平成２１年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ．概　要

今年度の数学コンテストは７月２８日（火）に実施され、参加者は３５４名（２０校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１２回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞２８名、アイデア賞７名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞９名、奨励賞２４名、アイデア賞１０名）計４４名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓の使用も認めている。

今回は６問中３問が図形の問題であり、名刺を使った黄金比の問題、敷き詰めの問題及び三角形の面積の最大・最小の問題などがあった。参加生徒は、実際に参考資料として提示した名刺を切り取って折り曲げたり、５角形の紙を切り取って敷き詰めたりしながら試行錯誤を繰り返し、図形に潜んでいる数学的性質を見つけていた。問題は取り組みやすいものもあったが、論証力や発想力を問うものも多く苦戦した問題もあったようである。しかし、ほとんどの生徒が３時間集中して取り組み、コンテストの終了後の感想では、３時間が短かく感じられたと述べた生徒もいた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも発想のユニークなものも見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、今後、数学のみならずいろいろな教科を学習していく上でよい経験になったと思われる。この群馬県高校生数学コンテストが生徒にとって数学を楽しむ機会として更に充実していければ幸いである。

○　参加生徒の内訳

学　　科	普　通　科		理数科	計	
学年(中等)	男	女	男	男	女
１年(４年)	１４３	３５		１４３	３５
２年(５年)	９９	４５	３	１０２	４５
３年	２６	３		２６	３
計	２６８	８３	３	２７１	８３

合 計　３５４名

※次のページ以降に平成２１年度数学コンテストの問題と解答・解説があります。
下記は問題表紙の注意事項です（参考まで）。

注　　意　　事　　項

１　問題は，１ページ～３ページです。解答用紙は6枚あります。
２　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
３　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
４　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
５　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。
６　トイレ等に行くときは，監督の指示に従ってください。

Ⅱ．問題及び解答例

> **1**　5円切手と8円切手の2種類の切手がそれぞれたくさんある。これらの2種類の切手をそれぞれ何枚かずつ選び，選んだ切手の合計金額を考える。
> 例えば，5円切手を1枚，8円切手を2枚選ぶと，選んだ切手の合計金額は21円となる。
> このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。
> (1) 合計金額が79円となるとき，5円切手と8円切手はそれぞれ何枚ずつ選べばよいか。5円切手と8円切手の枚数の組合せをすべて求めなさい。
> (2) 2種類の切手を選ぶとき，例えば14円のように，それぞれの切手をどのように組み合わせても表すことのできない合計金額がある。
> この表すことのできない合計金額のうち最大のものを，次の①，②の場合についてそれぞれ求めなさい。また，そうなる理由もかくこと。
> ①　2種類の切手を，それぞれ少なくとも1枚は使う。
> ②　2種類の切手のうち，使わない種類の切手があってもよい。

[解答例]

(1) 5円切手を x 枚，8円切手を y 枚選ぶとし，$5x + 8y = 79$ となる x, y の値を求める。ただし，$1 \leqq x \leqq 16$，$1 \leqq y \leqq 9$ …①とする。$5x + 8y = 79$ より，$5(x-3) + 8(y-8) = 0$ すなわち，$5(x-3) = -8(y-8)$。$(x-3)$ は8の倍数だから①より，$x = 3, 11$

よって，$x = 3$，$y = 8$ または $x = 11$，$y = 3$。

したがって，5円切手3枚と8円切手8枚または，5円切手11枚と8円切手3枚。

(2) $5x + 8y = n$（n は自然数）を満たす自然数の組（x, y）が存在しない n のうち，最大の数が題意を満たす。

① 5×1，5×2，…，5×7 は，どれも $5 \times 8 (= 40)$ より小さい数で，8で割った余りはそれぞれ5，2，7，4，1，6，3となり，1～7の数を並べ替えたものである。

すなわち，$5 \times m = 8 \times q + r$（$m, r = 1, 2, \cdots, 7$，$q = 1, 2, \cdots, 4$）

ゆえに，$r = 5 \times m - 8 \times q$

$5 \times 8 (= 40)$ より大きな数 n を8で割ること考えると，余りは0～7となる。

ｉ）余りが1以上のときは

$n = 8 \times q' + r$　($r = 1, 2, \cdots, 7$)　($q' \geqq 5$)

$= 8 \times q' + (5 \times m - 8 \times q)$

$= 5 \times m + 8 \times (q' - q)$　　　($m > 0$，$q' - q > 0$)

ⅱ）余りが0のときは

$n = 8 \times q' + 0 = 8 \times q' + (5 \times 8 - 8 \times 5) = 8(q' - 5) + 5 \times 8$　　($q' \geqq 6$)

