞれの短針がスタートしてから,「５時計」の短針が「12時計」の短針を初めて追い抜くのは何分後か，求めなさい。

(2)　「12時計」と「ｎ時計」(ｎ≠12)について，スタートしてから12時間後までの間に，２つの時計の短針の位置が一致するのと同時に，長針の位置も一致することはあるか。
　ある場合には，そうなるすべてのｎの値を求め，それぞれについて，スタートから条件を満たすまでの時間を求めなさい。ない場合には，ない理由を説明しなさい。

図　「５時計」



※長針は25分で１周する。
※短針は，長針が５周すると１周する。

［解答例］

(1)　「12時計」の短針は，180分間で90°動くので，1分間で0.5°動く。
「5時計」の短針は，125分間で360°動くので，1分間で2.88°動く。
「5時計」の短針が「12時計」の短針を初めて追い抜くまでの時間をx分とすると，

$$2.88x > 0.5x + 360$$

$$x > 151.26\cdots$$

よって，これを満たす最小のxは152分後。

(2)　「n時計」は，nの値が小さいほど長針も短針も速く回転する。また，短針が追いつくか追い抜かなければ，少なくとも一致することはない。初めて短針が一致するのは，追い抜く側の短針が2周目以降になってからとなる。このことから，$n \geqq 13$の場合と$n < 12$の場合に分けて，まず短針が一致する時間について確認し，その各場合について長針も一致するかどうか確認していく。

ⅰ）　$n \geqq 13$のとき
　12時間後までの間に「12時計」の短針が「n時計」の短針を追い抜くことはない。よって，長針と短針が同時に一致することはない。

ⅱ）　$n < 12$のとき
　短針が1周，2周，3周，…する時間は次のようになる。例えば，$n = 11$のとき，長針は55分で1周し，短針は$11 \times 55 = 605$分で1周する。

短針	1周	2周	3周	4周	5周	6周	7周	8周	9周	10周
n ＝ 12	720									
n ＝ 11	605	1210								
n ＝ 10	500	1000								
n ＝ 9	405	810								
n ＝ 8	320	640	960							
n ＝ 7	245	490	735							

n = 6	180	360	540	720						
n = 5	125	250	375	500	625	750				
n = 4	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800
n = 3	45	90	135	180	225	270	315	360	405	・・・
n = 2	20	40	60	80	100	120	140	160	180	・・・
n = 1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	・・・

① n = 9，10，11 のとき

n = 9 のとき，短針が 2 周するのに要する時間は 810 分。12 時間は 720 分より，「9 時計」の短針が「12 時計」の短針に追いつくことはない。よって，長針と短針がそれぞれ同時に一致することはない。n = 10，11 のときも同様。

② n = 7，8 のとき

n = 7 のとき，短針が 2 周及び 3 周するのに要する時間はそれぞれ 490 分，735 分。

n = 8 のとき，短針が 2 周及び 3 周するのに要する時間はそれぞれ 640 分，960 分。

よって，n = 7，8 のときは，「7 時計」及び「8 時計」の短針が 2 周目で「12 時計」の短針と一致する。

ア）n = 7 のとき，2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると，

$$360/245 \cdot x = 0.5x + 360$$

これを満たす x は整数とならない。よって，長針と短針がそれぞれ同時に一致することはない。

イ）n = 8 のとき，2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると，

$1.125x = 0.5x + 360$　　よって $x = 576$

このとき，「8 時計」の長針は一番上から 16 分× 9° =144°，「12 時計」の長針は 36 分× 6° = 216° となり長針は一致しない。よって，長針と短針がそれぞれ同時に一致することはない。

③ n = 6 のとき

短針が 4 周するのに要する時間は 720 分。よって，「6 時計」の短針が 2 ～ 4 周目に「12 時計」の短針と一致する。

2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると，

$2x = 0.5x + 360$　　よって $x = 240$

このとき，「6 時計」の長針は 8 周目が終わったところであり，「12 時計」の長針も一致している。よって，$x = 240$ のとき長針と短針はそれぞれ同時に一致する。

この後も，240 分ごとに一致する。よって，$x = 240$，480，720 のとき長針と短針はそれぞれ同時に一致する。

④ n = 5 のとき

短針が 5 周，6 周するのに要する時間はそれぞれ 625 分，750 分。よって，「5 時計」の短針が 2 ～ 5 周目で「12 時計」の短針と一致する。

2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると，

$2.88x = 0.5x + 360$　　よって $x = 360/2.38$

これを満たす x は整数とならない。同様に 3 ～ 5 周目で重なる場合も x は整数とならない。よって，長針と短針がそれぞれ同時に一致することはない。

⑤ n = 4 のとき

短針が 9 周するのに要する時間は 720 分。よって，「4 時計」の短針が 2 ～ 9 周目に「12 時計」の短針と一致する。

2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると，

$4.5x = 0.5x + 360$　　よって $x = 90$

このとき，「4 時計」の長針は 4 周と 180° 回転したところであり，「12 時計」の長針は 1 周と 180° 回転したところであり，長針も一致する。

この後も，90 分ごとに一致する。

よって，$x = 90$，180，270，360，450，540，630，720 のとき長針と短針はそれぞれ同時に一致する。

⑥　n ＝ 3 のとき

短針が 16 周するのに要する時間は 720 分。よって,「3 時計」の短針が 2 ～ 16 周目に「12 時計」の短針と一致する。

2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると,

$8x = 0.5x + 360$　　　よって $x = 48$

このとき,「3 時計」の長針は 3 周と 72° 回転したところであり,「12 時計」の長針は 288°(－72°)回転したところであり，長針は一致しない。

この後，48 分ごとに「3 時計」の長針は 72° ずつ,「12 時計」の長針は 288°(－ 72°)ずつ回転するので，長針も短針も一致するのは 72°×5＝360°すなわち 48 分×5 ＝ 240 分ごととなる。よって，x = 240，480，720 のとき長針と短針はそれぞれ同時に一致する。

