

平成 2 1 年度

群馬県高校生

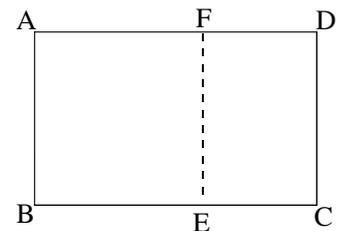
数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は，1 ページから 3 ページです。解答用紙は 6 枚あります。
- 2 解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
- 3 必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
- 4 作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
- 5 制限時間は 3 時間です（13：00～16：00）。6 問中 4 問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。
- 6 トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

- 1 5円切手と8円切手の2種類の切手がそれぞれたくさんある。これらの2種類の切手をそれぞれ何枚かずつ選び、選んだ切手の合計金額を考える。
 例えば、5円切手を1枚、8円切手を2枚選ぶと、選んだ切手の合計金額は21円となる。
 このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。
- (1) 合計金額が79円となると、5円切手と8円切手はそれぞれ何枚ずつ選べばよいか。5円切手と8円切手の枚数の組み合わせをすべて求めなさい。
- (2) 2種類の切手を選ぶとき、例えば14円のように、それぞれの切手をどのように組み合わせても表すことのできない合計金額がある。
 この表すことのできない合計金額のうち最大のものを、次の、の場合についてそれぞれ求めなさい。また、そうなる理由もかくこと。
 2種類の切手を、それぞれ少なくとも1枚は使う。
 2種類の切手のうち、使わない種類の切手があってもよい。

- 2 右の図の長方形 ABCD において、長方形 ABCD から正方形 ABEF を切り取り、残った長方形 ECDF がもとの長方形 ABCD と相似であるとき、AB と AD の長さの比は黄金比となっている。

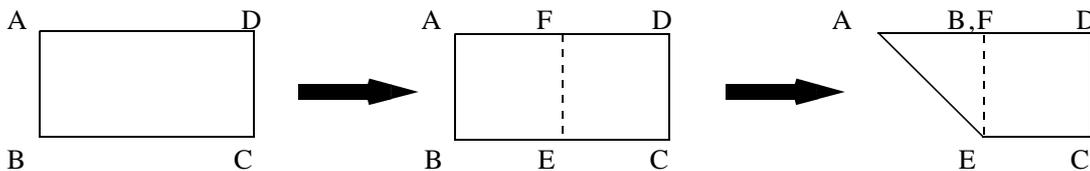


- 次の(1)、(2)の問いに答えなさい。
- (1) 黄金比 (AB : AD) を求めなさい。
- (2) 一般に、名刺の長方形の縦と横の辺の長さの比は黄金比になっている。

このことを、紙を折るだけで確かめる方法を、次の例の折り方と説明にならって示しなさい。ただし、紙を折るのは3回までとする。また、紙を広げる操作は数えない。

例

長方形 ABCD の縦と横の比が 1 : 2 であることは、次のように確かめることができる。



折り方

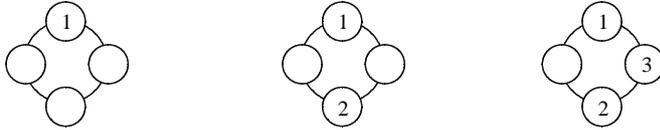
- 1 回目：辺 AB を辺 DC に重ねて折って広げる。折り目の線分を EF とする。
 2 回目：四角形 ABEF の対角線 AE で折って、頂点 B が F と重なることを確かめる。

説明

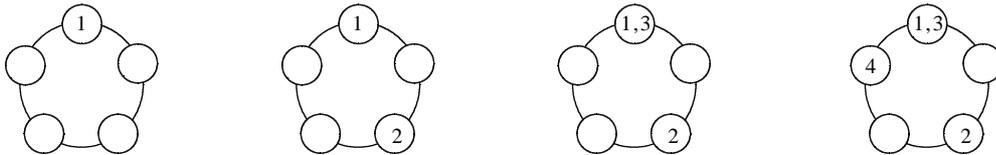
F は AD の中点なので、 $AD = 2AF \dots$
 また、対角線 AE で折ると、頂点 B が F と重なるので、 $AB = AF \dots$
 より、 $AD = 2AB$ より、 $AB : AD = 1 : 2$

- 3 n 個の が円形に並んでいる。1個の に1を書き、右回りでその隣の から数えて2つ目の に2を書き、さらにその隣の から数えて3つ目の に3を書く。以下、同じ規則に従って順に自然数を書いていく。
下の図は、 $n = 4, 5$ のときの例である。

$n = 4$ のとき、



$n = 5$ のとき、



ここで、 $n = 4$ となる n に対し、同じ に2つ以上の数字を書くことなく、 $n - 1$ までの数字が書ける n を求めたい。

上の例では、 $n = 4$ のときは題意を満たし、 $n = 5$ のときは題意を満たさない。

次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

- (1) $n = 6, 7, 8$ のとき、それぞれ題意を満たすかどうか確かめなさい。
(2) n の値がどのようなとき題意を満たすか予想し、そのことが正しいことを証明しなさい。必要があれば右の自然数の和の公式を利用してよい。

