平成２０年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ．概　要

今年度の数学コンテストは７月２５日（金）に実施され、参加者は２９４名（１６校）であった。平成１０年度から始められた数学コンテストは、今年度で１１回目の開催となった。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞９名、奨励賞２４名、アイデア賞１０名（昨年は最優秀賞２名、優秀賞１２名、奨励賞１３名、アイデア賞７名）計４４名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川女子高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓の使用も認めている。

参加生徒は３時間集中して取り組んでいた。今回は比較的図形の問題が多かった。取り組みやすい問題もあったが、論証力や発想力を問うものが多く、苦戦した問題もあったようである。しかし、ほとんどの生徒があきらめることなく最後まで取り組んでいた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも発想のユニークなものも見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、今後、数学のみならずいろいろな教科を学習していくうえでよい経験になったと思われる。この群馬県高校生数学コンテストが生徒にとって数学を楽しむ機会として更に充実していければ幸いである。

○　参加生徒の内訳

学　科	普　通　科		文理総合　科	理数科	英語科	計	
学年(中等)	男	女	男	男	女	男	女
１年(４年)	９２	２０		2		９４	２０
２年(５年)	９７	５１	5		1	１０２	５２
３年	２２	４				２２	４
計	２１１	７５	5	2	1	２１８	７６

合 計　２９４名

※次のページ以降に平成２０年度数学コンテストの問題と解答・解説があります。
下記は問題表紙の注意事項です（参考まで）。

注　　意　　事　　項

1　問題は，１ページ～３ページです。解答用紙は6枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。

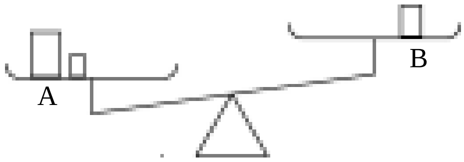
Ⅱ．問題及び解答例

1　上皿天秤と分銅を使って，いろいろな重さの量り方を考える。ただし，次の条件に従うものとする。

≪条件≫

① 使用する分銅はすべて重さが異なる。

② 右の図のように，分銅はAの皿にも，Bの皿にも載せることができ，使用できる分銅であれば，どちらの皿にも同時に複数載せて量ってもよい。



このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) 1g，3g，9gの3個の分銅で，何種類の重さを量ることができますか，答えなさい。また，その量り方を説明しなさい。

(2) 1g，3g，9g，27gの4個の分銅で，何種類の重さを量ることができますか，答えなさい。また，その量り方を説明しなさい。ただし，(1)と重複する量り方についての説明は省略してかまわない。

(3) 1g，3g，3^2g，3^3g，…，3^{n-1}gのn個の分銅で，何種類の重さを量ることができますか，答えなさい。また，その量り方を説明しなさい。

ただし，$1+r+r^2+r^3+\cdot\cdot\cdot+r^{n-1}=\dfrac{r^n-1}{r-1}$　$(r\neq 1)$を用いてよい。

[解答例]

(1) Bの皿に量りたいものを載せる。Aの皿に載せる分銅の重さから，Bの皿に載せる分銅の重さを引いた値が，量りたいものの重さと等しくなる。したがって，1g，3g，9gの3個の分銅を使うと，1g，$3-1=2$g，3g，$3+1=4$g，$9-3-1=5$g，$9-3=6$g，$9-3+1=7$g，$9-1=8$g，9g，$9+1=10$g，$9+3-1=11$g，$9+3=12$g，$9+3+1=13$gを量ることができる。したがって，全部で13種類の重さを量ることができ，これ以外は量ることはできない。

(2) (1)より，1g，3g，9gの3個の分銅で1gから13gまで1g刻みで量ることができる。

Aの皿に27gの分銅を載せ，Bの皿に量りたいものを載せる。

27gは量ることができる。

さらに，(1)で分銅を載せた方法と逆の載せ方で分銅を載せると，$27-1=26$gから$27-13=14$gまで1g刻みで量ることができる。

また，(1)で分銅を載せた方法で分銅を載せると，$27+1=28$gから$27+13=40$gまで1g刻みで量ることができる。

以上のことから，1g，3g，9g，27gの4個の分銅で，1gから40gまで1g刻みで量ることができる。したがって，40種類の重さを量ることができ，これ以外は量ることはできない。

(3) 1g，3g，3^2g，3^3g，…，3^{n-2}gの(n-1)個の分銅で，1gから$1+3+3^2+\cdots+3^{n-2}=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$gまで1g刻みで量ることができたとする。このときの分銅の載せ方を※とする。

Aの皿に3^{n-1}gの分銅を載せ，Bの皿に量りたいものを載せる。

3^{n-1}gは量ることができる。

さらに，※の方法と逆の載せ方で分銅を載せると，$3^{n-1}-\dfrac{3^{n-1}-1}{2}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$gから$(3^{n-1}-1)$gまで1g刻で量ることができる。

また，※の方法で分銅を載せると，$(3^{n-1}-1)$gから$3^{n-1}+\dfrac{3^{n-1}-1}{2}=\dfrac{3^n-1}{2}$gまで1g刻みで量ることができる。

以上のことと(2)の考え方から，1g，3g，3^2g，3^3g，…，3^{n-1}gのn個の分銅で，1gから$\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$gまで1g刻みで量ることができる。したがって，$\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$種類の重さを量ることがができ，これ以外は量ることはできない。

[出題の意図]

　1g，3g，3^2g，3^3g，…，3^{n-1}g の n 個の分銅を用いて 1g から $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$g まで 1g 刻みで量ることができることが知られています。