⑦　n ＝ 2 のとき

短針が 36 周するのに要する時間は 720 分。「2 時計」の短針が 2 ～ 36 周目に「12 時計」の短針と一致する。

2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると,

$18x = 0.5x + 360$　　　よって $x = 144/7$

x が整数となるのは，8，15，22，29，36 周目となる。

8 周目を考えると，x = 144 であり,「2 時計」の長針は一番上から 72° 回転したところであり,「12 時計」の長針は一番上から 144° 回転したところであり，長針は一致しない。

この後，144 分ごとに「2 時計」の長針は 72° ずつ,「12 時計」の長針は 144° ずつ回転するので，長針も短針も一致するのは 144 分×5 ＝ 720 分後となる。よって，x = 720 のとき長針と短針はそれぞれ同時に一致する。

⑧　n ＝ 1 のとき

短針が 144 周するのに要する時間は 720 分。「1 時計」の短針が 2 ～ 144 周目に「12 時計」の短針と一致する。

2 周目で短針が初めて一致するまでの時間を x 分とすると,

$72x = 0.5x + 360$　　　よって $x = 720/143$

x が整数となるのは，144 周目のみとなる。

このとき長針も一致するので，x = 720 のとき長針と短針はそれぞれ同時に一致する。

以上のことから，n ＝ 1，2，3，4，6 のときで,

n ＝ 1，2 のとき 720 分

n ＝ 3，6 のとき 240，480，720 分

n ＝ 4　　のとき 90，180，270，360，450，540，630，720 分

［出題の意図］

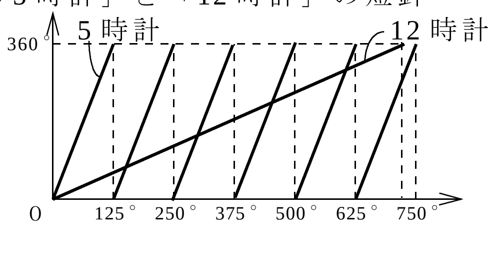
日頃見慣れている時計は，長針が 60 分で 1 周し，短針が 12 時間で 1 周します。しかし，その当たり前のことが変わったらどうでしょうか。

この問題では，時計の針の動きを観察し，数式を利用することにより，長針と短針の位置関係を論理的に探る力を問う問題として出題しました。

［講評］

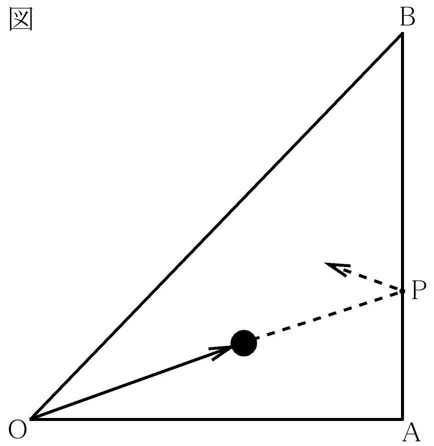
295 名中 220 名が選択し，残念ながら完答者はいませんでした。時計の問題でよく使われる考え方として，短針と長針がそれぞれ 1 分間に何度回転するかを考える方法があります。この問題でもこの方法が有効です。また，横軸を時間，縦軸を角度としてグラフをかいてみるとイメージが掴みやすいでしょう。

「5 時計」と「12 時計」の短針



2　右の図は，OA＝AB＝１，∠OAB＝90°の直角二等辺三角形の形をしたビリヤード台を模式的に示したものである。頂点Oから球を打ち出し，１回目の反射点Ｐを「第１反射点」と呼ぶことにする。また，次の理想化を行う。

図



理想化

Ⅰ　球は大きさのない点とし，直線的に動く。

Ⅱ　球は頂点を除く辺上で，「入射角＝反射角」を満たすように反射する。

Ⅲ　球は，動き始めてから頂点O，A，Bのいずれかに到達すると停止する。

このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　AP＝$\frac{1}{2}$のとき，球はどの頂点で停止するか答えなさい。また，このとき，停止するまでに反射する回数を求めなさい。

(2)　球が停止するまでに，ちょうど３回反射するような第１反射点Ｐの個数を求めなさい。また，球が停止するまでに，ちょうど４回反射するような第１反射点Ｐの個数を求めなさい。

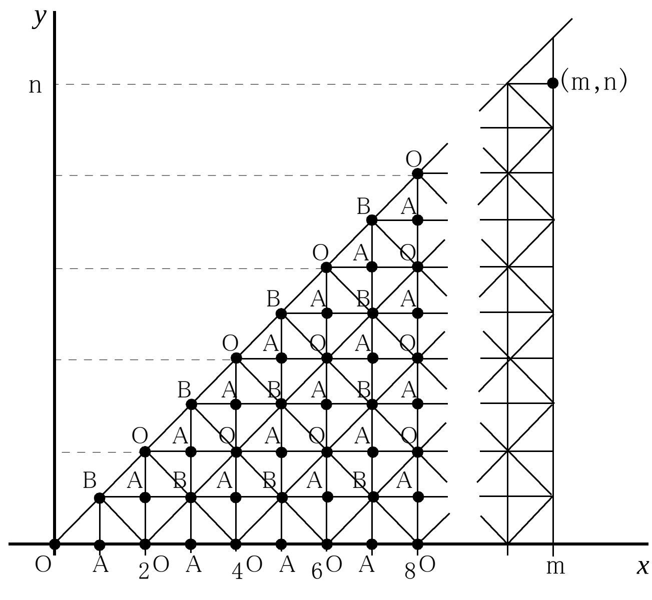
(3)　球が停止するまでに，ちょうど51回反射するような第１反射点Ｐの個数を，頂点O，A，Bで停止する場合に分けて，それぞれ求めなさい。また，そうなることを説明しなさい。

