

平成22年度
群馬県高校生

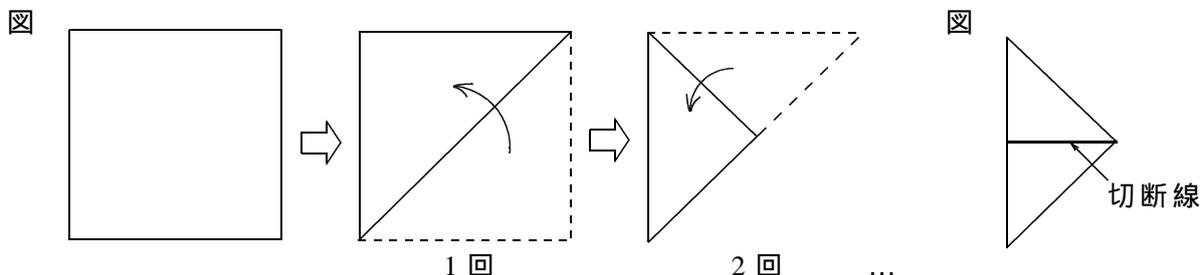
数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページから3ページです。解答用紙は6枚あります。
- 2 制限時間は3時間です(13:00~16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 3 解答は、すべて解答用紙に記入してください。また、コンテスト番号と氏名も記入してください。
- 4 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。また、必要があれば、電卓、はさみを用いてもかまいません。
- 5 コンテスト終了後、解答用紙は4枚提出してください。
- 6 トイレ等に行くときは、監督の指示に従ってください。

- 1 図のように，正方形の紙を1枚用いて，正方形の1つの対角線を折り目として1回折ると直角二等辺三角形ができる。この直角二等辺三角形の斜辺の垂直二等分線を折り目としてもう1回折ると，面積が半分の直角二等辺三角形ができる。以下同様に，3回，4回，...， n 回と，順に紙を折っていく。

正方形の紙を n 回折った後，図のように，直角二等辺三角形の斜辺の垂直二等分線に沿って紙を切るとき，後の(1)，(2)の問いに答えなさい。



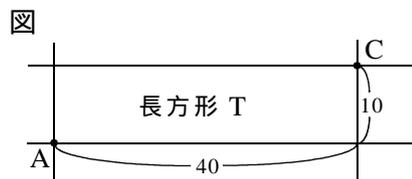
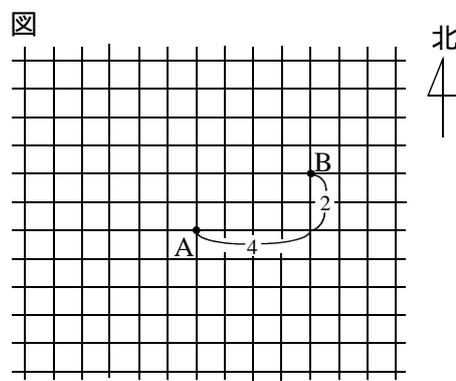
- (1) $n = 3$ ， $n = 4$ のとき，もとの正方形の紙はどのように切断されるか，もとの正方形の紙に切断線をそれぞれかきなさい。
- (2) $n = 10$ ， $n = 11$ のとき，正方形の紙は何枚の断片に分かれるか，それぞれ求めなさい。また，そうなる理由を説明しなさい。

- 2 図のように，東西，南北にどこまでも延びている道が等間隔に並んでいる。隣り合う2つの交差点の距離はすべて1とし，2つの交差点の距離は，道なりに進んだ最短の距離と定義する。

例えば，図の交差点Aから東に4，北に2進んだところに交差点Bがあるとき，交差点Aと交差点Bの距離は6となる。

このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) 図の交差点Aからの距離が6となる交差点の個数を求めなさい。
- (2) 図の交差点Aからの距離と交差点Bからの距離の比が，1:2となる交差点の個数を求めなさい。
- (3) 図のように，交差点Aから東に40，北に10進んだところに交差点Cがある。AまたはCを通る4本の道で囲まれ，A，Cを頂点に持つ長方形Tを考える。