すなわちｉ)，ⅱ)ともに $5x + 8y$ と表すことができる。

ところで，5×8 が $5x + 8y$ と表せたとすると，$5 \times 8 = 5x + 8y$（$1 \leqq x \leqq 7$，$1 \leqq y \leqq 4$）

$5x = 8(5 - y)$

5，8は互いに素であるから x は8の倍数となるが，$1 \leqq x \leqq 7$ よりこれは不適。

したがって，$5x + 8y$ で表すことができない最大数は $5 \times 8 = 40$

② $x = x' + 1$，$y = y' + 1$ とすると，x'，y' は自然数だから x'，y' は0以上の整数となる。

$5x' + 8y' = 5(x-1) + 8(y-1) = 5x + 8y - 13$

$5x + 8y$ で表せない最大の整数は40だから，$5x' + 8y'$ で表せない最大の整数は $40 - 13 = 27$。

[出題の意図]

「a，b は自然数で，互いに素であるとき，$ab + 1$ 以上のすべての自然数は，$ax + by$ の形で表される。」という定理に基づいています。ポイントは a，b のどちらかで割った余りに着目することです。また，$ax + by$ で表すことのできない自然数の個数も求められることが知られています。答えは，$ab - \dfrac{(a-1)(b-1)}{2} = \dfrac{(a+1)(b+1)}{2} - 1$ です。

[講評]

354名中334名が選択し，2名が完答しました。(1)はよくできていました。(2)については，5円切手と8円切手を組み合わせて表せない合計金額は，無限に存在するように思った人もいたようです。少ない方から具体的に書き並べたりしながら見当をつけていくと，41から45までの5つは

$41 = 5 \times 5 + 8 \times 2$, $42 = 5 \times 2 + 8 \times 4$, $43 = 5 \times 7 + 8 \times 1$, $44 = 5 \times 4 + 8 \times 3$, $45 = 5 \times 1 + 8 \times 5$,

と表せ，46 以上の合計金額は，それぞれ順に 5 円切手を 1 枚ずつ足していけばすべて表せます。①では，5 円切手と 8 円切手をどのように組み合わせても表すことのできない合計金額のうち最小のものが 40 であることを見つけられた答案が比較的多かったようです。しかし，厳密には 40 が表せない理由が説明されていないと正解となりません。40 が表せない理由を，次のように簡潔に説明してくれた人がいました。

「$5x + 8y = 40$ を満たす自然数$(x,\ y)$が存在するとしたら，$x = 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ であるが，
このとき, どれも y は自然数とならないので 40 は題意を満たす自然数の 1 つである。」

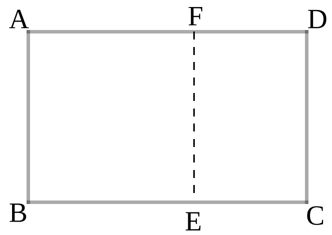
2　右の図の長方形 ABCD において，長方形 ABCD から正方形 ABEF を切り取り，残った長方形 ECDF がもとの長方形 ABCD と相似であるとき，AB と AD の長さの比は黄金比となっている。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 黄金比(AB：AD)を求めなさい。

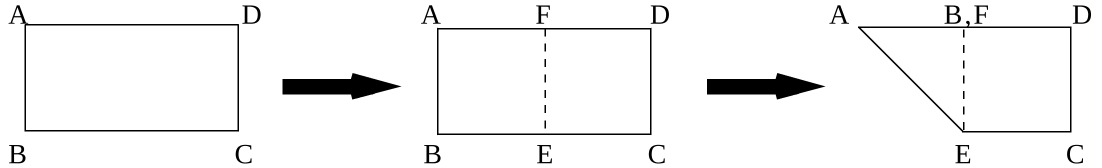
(2) 一般に，名刺の長方形の縦と横の辺の長さの比は黄金比になっている。

このことを，紙を折るだけで確かめる方法を，次の例の$\boxed{\text{折り方}}$と$\boxed{\text{説明}}$にならって示しなさい。ただし，紙を折るのは 3 回までとする。また，紙を広げる操作は数えない。