[解答例]

図１のように，Oを原点，A(1，0)，B(1，1)とし，三角形OABを辺に関して折り返した図形をつくり，球が点（m，n）で停止する場合を考える。

ただし，m，nは互いに素（最大公約数が1）な整数である。(m，nが互いに素でないとすると，互いに素な正の整数m'，n'に対して，m＝km'，n＝kn'となる1より大きな最大公約数kが存在することになり，球は点(m'，n')で停止してしまい，点（m，n）に到達することはできない。)

図１



また，図１から次のことがわかる。

①　mが奇数でnが偶数もしくはmが偶数でnが奇数のとき，球はAで停止する。例えばA(3，2)，A(2，1)。

②　m，nがともに奇数のとき，頂点Bで停止する。例えばB(3，1)。

③　m，nがともに偶数のとき，頂点Oで停止する。(ただし，この場合は起こらない。)

さらに，原点Oから点（m，n）に到達する間に反射した回数をR(m，n)とすると図２のようになり，互いに素な整数m，nに対する反射回数R(m，n)は次のように表される。

$$R(m,\ n)=\begin{cases} 2m+n-4 & (m,\ n\text{がともに奇数のとき}) \\ 2m+n-3 & (m\text{が奇数},\ n\text{が偶数のとき}) \\ 2m+n-3 & (m\text{が偶数},\ n\text{が奇数のとき}) \end{cases} \quad \cdots (※)$$

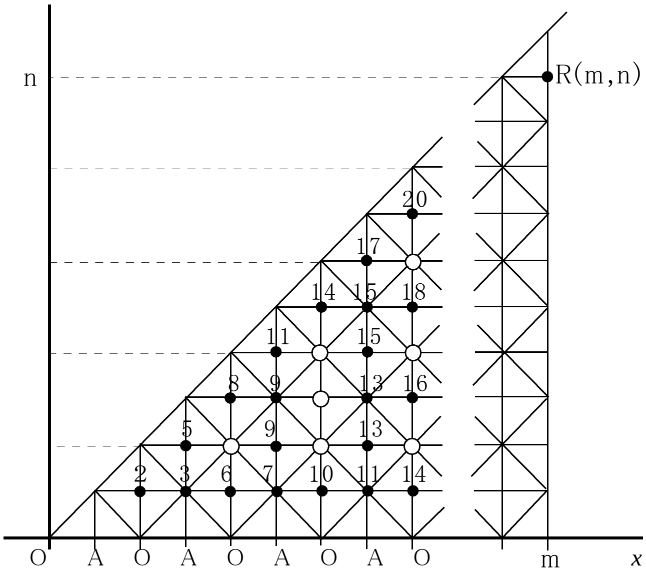
(＊ R(m，n)については，講評に解説あり。)

（1） 球の軌道は，図２において直線

$$y = \frac{1}{2}x \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

で表せる。よって，球は点 A で停止し，反射回数は２回。

図２



（2） 3 回反射する第 1 反射点 P は 1 個。
4 回反射する第 1 反射点 P は 0 個。

（3） R（m，n）＝ 51 を考える。

① m，n がともに奇数のとき（頂点 B で停止する。）

$$2m + n - 4 = 51$$

$$n = 55 - 2m \cdots（ア）$$

$1 \leqq n \leqq m - 1$ だから

$$1 \leqq 55 - 2m \leqq m - 1$$

$$\frac{56}{3} \leqq m \leqq 27$$

m は奇数だから

$$m = 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27$$

（ア）より n ＝ 17，13，9，5，1

m，n が互いに素である組は，（m，n）＝（19, 17），（21，13），（23，9），（27，1）の 4 個。

② m が奇数，n が偶数のとき（頂点 A で停止する。）

$$2m + n - 3 = 51 \qquad \therefore \quad n = 54 - 2m \cdots（イ）$$

$1 \leqq n \leqq m - 1$ だから

$$1 \leqq 54 - 2m \leqq m - 1 \qquad \frac{55}{3} \leqq m \leqq \frac{53}{2}$$

m は奇数だから m ＝ 19，21，23，25

（イ）より n ＝ 16，12，8，4

m，n が互いに素である組は，（m，n）＝（19，16），（23，8），（25，4）の 3 個。

③ m が偶数，n が奇数のとき（頂点 A で停止する。）

$$2m + n - 3 = 51$$

左辺は偶数となり，これを満たす m，n の組は存在しない。

以上より，各頂点 O，A，B で停止する第 1 反射点 P の個数は，それぞれ 0，3，4 個。

［出題の意図］

壁において「入射角＝反射角」を満たすように反射する球の軌道は，反射のたびに球の軌道が変化するため，捉えるのが難しいものです。仮に球の軌道が直線のままで変化しないものとして，この問題を考えられないでしょうか。図形を折り返すことにより，対称性を活用することで問題を比較的簡単に捉えることができます。柔軟な発想力を問う問題として出題しました。

［講評］

295 名中 113 名が選択し，残念ながら完答者はいませんでした。8 ページの反射回数の(※)の式は, 次のように考えることができます。ここでは，m，n がともに奇数のときを示します。m, n+2も互いに素でなく，m+2，n も互いに素でないものとする。*y* 軸に平行な線分上で考えると，R（m，n+2）＝ R（m，n）＋（*x* 軸に平行な線分 2 本 ）＋（＼の線分 1 本）－（／の線分 1 本） …① より R（m，n+2）＝ R（m，n）＋ 2。*x* 軸に平行な線分上で考えると，R（m+2，n）＝ R（m，n）＋（*y* 軸に平行な線分 2 本）＋（＼の線分 1 本）＋（／の線分 1 本） …②より R（m+2，n）＝ R（m，n）＋ 4。