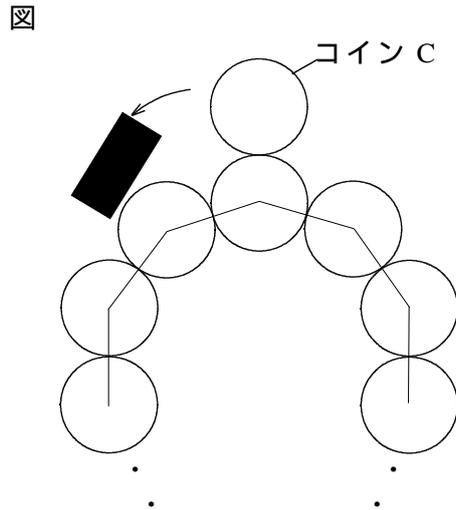
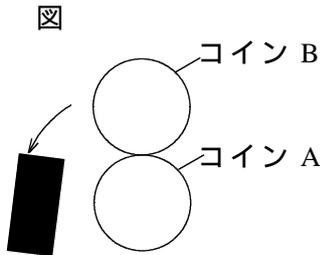
この長方形Tの内部及び周上には，交差点Aからの距離と交差点Cからの距離の比が，1:2となる交差点は存在しないことを示しなさい。

長方形Tの外部で，交差点Aからの距離と交差点Cからの距離の比が，1:2となる交差点の個数を求めなさい。また，そうなる理由を説明しなさい。

3 図のように，固定された半径 1 のコイン A に半径 1 のコイン B が接したまま滑らずに回転しながら 1 周すると，コイン B は 2 回転する。

図のように，半径 1 のコイン n 個を用いて，1 辺の長さが 2 の正 n 角形の各頂点に，それぞれのコインの中心が重なるように並べて固定する。この n 個のコインの外側を，半径 1 のコイン C が接したまま滑らずに回転しながら 1 周するとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし， $n \geq 3$ とする。また，コインはすべて円形であり，かつすべて同一平面上にあるものとする。

- (1) $n = 3, n = 6$ のとき，コイン C は何回転するか，それぞれ求めなさい。
 (2) 一般に，コイン C は何回転するか， n を用いて表しなさい。また，そうなる理由を説明しなさい。



4 図のように，縦方向に m 個，横方向に n 個のマス目を持つ長方形がある。

A のマス目は，上から 2 番目，左から 3 番目のマス目にあるから，マス目 $(2, 3)$ と表すことにする。同様に，B のマス目は，マス目 $(m, 1)$ ，C のマス目は，マス目 (m, n) と表すことにする。ただし， m, n はともに 2 以上の整数とする。

図のように，マス目 $(1, 1)$ には 0 を記入する。0 を記入したマス目の右及び下のマス目には 1 を記入し，1 を記入したマス目の右及び下のマス目には 0 を記入する。

すべてのマス目に 0 または 1 を記入した後，記入された数字について次の操作を行なう。

操作
 上下または左右の隣り合う 2 つのマス目を選び，それぞれのマス目に記入されている数字に対し，両方に同じ数を足す，または両方から同じ数を引く。

この操作を繰り返すと，図のように，マス目 $(m, 1)$ 以外のマス目は，すべて 1 になった。

このときのマス目 $(m, 1)$ に記入された数字 a について，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) $m = 2, n = 3$ のとき， $a = 4$ となる。 $a = 4$ となる手順を説明しなさい。
 (2) $m = 4, n = 5$ のとき， a の値を求めなさい。
 (3) $m = 2010, n = 729$ のとき， a の値を求めなさい。また，そうなる理由を説明しなさい。