例

長方形 ABCD の縦と横の比が 1：2 であることは，次のように確かめることができる。



$\boxed{\text{折り方}}$

1 回目：辺 AB を辺 DC に重ねて折って広げる。折り目の線分を EF とする。

2 回目：四角形 ABEF の対角線 AE で折って, 頂点 B が F と重なることを確かめる。

$\boxed{\text{説　明}}$

F は AD の中点なので，AD ＝ 2AF …①

また，対角線 AE で折ると，頂点 B が F と重なるので，AB ＝ AF …②

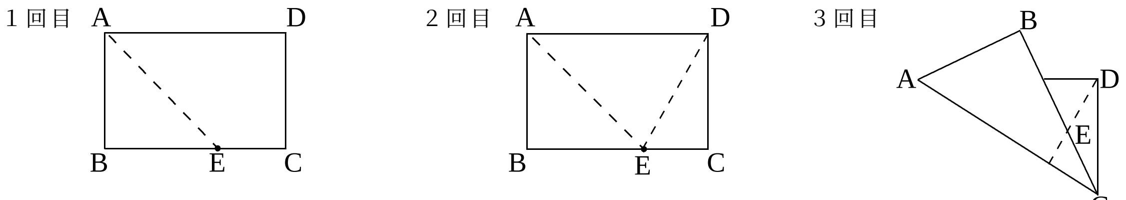
①，②より，AD ＝ 2AB より，AB：AD ＝ 1：2

[解答例]

(1) 正方形 ABEF の 1 辺の長さを 1 とし，AD ＝ x　($x > 1$)とすると，長方形 ABCD と長方形 ECDF が相似だから，AB：AD ＝ DF：DC すなわち，$1 : x = (x - 1) : 1$

$x(x - 1) = 1$ より，$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 。よって，黄金比 AB：AD ＝ $1 : \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) $\boxed{\text{折り方}}$



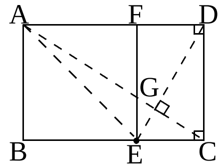
1 回目：∠ BAD の二等分線で折り目を付ける。この二等分線と辺 BC との交点を E とする。

2 回目：D と E を通る直線で折り目を付ける。

3 回目：A と C を通る直線で折ると, E が D と E を通る折り目に重なることを確認する。

説　明

四角形 ABEF が正方形となるように点 F をとり，線分 AC と DE の交点を G とする。
A と C を通る直線で折ると，E が D と E を通る折り目に重なるから，∠CGD＝90 °…①
△ CDG と△ EDC において，∠ CDG ＝∠ EDC …②
①，②から，２組の角が等しいから△CDG ∽△EDC …③
△ EDC と△ CAD において，③から∠CED ＝∠GCD …④
∠ ECD ＝∠ CDA ＝ 90 °だから，２組の角が等しいので
△EDC ∽△CAD …⑤
よって，EC：CD ＝ CD：AD。長方形 ECDF がもとの長方形 ABCD と相似だから，AB と AD の長さの比は黄金比となっている。



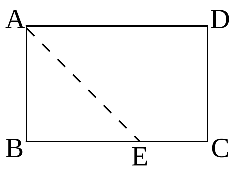
[出題の意図]

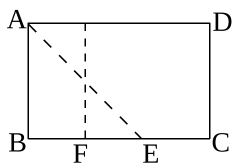
名刺の縦と横の長さの比は，ほとんどのものが黄金比（$1：\frac{1+\sqrt{5}}{2}$）となっています。
そのことを, 紙を折ることにより確認する方法を見つけてもらうことをねらいとしています。折る回数を制限したのは，より効果的な確認方法を考えてもらいたいと考えたからです。

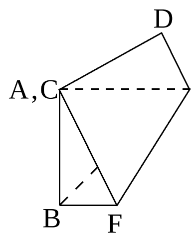
[講評]

354 名中 176 名が選択し，21 名が完答しました。正答は 3 種類に分類できました。解答例のほか，次の 2 通りの方法もみられました。

別解 1　1 回目　2 回目　3 回目

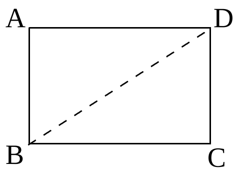


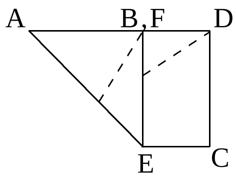


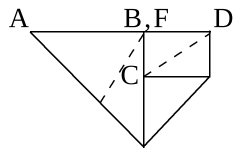


1 回目：∠ BAD の二等分線で折り目を付ける。この二等分線と辺 BC との交点を E とする。
2 回目：B と E が重なるように折り目を付け，BE の中点を F とする。
3 回目：2 点 A，C を重ねるように折り，線分 FC と線分 FA の長さが一致することを確認する。

別解 2　1 回目　2 回目　3 回目





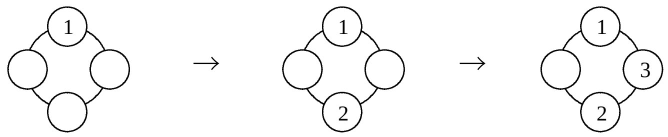


1 回目：B と D を通る直線で折り，折り目を付ける。
2 回目：∠ BAD の二等分線で折り，辺 AD 上の点で点 B が重なる点を F とする。
また，∠ BAD の二等分線と辺 BC との交点を E とする。
3 回目：∠ CEF の二等分線で折り，C が線分 BD 上にあることを確認する。