2m'+1，2n'－1 が互いに素であるような正の整数を m'，n'とするとき，①と同様に考えると，R（2m'+1，2n'－1）＝ R（2m'+1，1）＋（*x* 軸に平行な線分 2（n'－1）本）＋（＼の線分（n'－1）本）－（／の線分（n'－1）本）＝ R（2m'+1, 1）＋ 2（n'－1）…③。また，②と同様に考えると，R（2m'+1，1）＝ R（3，1）＋（*y* 軸に平行な線分 2（m'－1）本）＋（＼の線分（m'－1）本）＋（／の線分（m'－1）本）＝ R（3，1）＋ 4（m'－1）…④。④を③に代入すると，R（2m'+1，2n'－1）＝ R（3，1）＋ 4（m'－1）＋ 2（n'－1）。m＝2m'+1，n ＝ 2n'－1 とおくと，R（m，n）＝ R（3，1）＋ 2m ＋n － 7 ＝ 2m ＋n － 4 となります。

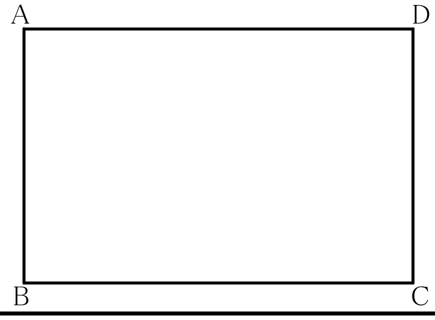
3　右の図の長方形ABCDにおいて，定規のみを用いて面積を等分することを考える。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，定規は直線を引くことのみに用い，長さを測ることはできない。また，紙を折ったりすることもできないものとする。

(1) 定規のみを用いて，長方形ABCDを辺ABに平行な直線で２等分する方法を説明しなさい。

(2) 定規のみを用いて，長方形ABCDを５等分する方法を説明しなさい。ただし，面積が等しければ，図形の形は異なってもかまわない。

図



［解答例］

(1) 図１のように，辺ABの延長上に点E（任意でよい）をとり，線分CEと辺ADとの交点をFとする。また，線分BFと対角線ACとの交点をGとする。直線EGと辺BCとの交点をMとすると，点MはBCの中点となる。

同様にして，CDの中点Nを作図することができる。線分MNが辺ABに平行で，長方形ABCDを二等分する直線となる。

MがBCの中点であることを示す。

図２において，AB＝1，AE ＝ a，CF ＝ b とするとAD // BCより，EF ＝ ab。点Eを通り，ADと平行な直線と直線AC，BFとの交点をそれぞれH，Iとする。

△ABC ∽ △AEHより

AB : AE ＝ 1 : a ＝ BC : EH …①

△FBC ∽ △FIEより

FC : FE ＝ b : ab ＝ 1 : a ＝ BC : EI …②

①，②より EH ＝ EI …③

また，△GBM ∽ △GIEより

BM : IE ＝ GM : GE …④

△GCM ∽ △GHEより

CM : HE ＝ GM : GE …⑤

④，⑤より BM : IE ＝ CM : HE

すなわち，BM : CM ＝ IE : HE …⑥

③，⑥より BM : CM ＝ 1 : 1

したがって，MはBCの中点である。

(2) (1)より，辺の中点を作図することができる。

図３のように，辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれS，T，U，Vとする。線分AT，BU，CV，DSの交点を，図のようにそれぞれW，X，Y，Zとすると，△ABW，△BCX，△CDY，△DAZ及び平行四辺形WXYZはすべて面積が等しい。したがって，長方形ABCDは５等分される。

図１

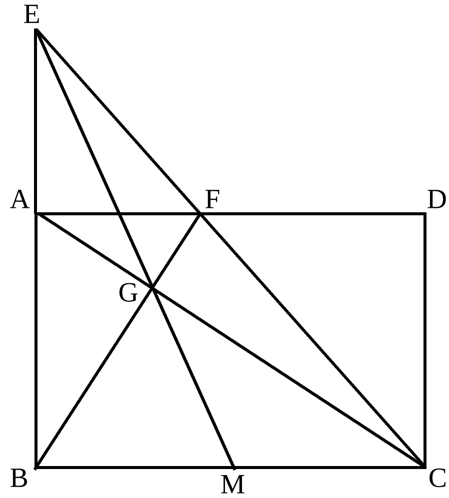


図２

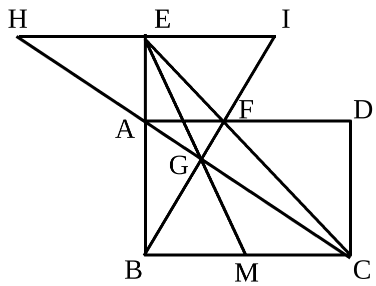
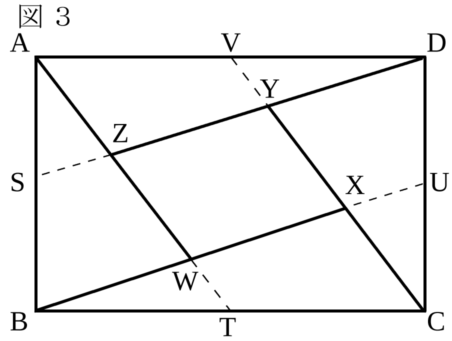


図３



［出題の意図］

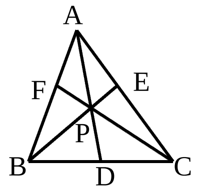
定規とコンパスを用いて中点を作図する問題はよく出題されますが，定規だけでも中点を作図することができます。図形の性質をうまく活用することと，直感力，発想力を問う問題として出題しました。

［講評］

295名中168名が選択し，残念ながら完答者はいませんでした。(1)のアイデアに気づいた人が１名いました。ここでは，最初に任意の点Eをとれるかがポイントです。点Eは辺ABの延長上になくても，点Mは中点となることが証明できます。