図

	1	2	3	...					n
1									
2			A						
3									
\vdots									
m	B								C

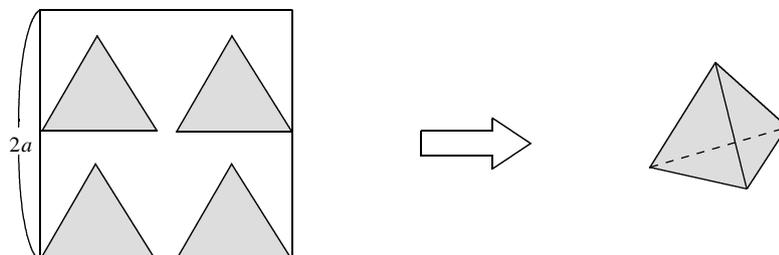
図

0	1	0	1	...			
1	0	1	0	...			
0	1	0	1	...			
1	0	1	0	...			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				

図

1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	1	...	1	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
1	1	1	1	...	1	1	1
a	1	1	1	...	1	1	1

- 5 1辺の長さが $2a$ の正方形の紙が1枚ある。下の図のように、この紙から4枚の合同な正三角形を切り取って正四面体を作りたい。正四面体の体積を最大にするには、正方形の紙から4枚の合同な正三角形をどのように切り取ればよいか、切り取り方を図示して説明しなさい。また、このときの正三角形の1辺の長さを、 a を用いて表しなさい。



- 6 TさんがAさんとBさんにサインを送り、そのサインに従ってAさんまたはBさんがある行動を起こす決まりを作った。Tさんのサインは、右手または左手で体の5つの部位「頭」「鼻」「右耳」「左耳」「あご」を触れることであり、Tさんが指示する内容は次の～とする。

Tさんが指示する内容	
誰が	: 「Aさん」 or 「Bさん」
何をしてから	: 「その場でジャンプ」 or 「その場で地面に両手をついて」
どの方向に	: 「前」 or 「後」 or 「右」 or 「左」
どうする	: 「走る」 or 「歩く」

ここで、 \sim は、Tさんが右手または左手で体の1つの部位に触れることにより決まり、 \sim は、Tさんが右手または左手で体の2つの部位に触れる組合せにより決まるものとする。

次の \sim のTさんのサインと、そのサインに従って決められた行動の組合せをもとにして、後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

サインと行動の組合せ	
すべての部位を左手で触れる。	⇨ Aさんがその場でジャンプしてから前へ歩く。
右手で「右耳」「あご」、左手で「頭」「鼻」「左耳」を触れる。	⇨ Bさんがその場でジャンプしてから前へ走る。
右手で「頭」「右耳」「左耳」、左手で「鼻」「あご」を触れる。	⇨ Aさんがその場で地面に両手をついてから右へ走る。

- (1) 「Aさんがその場で地面に両手をついてから右へ歩く」サインを作りなさい。
 (2) 「Aさんがその場で地面に両手をついてから右へ歩く」サインを送ろうとしたとき、左手で「鼻」に触れるところを間違えて右手で触れ、右手で「左耳」に触れるところを間違えて左手で触れてしまったところ、Aさんがその場で地面に両手をついてから左へ歩いた。

「Bさんがその場でジャンプしてから後ろへ歩く」サインを作りなさい。

- (3) Tさんのサインと、そのサインに従って決められた行動の組合せを、次の3つの部位で入れ替えた。

ア) 体のある1つの部位において、右手と左手で触れるサインが指示する内容

イ) 体のある2つの部位において、指示する内容(例えば、「頭」「鼻」において指示する内容を入れ替えたとすると、右手で「頭」に触れると、入れ替え前の右手で「鼻」に触れるサインが指示する内容が伝わり、左手で「鼻」に触れると、入れ替え前の左手で「頭」に触れるサインが指示する内容が伝わる。)

このとき、入れ替え前の「Aさんがその場でジャンプしてから右へ歩く」サインは、「Aさんがその場でジャンプしてから前へ歩く」サインに替わった。

また、入れ替え前の「Bさんがその場で地面に両手をついてから前へ走る」サインは、「Aさんがその場で地面に両手をついてから後ろへ走る」サインに替わった。

「Aさんがその場でジャンプしてから左へ歩く」サインを作りなさい。

平成 22 年度群馬県高校生数学コンテスト参考資料

切り取るなどして利用してください。

