平成２０年度

群馬県高校生

数学コンテスト

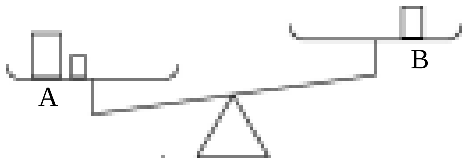
注　意　事　項

1　問題は，１ページから３ページです。解答用紙は６枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：00～16：00）。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。
6　トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

1　上皿天秤（てんびん）と分銅を使って，いろいろな重さの量り方を考える。ただし，次の条件に従うものとする。

≪条件≫

① 使用する分銅はすべて重さが異なる。
② 右の図のように，分銅はＡの皿にも，Ｂの皿にも載せることができ，使用できる分銅であれば，どちらの皿にも同時に複数載せて量ってもよい。



このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) 1g，3g，9g の 3 個の分銅で，何種類の重さを量ることができますか，答えなさい。また，その量り方を説明しなさい。

(2) 1g，3g，9g，27 g の 4 個の分銅で，何種類の重さを量ることができますか，答えなさい。また，その量り方を説明しなさい。ただし，(1)と重複する量り方についての説明は省略してかまわない。

(3) 1g，3g，3^2g，3^3g，… ，3^{n-1}g の n 個の分銅で，何種類の重さを量ることができますか，答えなさい。また，その量り方を説明しなさい。

ただし，$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ $(r \neq 1)$を用いてよい。

2　正 n 角形（n≧3）の各頂点に，それぞれ円を重ねたものを C_n と表すことにする。

図Ⅰは C_3 を表したものである。

C_n のそれぞれの円に，0 から n までの整数を1つずつ対応させる。ただし，異なる頂点に同じ数字を対応させないものとする。

図Ⅱは，C_3 のそれぞれの円に 0，1，3 の数字を 1 つずつ対応させた例である。

さらに，C_n において，各辺の両端の円に対応した数字の差の絶対値を「辺の値」と呼ぶことにする。

C_n において，「辺の値」が 1 から n までの整数がすべて現れるならば，この対応を C_n の「優雅な番号付け」と呼ぶことにする。

図Ⅲは，C_3 における「優雅な番号付け」の例である。

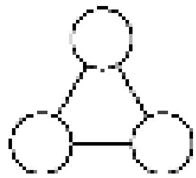
偶数の数字が対応している頂点を「偶点」，奇数の数字が対応している頂点を「奇点」，「辺の値」が偶数となる辺を「偶辺」，奇数となる辺を「奇辺」として，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) C_4，C_5，C_6，C_7 における「優雅な番号付け」をそれぞれ見つけなさい。

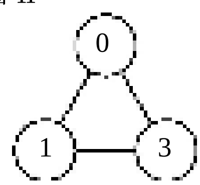
ただし，「優雅な番号付け」ができないこともある。できないときは「できない」と書きなさい。（理由は書かなくてよい。また，0 は既に対応させてある。）

(2) C_{26} は「優雅な番号付け」はできない。その理由を説明しなさい。

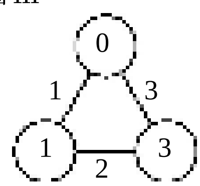
図Ⅰ　C_3



図Ⅱ

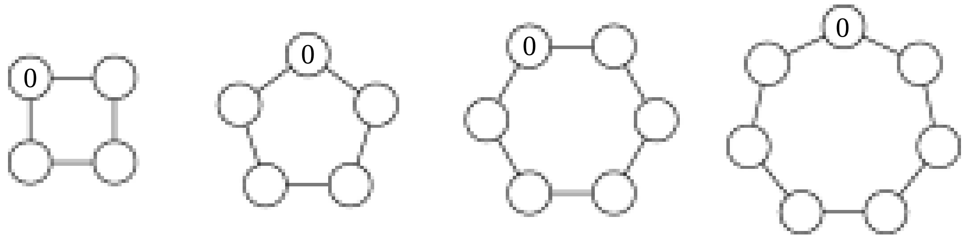


図Ⅲ



――＜解答用紙＞――――――――――――――――――――――――――――

(1)　C_4　C_5　C_6　C_7

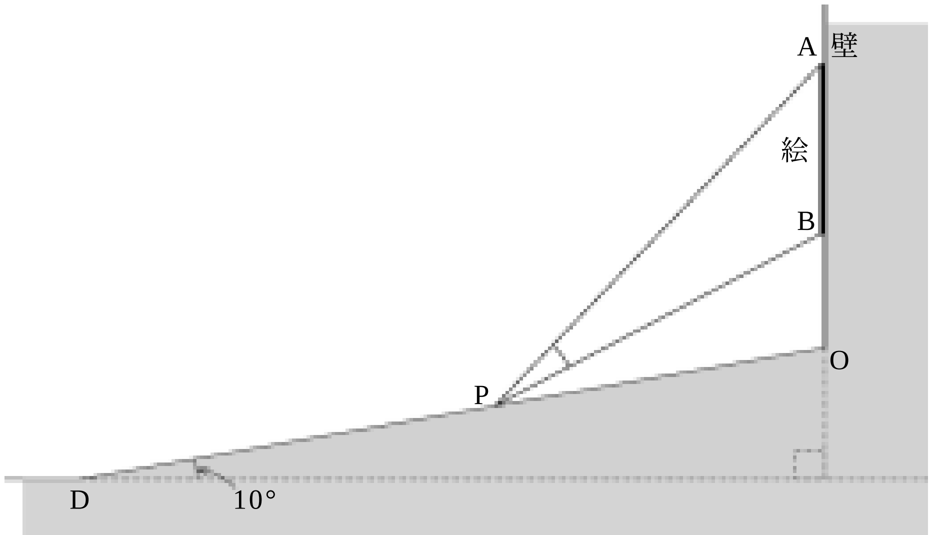


3　下の図は，垂直な壁に掛けた絵を真横から見た様子を模式的に表したもので，AB は絵の高さを表し，AB ＝ 3 m である。

また，点 O は線分 AB の延長上の点で，OB ＝ 2 m である。このとき，線分 AB を含む壁と垂直な平面上の点 D から O を見上げる角は 10 °であった。