自然数の和の公式

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(例) $n = 4$ のとき、

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

- 4 次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

- (1) 図の凸五角形ABCDEは、 $\angle EAB = \angle ABC = \angle CDE = 120^\circ$, $AE = CD$ である。
なお、凸五角形とは、5つの内角の大きさが、どれも 180° を越えない五角形のことである。

この凸五角形ABCDEを用いて、平面をすき間なく敷き詰めることができるか。

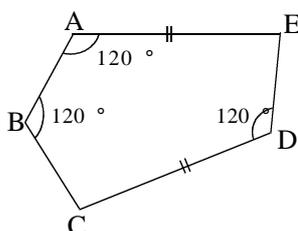
敷き詰めることができる場合は、敷き詰め方を示して理由を説明しなさい。敷き詰めることができない場合は、その理由を説明しなさい。

- (2) 同じ形の凸五角形をいくつか用いて、正六角形の内部にすき間なく敷き詰めることを考える。

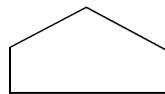
図の凸五角形を2個用いると、図のように正六角形の内部にすき間なく敷き詰めることができる。

このように、同じ形の凸五角形を3個以上なるべく多く用いて正六角形の内部にすき間なく敷き詰めることができるか。敷き詰めることができる場合は、敷き詰め方を示し、理由を説明しなさい。できない場合は、その理由を説明しなさい。

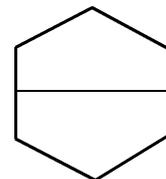
図



図



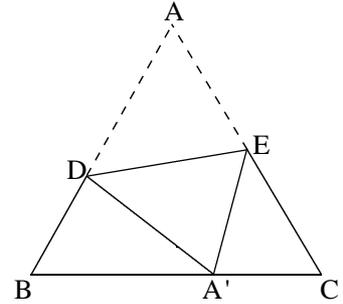
図



5 1 辺の長さが $2a$ の正三角形 ABC がある。

右の図のように，辺 BC 上に点 A' をとり，頂点 A が A' と重なるように折り返し，折り目を DE とする。ただし，D, E はそれぞれ辺 AB, AC 上の点とする。また，A' の位置は，辺 BC の両端を含むものとする。

このとき，三角形 A'DE の面積の最大値と最小値を求めなさい。また，そうなる理由もかくこと。

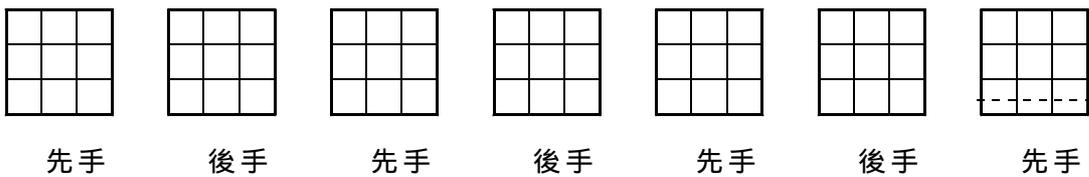


6 「三目並べ」のルールを次のように定める。

「三目並べ」のルール
 3×3 のマスの中に，先手は を，後手は を交互に 1 個ずつ置いていく。
 または を，縦，横，斜めのいずれかに，先に 3 個 1 列に並べた方を勝ちとする。

図 は，「三目並べ」の対戦の例であり，先手が勝ちとなっている。

図



このとき，次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 次の条件 で「三目並べ」を行う。

条件
 図 のアにおいて，辺 AB と DC がつながっている 3×3 のマスを用いて「三目並べ」を行う。

例えば，図 のアとイは同じ並べ方と考えられる。

条件 で「三目並べ」を行うとき，図 のアにおいて，先手 () は，次の一手をどこに置くとよいか。次の一手を示し，その理由を説明しなさい。

(2) 次に，条件 で「三目並べ」を行う。

条件
 図 のアにおいて，辺 AB と DC，辺 AD と BC がそれぞれつながっている 3×3 のマスを用いて「三目並べ」を行う。

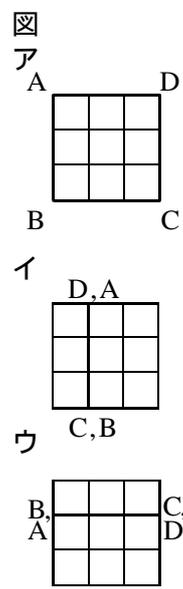
例えば，図 のアとイとウは同じ並べ方と考えられる。

条件 で「三目並べ」を行うとき，次の ， の問いに答えなさい。

図 のアと同じ並べ方は，ア，イ，ウ以外に 6 つある。それらをすべて示しなさい。

ただし， 3×3 のマスを回転して同じ並べ方となるものは 1 つと考えるものとする。

先手 () は，必ず勝つことができるか。できる場合は，その並べ方を示して理由を説明しなさい。できない場合は，その理由を説明しなさい。



平成 2 1 年度群馬県高校生数学コンテスト参考資料

切り取るなどして利用して下さい。

2



4