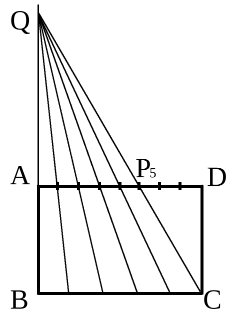
また，この問題は「チェバの定理」を利用することもできます。

チェバの定理：点 P は，三角形 ABC の辺をなす 3 直線 BC，CA，AB のいずれの上にもないものとする。また，直線 AP と BC，BP と CA，CP と AB がいずれも交わるとき，それらの点をそれぞれ D，E，F とする。このとき次の等式が成り立つ。



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

また，(2)の別解としては，辺 AD を 8 等分し，A から順に 5 個目までの等分点をそれぞれ P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。直線 P_5C と AB との交点を Q とすると，Q と P_1，P_2，P_3，P_4 とをそれぞれ結んだ直線と BC との交点は BC を 5 等分する。

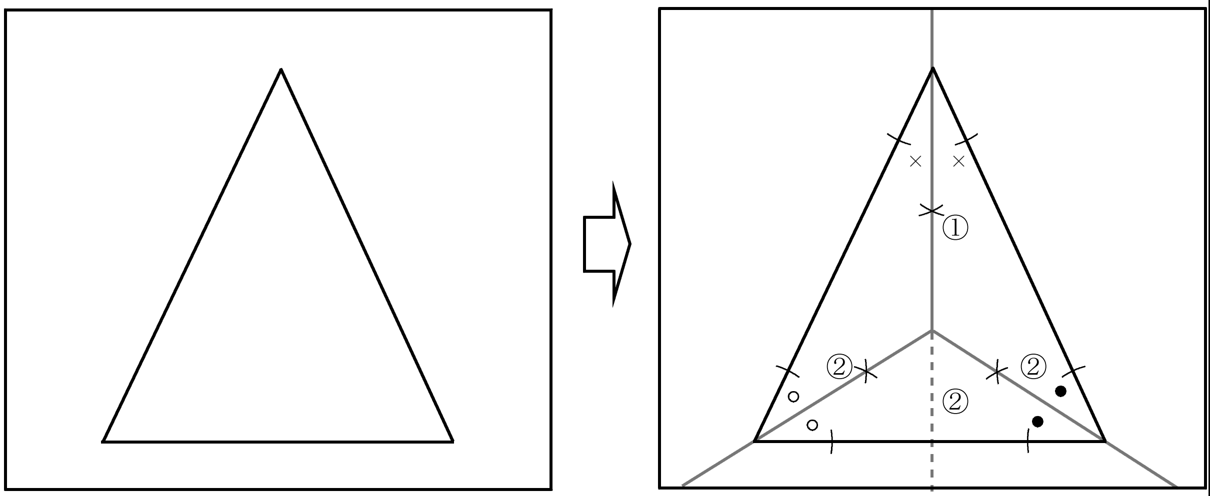


同じことを，辺 BC を 8 等分することで辺 AD を 5 等分できる。これらの点を結ぶことで長方形を 5 等分することができます。

(2)のアイデアに気づいた人は 6 名いました。そのうち，解答例の方法で求めた人が 4 名，別解の方法で求めた人が 2 名いました。

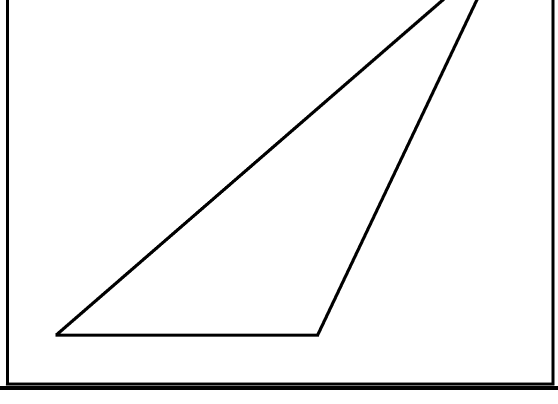
4 紙を何回か折った後，はさみを用いて 1 回だけ直線的に切ることで，ある図形を切り出したい。次の例は，二等辺三角形を切り出すとき，折ってできる折れ線を作図したものである。後の(1)，(2)のそれぞれの図形を切り出すとき，折ってできる折れ線を例にならって作図し，その手順を説明しなさい。

(例)二等辺三角形　　　　折ってできる折れ線を作図したもの

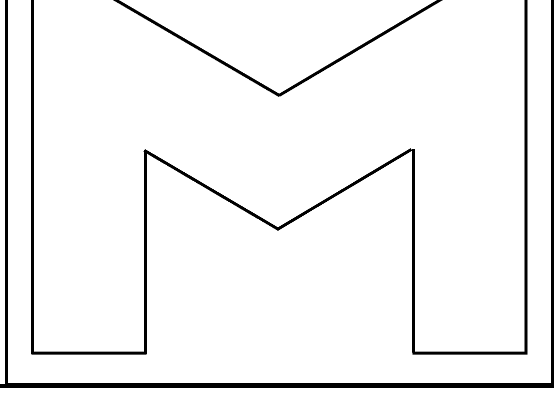


Ⅰ 折る順番を丸数字で示す。
Ⅱ 折れ線のうち，山折りは実線，谷折りは点線で示す。
Ⅲ 作図した線が，もとの図形に対して何を表す線であるか分かるように，文字や記号を用いて示す。

(1)