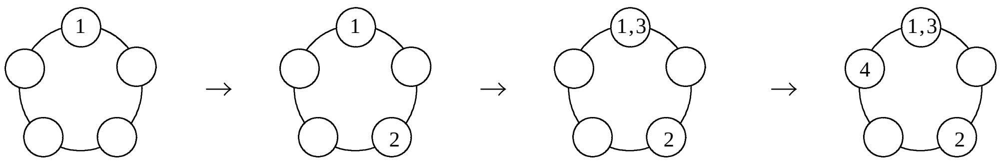
3　n 個の○が円形に並んでいる。1 個の○に 1 を書き，右回りでその隣の○から数えて 2 つ目の○に 2 を書き，さらにその隣の○から数えて 3 つ目の○に 3 を書く。以下，同じ規則に従って順に自然数を書いていく。

下の図は，$n = 4$，5 のときの例である。

$n = 4$ のとき，



$n = 5$ のとき，



ここで，$n \geqq 4$ となる n に対し，同じ○に 2 つ以上の数字を書くことなく，$n - 1$ までの数字が書ける n を求めたい。

上の例では，$n = 4$ のときは題意を満たし，$n = 5$ のときは題意を満たさない。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　$n = 6$，7，8 のとき，それぞれ題意を満たすかどうか確かめなさい。

(2)　n の値がどのようなとき題意を満たすか予想し，そのことが正しいことを証明しなさい。必要があれば右の自然数の和の公式を利用してもよい。

自然数の和の公式

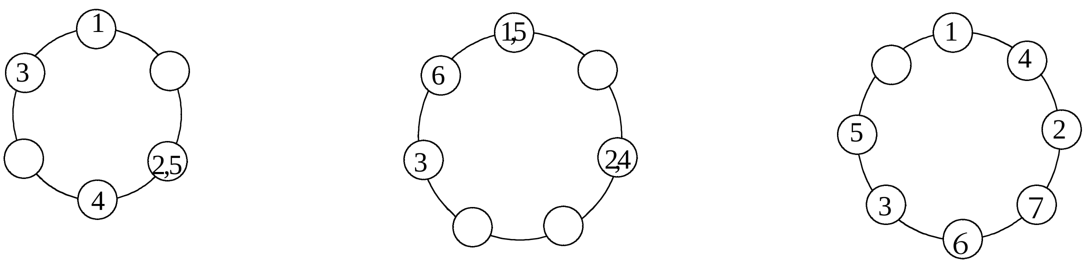
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(例) $n = 4$ のとき，

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

[解答例]

(1) $n = 6$ のとき　　　$n = 7$ のとき　　　$n = 8$ のとき



よって，$n = 6,7$ のときは題意を満たさない。$n = 8$ の時は題意を満たす。

(2) $n = 2^k$ ($k \geqq 2$，k は自然数)と予想できる。

① $n = 2^k$ のとき，異なる自然数 a，b ($a < b < n$) が同じ○に入る条件は，

$$(a+1)+(a+2)+\cdots+(b-1)+b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a+1)}{2} = \frac{(b-a)(a+b+1)}{2} = mn \ (m \text{ は自然数})$$

したがって，$(a+b+1)(b-a) = 2mn = m2^{k+1}$

ⅰ) ab が偶数(a が偶数で b が偶数または a が奇数で b が奇数)のとき，$b-a$ は偶数で，$a+b+1$ は奇数だから，$b-a$ は 2^{k+1} の倍数となる。一方，$b-a < n = 2^k$ より矛盾。

ⅱ) ab が奇数(a が偶数で b が奇数または a が奇数で b が偶数)のとき，$b-a$ は奇数で，$a+b+1$ は偶数だから，$a+b+1$ は 2^{k+1} の倍数となる。一方，$a+b+1 < 2n = 2^{k+1}$ より矛盾。

よって，$n = 2^k$ のとき，題意を満たす。

② $n \neq 2^k$ のとき，すなわち，$n = 2^k(2\ell+1)$　($k \geqq 0$，$\ell \geqq 1$) のとき，

ⅰ) $\ell > 2^k$ のとき，$b-a = 2^{k+1}$，$a+b+1 = 2\ell+1$ とすると，$a = \ell - 2^k$，$b = 2^k + \ell$ と