線分 OD 上の点 P から絵を見上げるとき，∠APB が最大となるときの OP の長さを求めなさい。

ただし，絵の厚みは考えないものとする。また，線分 OD は十分に長いものとする。



4　図Ⅰの道具は，OA ＝ OB ＝ 5cm，AP ＝ PB ＝ BQ ＝ QA ＝ 3cm の 6 本のまっすぐな棒が，5 つの点 O，A，B，P，Q でそれぞれビスでつながっていて，棒と棒の角度はそれぞれ変えられるようになっている。

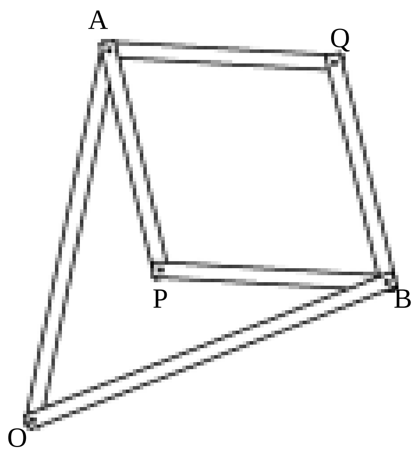
5 つの点 O，A，B，P，Q は常に同一平面上にあるものとする。また，棒の厚みは考えないものとして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) OP･OQ が一定であることを示しなさい。

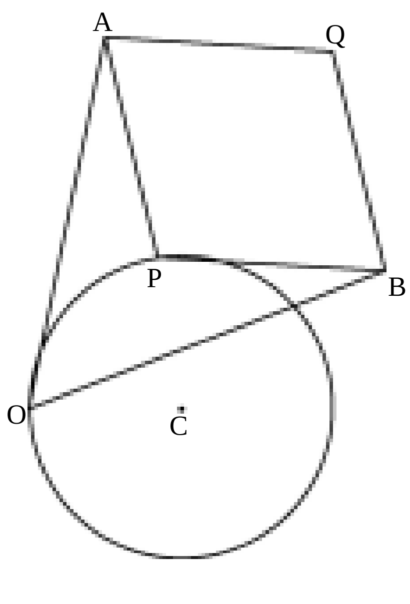
(2) 図Ⅱは，点 C を中心とする半径 2 cm の円周上に，図Ⅰの道具の O と P を置いたものを模式的に表したものである。

O を固定し，P を円 C の周上で動かすとき，Q はどのような図形を描くか図示し，なぜそのような図形を描くか，その理由を説明しなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ

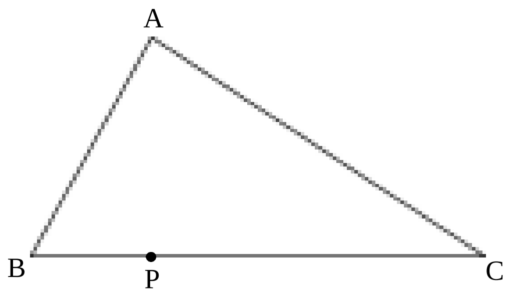


5　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

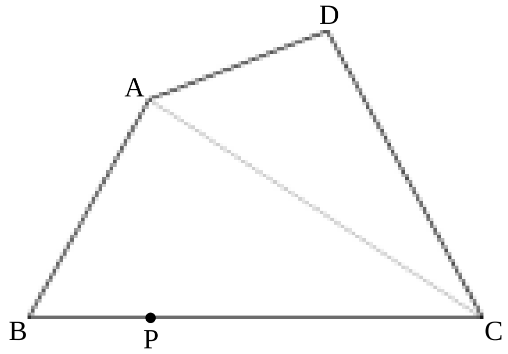
(1) 図Ⅰの三角形 ABC において，辺 BC 上の点 P を通り，三角形 ABC の面積を二等分する直線を作図しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。
　また，その直線が三角形 ABC の面積を二等分することを説明しなさい。

(2) 図Ⅱの四角形 ABCD において，辺 BC 上の点 P を通り，四角形 ABCD の面積を二等分する直線を作図しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。
　また，その直線が四角形 ABCD の面積を二等分することを説明しなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



6　0 以上の整数 n に対し，f(n)を次のように定める。

≪ f(n)≫

$f(0)=0$

$n \geqq 1$ のとき，n が偶数ならば $f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)$

n が奇数ならば $f(n)=f(n-1)+1$

また，0 以上の整数 n の二進表示を次のように定める。

≪ n の二進表示≫

$n = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + a_{m-2} \cdot 2^{m-2} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$（$a_m = 1$, $a_i = 0$ または 1（$i=0,1,2,\cdots,m-1$））

と表し，簡単に

$n = (a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_2$

と表すことにする。

特に，n = 0，1 のときは，それぞれ $0=(0)_2$，$1=(1)_2$ と表すことにする。

これを n の二進表示という。

例えば，$11 = 1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1$ と表せるので，$11=(1011)_2$ と表す。

また，$16 = 1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0 = (10000)_2$ である。

このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) f(30)，f(31)，f(32)をそれぞれ求めなさい。

(2) 30，31，32 をそれぞれ二進表示しなさい。

(3) f(n)の値と, n を二進表示したときの各桁の数にはどんな関係があるか答えなさい。
　また，その理由を説明しなさい。