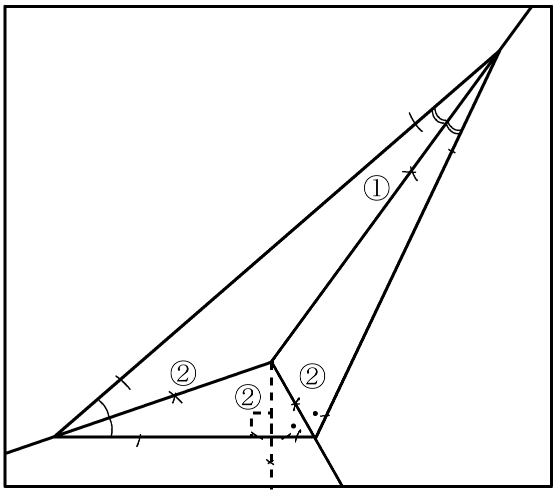


(2)

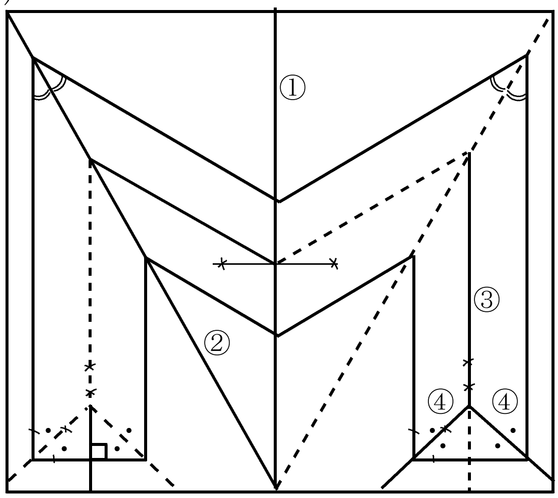


［解答例］

（1）



（2）



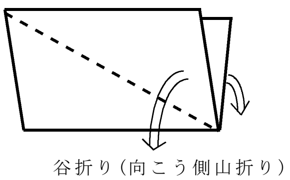
［出題の意図］

図形の性質を用いて，紙を折りたたむことで，どのような多角形も直線的に 1 回の切断で切り抜けることが知られています。切り抜く前の折りたたみ方を考えるのは容易なことではありません。図形の性質をどれだけ理解しているか，また図形の性質をどれだけ活用できるかを問う問題として出題しました。

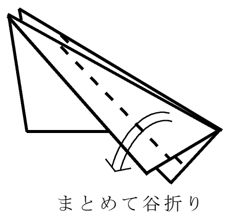
［講評］

295 名中 158 名が選択し，39 名が完答しました。(1)では，谷折りの波線(辺に対する垂線)は，例に示した辺以外の辺に引いても正解です。(2)では，次のような折り方の図を丁寧にかいてくれた人もいました。(解答例とは異なる折り方です。)

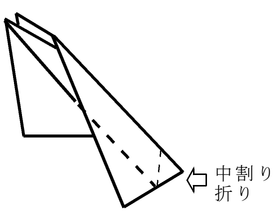
①



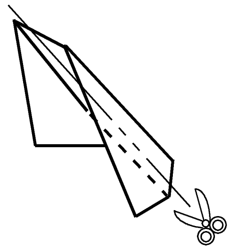
②



③



④



5　次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　1 から 10 までの整数から，異なる 6 個の数を選ぶ。

　異なる 6 個の数をどのように選んでも，その数の中に，和が11となる 2 つの数が必ず含まれることを説明しなさい。

(2)　3 で割って 2 余る 2 から 101 までの整数から，異なる何個かの数を選ぶ。

　異なる何個かの数をどのように選んでも，その数の中に，和が 106 となる 2 つの数が必ず含まれるようにするためには，最低何個の数を選べばよいか，理由を含めて答えなさい。

(3)　1 から 101 までの整数から，異なる何個かの数を選ぶ。

　異なる何個かの数をどのように選んでも，その数の中に，差が 9 となる 2 つの数が必ず含まれるようにするためには，最低何個の数を選べばよいか，理由を含めて答えなさい。

［解答例］

(1) 1 から 10 までの整数から，和が 11 となる組は，(1 と 10)，(2 と 9)，(3 と 8)，(4 と 7)，(5 と 6)の 5 組ある。1 から 10 までの整数から異なる 6 つの数をどう選んでも，和が 11 となる 5 組のうち必ず 1 組が含まれる。したがって，和が 11 となる 2 つの数が必ず含まれる。

(2) 3 で割って 2 余る 2 から 101 までの整数は，2，5，8，11，…，92，95，98，101。和が 106 となる組は，(5 と 101)，(8 と 98)，(11 と 95)，…，(50 と 56)の 16 組ある。この組に使われていない 2，53 を加えた 18 組から 19 個の整数を選ぶ。すると，和が 106 になる 2 つの整数を少なくとも 1 組選ぶことができる。したがって，最低 19 個選べばよい。

(3) 1 から 101 までの整数を，連続した 18 個の整数ごとに，次の 6 つの組に分ける。

　A：1 ～ 18，B:19 ～ 36，C：37 ～ 54，D：55 ～ 72，E：73 ～ 90，F，91 ～ 101

　この中から 55 個(＝ 6 組× 9 ＋ 1)の整数を選ぶと，少なくとも 1 つのグループから 10 個選ぶことになる。9 で割った余りは 0 ～ 8 の 9 通りしかないから，この 10 個の数の中には，9 で割った余りが等しい 2 つの数が必ず存在する。この 2 つの数の差は 9 の倍数となるが，各組の数は連続した 18 個の数だから，差は 18 以上になることはない。よって，差が 9 となる 2 つの数が必ず含まれる。したがって，最低 55 個選べばよい。

［出題の意図］

　鳩ノ巣原理の考え方を利用して考える問題を出題しました。問題の条件に合わせて数字をいくつかの組に分けて考えると，最低限必要な個数の決定ができます。(3)は，(1)，(2)の結果を踏まえて，試行錯誤しながら求めてもらいたいと考えて出題しています。