なり，a，b はともに n − 1 以下の自然数で，$\dfrac{(b-a)(a+b+1)}{2}=2^k(2\ell+1)$ となり，a，b は同じ○に入ることがわかる。

ii）$\ell \leqq 2^k$ のとき，$b-a=2\ell+1$，$a+b+1=2\cdot 2^{k+1}$ とすると，$a=2^{k+1}-\ell+1$，$b=2^{k+1}+\ell$ となり，a，b はともに n−1 以下の自然数で $\dfrac{(b-a)(a+b+1)}{2}=2\cdot 2^k(2\ell+1)$ となり，a，b は同じ○に入ることがわかる。

よって，$n \neq 2^k$ のときは，題意を満たす n は存在しない。

①，②より，$n=2^k$（$k \geqq 2$，k は自然数）。

[出題の意図]

この問題は，n = 6，7，8 など比較的小さい数で具体的な操作を行うことで，試行錯誤しながら見通しを立てて考える力を問うことをねらいとして出題しました。また，自然数 a，b が同じ○に入る場合は題意を満たさないこと，あるいは，a，b が同じ○に入らない場合は題意を満たすことを論理的に説明する力も見ています。

[講評]

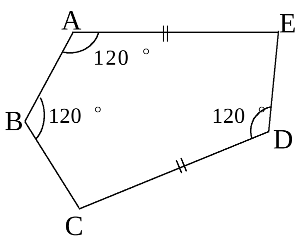
354 名中 312 名が選択し，完答は 0 名でした。$n=2^k$（$k \geqq 2$，k は自然数）と予想できた人はいたようですが，それを論理的にきちんと説明するのは難しかったようです。偶数や奇数などの数の性質を利用する方法はよく使われる手法です。

4　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

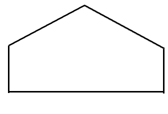
(1) 図Ⅰの凸五角形 ABCDE は，∠EAB = ∠ABC = ∠CDE = 120°，AE = CD である。
なお，凸五角形とは，5 つの内角の大きさが，どれも 180°を越えない五角形のことである。
この凸五角形 ABCDE を用いて，平面をすき間なく敷き詰めることができるか。
敷き詰めることができる場合は，敷き詰め方を示して理由を説明しなさい。敷き詰めることができない場合は，その理由を説明しなさい。

(2) 同じ形の凸五角形をいくつか用いて，正六角形の内部にすき間なく敷き詰めることを考える。
図Ⅱの凸五角形を 2 個用いると，図Ⅲのように正六角形の内部にすき間なく敷き詰めることができる。
このように，同じ形の凸五角形を 3 個以上なるべく多く用いて正六角形の内部にすき間なく敷き詰めることができるか。敷き詰めることができる場合は，敷き詰め方を示し，理由を説明しなさい。できない場合は，その理由を説明しなさい。

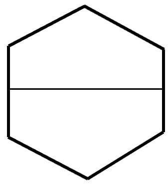
図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ



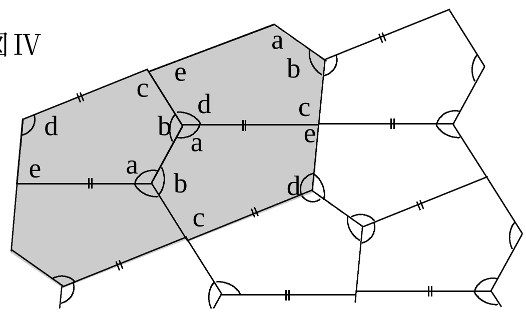
[解答]

(1) 図Ⅳのように敷き詰めることができる。

∠BAE = 120° = a，∠ABC = 120° = b，∠BCD = c，∠CDE = 120° = d，∠DEA = e とする。

頂点 A，B，D を重ねると a + b + d = 360° となり，この点の周りではすき間なく敷き詰

図Ⅳ



めることができる。また，AE ＝ CD だから，頂点 A，B，D を重ねると同時に頂点 C と E を重ねることもできる。c ＋ e ＝ 180 °だから，この点の周りでもすき間なく敷き詰めることができる。

したがって図Ⅳのように，図Ⅰの凸五角形を用いて，頂点A，B，Dが重なるように，かつ頂点 C と E が重なるように並べていくと，平面を敷き詰めることができる。

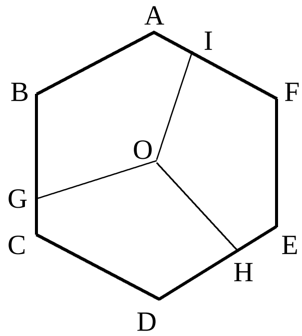
(色付きの部分は 4 つの凸五角形で敷き詰めた図形である。)

(2) 図Ⅴのように敷き詰めることができる。

図Ⅴにおいて，点 O は正六角形の外接円の中心である。また，点 G，H，I は，それぞれ辺 BC，DE，FA 上の点であり，BG ＝ DH ＝ FI である。

このとき，凸五角形 OIABG と凸五角形 OGCDH 及び凸五角形 OHEFI は合同であり，これらにより正六角形を敷き詰めることができる。

図Ⅴ



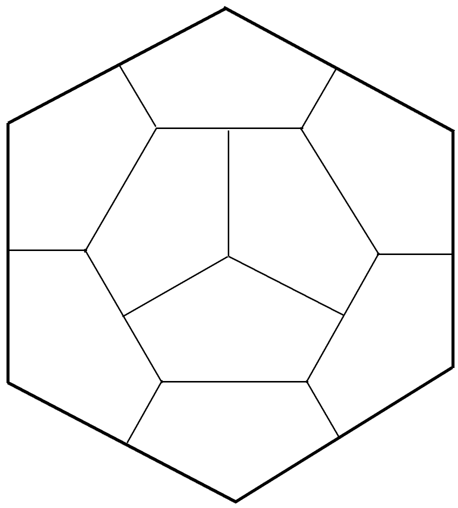
[出題の意図]

平面を敷き詰められる図形として，正三角形や正方形，正六角形などはよく知られていますが，凸五角形についても条件によっては平面をすき間なく敷き詰めることができます。この他にも，いろいろな条件で平面をすき間なく敷き詰めることができる凸五角形があることが知られています。図形に対する発想力を問うとともに，平面を敷き詰められる多角形について，新たな条件を見つけてみようと思うきっかけになればと思い，出題しました。

[講評]

354 名中 71 名が選択し，0 名が完答しました。凸五角形の図形を敷き詰めると，図形と図形の角が集まるところができます。この角の和が 360 °であればすき間なく図形を敷き詰めることができます。

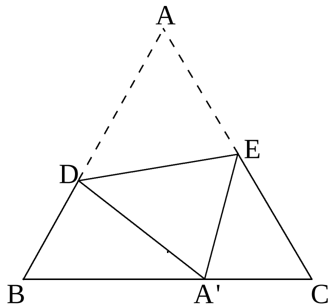
(2)では，4 名が次のような解答をしてくれました。(説明略)



5　1辺の長さが $2a$ の正三角形 ABC がある。

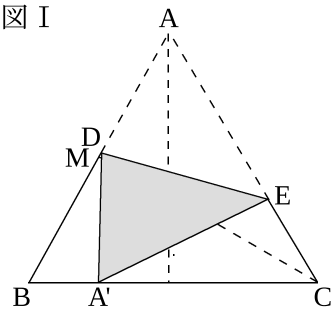
右の図のように，辺 BC 上に点 A'をとり，頂点 A が A' と重なるように折り返し，折り目を DE とする。ただし，D，E はそれぞれ辺 AB，AC 上の点とする。また，A'の位置は，辺 BC の両端を含むものとする。

このとき，三角形 A'DE の面積の最大値と最小値を求めなさい。また，そうなる理由もかくこと。



[解答例]

図Ⅰ



△A'DE の面積が最大となるのは，A'が B または C と一致するときで，最大値は $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ である。

[理由] 図Ⅰのように，辺 AB の中点を M とし，折り返した△A'DE の面積を考える。△A'DE は△ADE を折り返した三角形だから，△A'DE ≡△ADE。A'が辺 BC 上を動くとき，

(△A'DE の面積) = (△ADE の面積)

$= \frac{1}{2}$ (△A'DE の面積＋△ADE の面積)

$\leqq \frac{1}{2}$ (△A'BD の面積＋△A'DE の面積＋△ADE の面積＋△A'CE の面積)

$= \frac{1}{2}$ (△ABC の面積)

A'が B(または C)と一致したとき，(△A'BD の面積)＋(△A'CE の面積)＝ 0 となるから

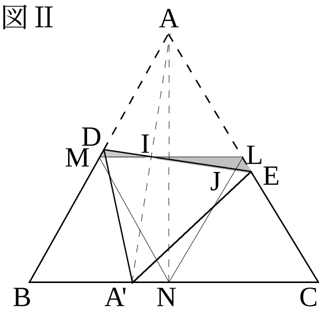
(△A'DE の面積) = (△BCM の面積) = $\frac{1}{2}$(△ABC の面積)

となり，最大値と等しくなる。

よって，△A'DE の面積の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ となる。

また，△A'DE の面積が最小となるのは，A'が辺 BC の中点と一致するときで，最小値は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ である。