［講評］

　295 名中 250 名が選択し，29 名が完答しました。(1)では，次のような答案がありました。1,2,3,4,5,6,7,8,9,10。和が 11 となる組合せは(1，10)，(2，9)，(3，8)，(4，7)，(5，6)…①の 5 通りのみである。和が 11 となる 2 つの数がないように①の各ペアから 1 つずつ数を取り出す（例えば 1,9,3,4,6 の 5 個）…②。また，残りのもう 1 つを②で取らなかった 5 個の数字から取ることになる。よって，和が 11 になる 2 つの数が必ず含まれる。

　また，(3)では，次のような答案がありました。ここでは，(答案１)，(答案２)の 2 種類を紹介します。

(答案１)1 から 101 までの整数を，下の表のようにまとめる。

1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100
2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	
a 列	b 列	c 列	d 列	e 列	f 列	g 列	h 列	i 列	j 列	k 列	l 列

この表のうち，同じ行(横の行)の隣り合う2数の差はすべて9となり，同じ列(縦の列)の中に，差が9となる2数は存在しない。ここで，左の列から順にa列b列… l列とする。差が9となる2つの数ができないように，できるだけ多くの数を選ぶには，表の列を1列飛びに選べばよい。その組合せは（a，c，e，g，i，k），（b，d，f，h，j，l）の2組となるが，それぞれの個数を比較すると，（a，c，e，g，i，k）の方が多いのでこちらを選択する。この時点で選んだ数は9×6＝54個となり，どの2つの数を選んでも差が9となる組はない。ここで，さらに1つの数を選ぶと，表の隣り合う数の組合せが必ずでき，その差は9となる。よって最低55個の数を選べばよい。

（答案２）1から101までの整数を，9で割りきれる，9で割ると1余る，9で割ると2余る…というように分けていく。

グループ①… 9で割り切れる　：　9，18，27，36，…，90，99(11個)
グループ②… 9で割ると1余る：1，10，19，28，37，…，91，100(12個)
グループ③… 9で割ると2余る：2，11，20，29，38，…，92，101(12個)
グループ④… 9で割ると3余る：3，12，21，30，39，…，93　(11個)
・・・
グループ⑨… 9で割ると8余る：8，17，26，35，44，…，98　(11個)

異なるグループ同士の2数の差が9となることはないので，それぞれのグループで最大いくつ選べるかを考えればよい。

ｉ）グループ①，④～⑨は，11個の数があり，隣り合う2数の差は9。よって，下の図のように選べば，最大6個選ぶことができる。

9，	18，	27，	36，	45，	54，	63，	72，	81，	90，	99
○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○

このようなグループが7つあるので，7×6＝42個

ⅱ)グループ②，③は，12個の数があり，(1)と同様に考えると，2通りの方法で最大6個選ぶことができる。例えばグループ②では次の2通りの選び方がある。

1，	10，	19，	28，	37，	46，	55，	64，	73，	82，	91，	100
○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×
×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○

このようなグループが2つあるので，2×6＝12個

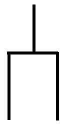
ｉ)，ⅱ)より，最大42＋12＝54個までは，差が9の組を作らず数を選ぶことができる。よって，最低55個選べばよい。

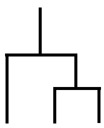
どの答案も，それぞれ分かりやすく説明されていると思います。

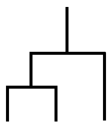
6　次に示す「適正な」トーナメント表を用いて，n人が参加する腕相撲大会を行い，優勝者を決定したい。n人が参加する「適正な」トーナメント表の作り方の総数をT(n)とするとき，後の(1)～(3)の問いに答えなさい。
　ただし，nは2以上の自然数とし，トーナメント表には，左から順に1，2，3，…，nと番号が付けられているものとする。

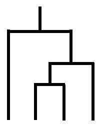
「適正な」トーナメント表
　すべての試合において，p人の中から勝ち上がった人とq人の中から勝ち上がった人が対戦する場合，pとqの差が0または1となっている。ただし，pとqは人数を表す。

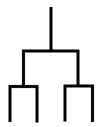
（例）　n＝2のとき　　n＝3のとき　　n＝4のとき


1　2
T(2)＝1


1　2　3


1　2　3
T(3)＝2

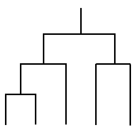

1 2 3 4
(a)

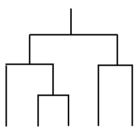

1 2 3 4
(b)
T(4)＝1

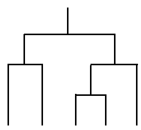
　n＝2のとき，「適正な」トーナメント表は1通りであり，T(2)＝1となる。
　n＝3のとき，2つのトーナメント表はいずれも「適正な」トーナメント表である。1回戦が免除となる人の位置が異なるため，この2つのトーナメント表は異なるものとみなし，T(3)＝2となる。
　n＝4のとき，(a)は決勝の両者がそれぞれ1人及び3人の代表者であり，その差が2となるので，「適正な」トーナメント表とはならない。n＝4の場合は，(b)のみが「適正な」トーナメント表となるので，T(4)＝1となる。

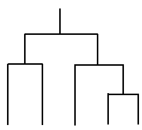
(1)　n＝5，6について，それぞれ「適正な」トーナメント表をすべて作りなさい。また，T(5)，T(6)を求めなさい。
(2)　T(n)＝1となるnはどんな性質をもった数であるか，説明しなさい。
(3)　T(68)を求めなさい。また，途中の説明も書きなさい。

［解答例］
(1) n＝5のとき，


1 2 3 4 5

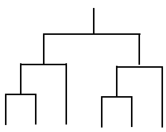

1 2 3 4 5

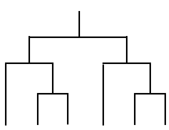

1 2 3 4 5

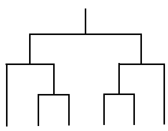

1 2 3 4 5

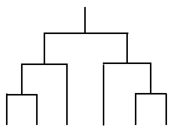
∴ T(5)＝4

n＝6のとき，


1 2 3 4 5 6


1 2 3 4 5 6

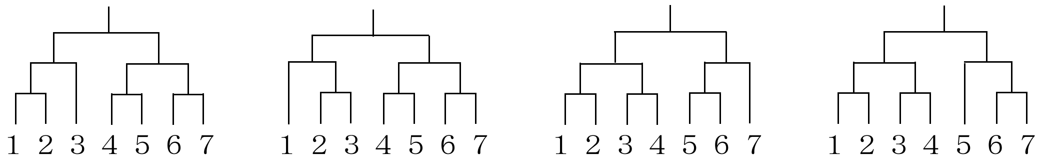

1 2 3 4 5 6


1 2 3 4 5 6

∴ T(6)＝4

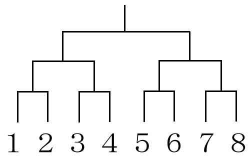
(2) n＝7，8のときも，それぞれ「適正な」トーナメント表をすべて作ってみると，次のようになる。

$n = 7$ のとき，



$\therefore T(7) = 4$

$n = 8$ のとき，



$\therefore T(8) = 1$

したがって，$T(n) = 1$ を満たす n は，$n = 2, 4, 8 \cdots$。すなわち $n = 2^k$（ただし，k は自然数）と表せると予想できる。以下，このことを示す。

ⅰ）$n = 2m$（m は自然数）のとき，決勝で対戦する両者はいずれも m 人の代表であるから，1 番から m 番までの適正なトーナメント表の作り方が $T(m)$ 通り，$(m+1)$ 番から $2m$ 番までの適正なトーナメント表の作り方も $T(m)$ 通りあるので，$T(2m) = \{T(m)\}^2 \cdots$①

ⅱ）$n = 2m + 1$（m は自然数）のとき，決勝で対戦する両者は，m 人の代表と $(m + 1)$ 人の代表であるから，1 番から m 番までの適正なトーナメント表の作り方が $T(m)$ 通り，$(m+1)$ 番から $(2m+1)$ 番までの適正なトーナメント表の作り方は $T(m + 1)$ 通り，または，1 番から $m+1$ 番までの適正なトーナメント表の作り方が $T(m + 1)$ 通り，$(m+2)$ 番から $(2m+1)$ 番までの適正なトーナメント表の作り方は $T(m)$ 通りあるから，$T(2m + 1) = 2 \cdot T(m) \cdot T(m+1) > 1 \cdots$②

よって，$n = 2m + 1$ のときは，$T(2m+1) > 1$

ここで，$n = 2^k \cdot r$（k は自然数，r は奇数）とすると，

$$T(n) = T(2^k \cdot r) = \{T(2^{k-1} \cdot r)\}^2 = [\{T(2^{k-2} \cdot r)\}^2]^2 = \cdots = \{T(2r)\}^{2^{k-1}}$$

となり，$r \neq 1$ のとき，$T(2^k \cdot r) = \{T(2r)\}^{2^{k-1}} = [\{T(r)\}^2]^{2^{k-1}} = \{T(r)\}^{2^k} > 1$

$r = 1$ のとき，$T(2^k \cdot r) = \{T(2)\}^{2^{k-1}} = [\{1\}^2]^{2^{k-1}} = 1$

したがって，$n = 2^k$（ただし，k は自然数）のとき，$T(n) = 1$。

(3)（1），（2）より，$T(68) = \{T(34)\}^2 = \{T(17)\}^4 = \{2 \cdot T(8) \cdot T(9)\}^4 = 2^4 \cdot 1 \cdot \{T(9)\}^4 = 2^4\{2 \cdot T(4) \cdot T(5)\}^4 = 2^4\{2 \cdot 1 \cdot 4\}^4 = 65536$。

［出題の意図］

トーナメントという身近な題材を扱い，「適正なトーナメント表」という特別な決まりを設けました。この特別な決まりに従って，法則性を見つけ出し，自分なりの筋道を立てて解決する力や，論理的に説明する力を問う問題として出題しました。

［講評］

295 名中 253 名が選択し，31 名が完答しました。（2）では，$T(n) = 1$ を満たす n が，$n = 2^k$（ただし，k は自然数）と表せることを，数学的帰納法（数列の分野）で証明することもできます。

（数学的帰納法での証明）：$T(2) = 1$，$T(3) = 2$，$T(4) = 1$。m が 2 以上の整数とすると，$T(2m) = \{T(m)\}^2$，$T(2m+1) = 2 \cdot T(m) \cdot T(m+1)$ が成り立つ。$T(2) = 1$，$T(3) = 2$，$T(4) = 1$ だから，$n = 2^k$ が $k = 1, 2$ のときに成り立つ。

$n \leqq 2^{k'}$ のとき，$T(n) = 1$ を満たす n の値が $n = 2^k(k = 1, 2, \cdots k')$ のみと仮定する。$2^{k'} < n < 2^{k'+1}$ を満たす n のうち，n が奇数ならば，$T(n) = T(2m+1) = 2 \cdot T(m) \cdot T(m+1) \geqq 2$。また，$n$ が偶数ならば，$T(n) = T(2m) = \{T(m)\}^2$ であるが，$2^{k'-1} < m < 2^{k'}$ より，$T(m) > 1$ だから $T(n) > 1$。また，$T(2^{k'+1}) = \{T(2^{k'})\}^2 = 1^2 = 1$。以上より，$n \leqq 2^{k'}$ のとき，$T(n) = 1$ を満たす n の値が $n = 2^k(k = 1, 2, \cdots, k')$ のみならば，$n \leqq 2^{k'+1}$ に対しても，$T(n) = 1$ を満たす n の値は $n = 2^k(k = 1, 2, \cdots, k'+1)$ のみである。

以上より，$n = 2^k$（ただし，k は自然数）と表せる。