図Ⅱ



[理由] 辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ M，N，L とする。

L，M，N は，それぞれの辺の中点だから，中点連結定理より ML ∥ BC …①，LN ∥ AB …②。

①より，AA'と ML との交点を I とすると AI ＝ A'I であり，かつ I は線分 DE 上の点であり，AA'⊥ DE。

図Ⅱのように，BA'＜ A'C のとき，つねに

(△A'DE の面積)＞(△LMN の面積)＝(△ALM の面積)

となることを示す。

BA'＜ A'C のとき，

(△A'DE の面積)－(△LMN の面積)

＝ (△ADE の面積)－(△ALM の面積)

＝ (△IEL の面積)－(△IDM の面積)…③

ここで，線分 DE と LN の交点を J とすると，

(△IEL の面積)－(△IDM の面積)

＞ (△IJL の面積)－(△IDM の面積)…④

②より，△IJL ∽△IDM となる。

BA'＜ A'C より，MI ＜ IL だから，

(△IJL の面積)＞(△IDM の面積)…⑤

③，④，⑤より，(△A'DE の面積)＞(△LMN の面積)

したがって，△A'DE の面積が最小となるのは，A'が辺 BC の中点と一致するときである。

[出題の意図]

正三角形を折って，重なった部分の面積の最大，最小を求めるという身近な問題に対して，図などを用いて論理的に説明する力を問う問題です。座標平面を利用して計算することも可能ですが，折り返すことから図形の対称性に気付き，それを利用した説明を工夫して欲しいと思います。

[講評]

354 名中 211 名が選択し，20 名が完答しました。最大・最小については予想しやすい問題ですが，そのことを論理的に説明するのに苦労したと思います。この問題は，論理的思考力や表現力を伸ばす良問だと考えます。解答例の他にもいろいろなアプローチの仕方を工夫してみると良いでしょう。

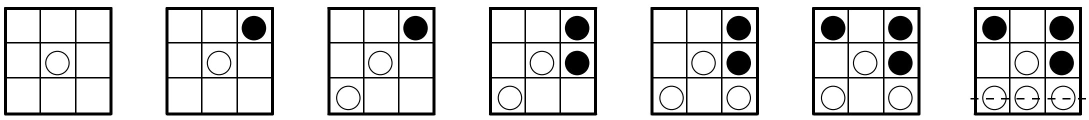
6　「三目並べ」のルールを次のように定める。

「三目並べ」のルール

3 × 3 のマスの中に，先手は○を，後手は●を交互に 1 個ずつ置いていく。
○または●を，縦，横，斜めのいずれかに，先に 3 個 1 列に並べた方を勝ちとする。

図Ⅰは，「三目並べ」の対戦の例であり，先手が勝ちとなっている。

図Ⅰ



①先手　②後手　③先手　④後手　⑤先手　⑥後手　⑦先手

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 次の条件Ⅰで「三目並べ」を行う。

条件Ⅰ

図Ⅱのアにおいて，辺 AB と DC がつながっている 3 × 3 のマスを用いて「三目並べ」を行う。

例えば，図Ⅱのアとイは同じ並べ方と考えられる。

条件Ⅰで「三目並べ」を行うとき，図Ⅱのアにおいて，先手(○)は，次の一手をどこに置くとよいか。次の一手を示し，その理由を説明しなさい。

(2) 次に，条件Ⅱで「三目並べ」を行う。

条件Ⅱ

図Ⅱのアにおいて，辺 AB と DC，辺 AD と BC がそれぞれつながっている 3 × 3 のマスを用いて「三目並べ」を行う。

例えば，図Ⅱのアとイとウは同じ並べ方と考えられる。

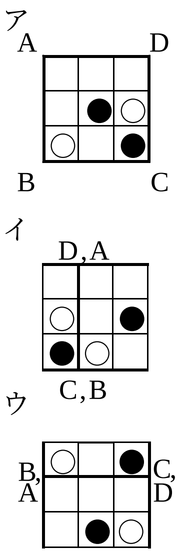
条件Ⅱで「三目並べ」を行うとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 図Ⅱのアと同じ並べ方は，ア，イ，ウ以外に 6 つある。それらをすべて示しなさい。

ただし，3 × 3 のマスを回転して同じ並べ方となるものは 1 つと考えるものとする。

② 先手(○)は，必ず勝つことができるか。できる場合は，その並べ方を示して理由を説明しなさい。できない場合は，その理由を説明しなさい。

図Ⅱ

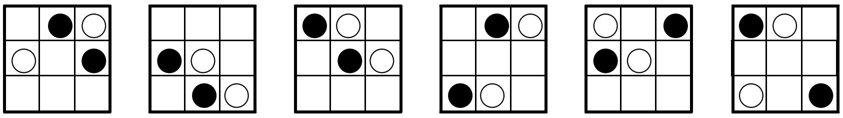


[解答例]

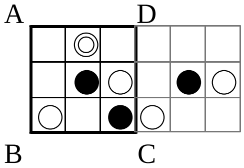
(1) 図Ⅲの◎の位置に置く。

[理由] 図Ⅲのように，辺 AB と辺 CD がつながっているため，図Ⅲの◎の位置に○を置くと，3 個の○が 1 列に並ぶことになるから。

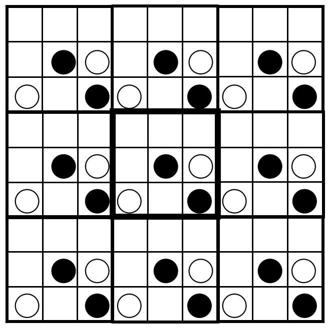
(2) ①　図Ⅳの太枠の正方形をずらすことによりアと同じ並べ方を表すと，以下の 6 つになる。



図Ⅲ



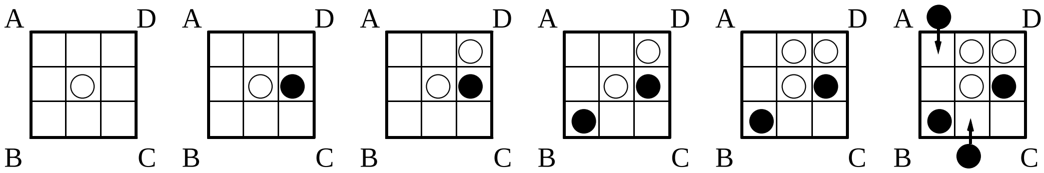
図Ⅳ



②　先手(○)は，必ず勝つことができる。
条件を満たす 3 × 3 のマスを考えると，先手は 1 通りしかないと考えられる。したがって，先手を中央に置く (例1─1)。このとき，後手の置き方は次の 2 通りある。

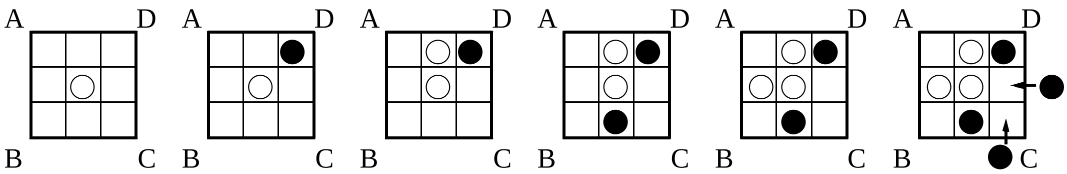
ｉ) 後手が先手の横に置く場合 (例1─2)
先手が後手の隣りに置けば (例1─3)，後手は先手の勝ちを防ぐ位置に置く (例1─4)。
先手は後手の勝ちを防ぐ位置に置くと (例1─5)，後手はどこに置いても先手の勝ちを防げない (例1─6)。
したがって，先手の勝ちとなる。

例1─1　例1─2　例1─3　例1─4　例1─5　例1─6



ⅱ) 後手が先手の斜め上または斜め下に置く場合 (例2─2)
先手が後手の隣りに置けば (例2─3)，後手は先手の勝ちを防ぐ位置に置く (例2─4)。
先手は後手の勝ちを防ぐ位置に置くと (例2─5)，後手はどこに置いても先手の勝ちを防げない (例2─6)。したがって，先手の勝ちとなる。

例2─1　例2─2　例2─3　例2─4　例2─5　例2─6



ｉ)，ⅱ) より，先手(○)は必ず勝つことができる。

[出題の意図]

「三目並べ」を題材にした問題です。「三目並べ」では，先手・後手ともに最善を尽くすと必ず引き分けになることが知られています。また，ルールの似ている「五目並べ」では，特別なルールを課さない場合，先手必勝であることも知られています。ここでは，「三目並べ」のルールに新たな条件を加えることにより，柔軟な発想や思考力を問うことをねらい，出題しました。平面をつなげて，より広い平面で事象をとらえるという発想は，多くの問題に応用できるアプローチのひとつです。

[講評]

354 名中 245 名が選択し，10 名が完答しました。(1)と(2)の ① は比較的正答が多かったようです。(1)は円筒形につなげて考えることもできます。ここでは 1 マスだけ先手が勝てる場所があります。(2) ①は，3 × 3 のマスを貼り合わせた平面を考え，3 × 3 のマスを上下左右にずらしてみるとよいでしょう。②は，はじめに置く場所は理論上どこに置いても同じです。後手から場合分けをして考えてみるとよいでしょう。