　このことを証明してもらう問題ですが，単なる数字の羅列だけで終わるのではなく，試行錯誤の中で規則性を見つけ系統的な考え方ができるか，さらには系統的な考え方を拡張して一般化できるかを問う問題です。

[講評]

　270 名(294 名中)が選択し，12 名が完答しました。(1)や(2)では，地道にひとつひとつ確認して正解を見つけられた人も多かったようです。(1)や(2)を考える際に重要なことは，規則性を見つけながら試行錯誤する視点です。また，(3)のように系統的な考え方をさらに拡張して一般化する考え方は，数学ではよく用いられる手法のひとつです。

2　正 n 角形（n≧3）の各頂点に，それぞれ円を重ねたものを C_n と表すことにする。

　図Ⅰは C_3 を表したものである。

　C_n のそれぞれの円に，0 から n までの整数を1つずつ対応させる。ただし，異なる頂点に同じ数字を対応させないものとする。

　図Ⅱは，C_3 のそれぞれの円に 0，1，3 の数字を 1 つずつ対応させた例である。

　さらに，C_n において，各辺の両端の円に対応した数字の差の絶対値を「辺の値」と呼ぶことにする。

　C_n において，「辺の値」が 1 から n までの整数がすべて現れるならば，この対応を C_n の「優雅な番号付け」と呼ぶことにする。

　図Ⅲは，C_3 における「優雅な番号付け」の例である。

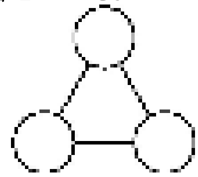
　偶数の数字が対応している頂点を「偶点」，奇数の数字が対応している頂点を「奇点」，「辺の値」が偶数となる辺を「偶辺」，奇数となる辺を「奇辺」として，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) C_4，C_5，C_6，C_7 における「優雅な番号付け」をそれぞれ見つけなさい。

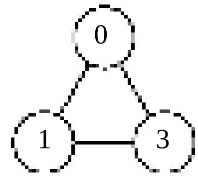
　ただし，「優雅な番号付け」ができないこともある。できないときは「できない」と書きなさい。(理由は書かなくてよい。また，0 は既に対応させてある。)

(2) C_{26} は「優雅な番号付け」はできない。その理由を説明しなさい。

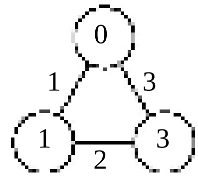
図Ⅰ　C_3



図Ⅱ

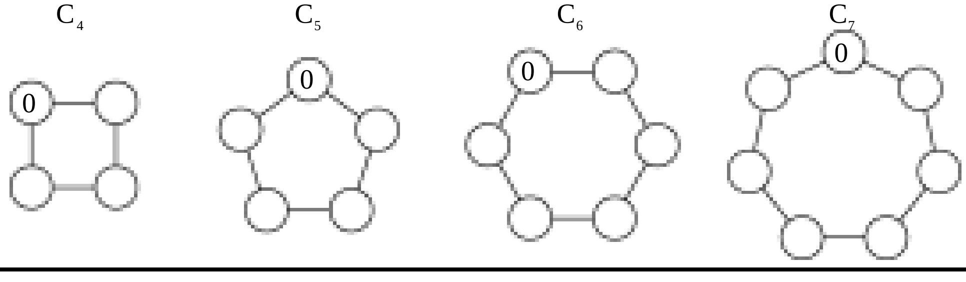


図Ⅲ



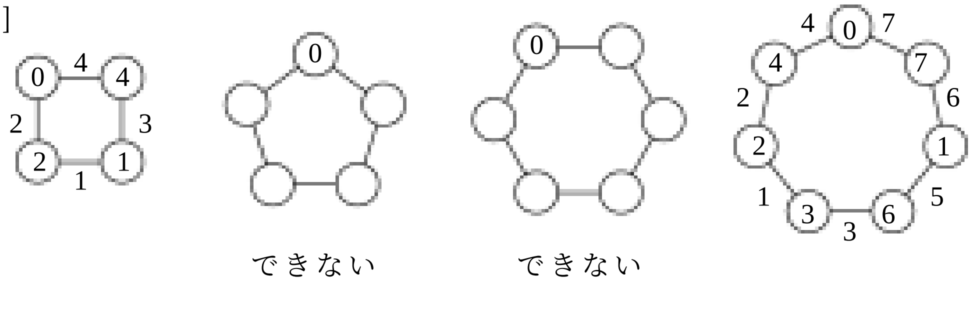
―― ＜解答用紙＞ ――

(1)　C_4　C_5　C_6　C_7



[解答例]

(1) [例]



できない　　できない

（2）C_{26} に「優雅な番号付け」ができたと仮定すると，辺の値は 1 から 26 までの整数がすべて現れる。

この 26 個の辺のうち，13 個が奇辺で 13 個が偶辺となる。

いま，ある偶点 A から C_{26} を一周することを考える。13 個の奇辺により，偶点 A は,

偶点 A → (奇辺)→奇点→ (奇辺)→偶点→ (奇辺)→奇点→・・・→偶点→ (奇辺)→奇点となり,

1 個　2 個　3 個　13 個

偶点 A は奇点に移る。この間，13 個の偶辺はどこに入っても，偶点，奇点を変化させないので，偶点 A から出発し C_{26} を一周すると奇点に移ることになる。このことは，偶点 A から出発して偶点 A に戻ることに矛盾する。

同様に，A が奇点の場合も，奇点 A から出発し C_{26} を一周すると偶点に移ることになり矛盾する。

したがって，C_{26} は優雅な番号付けはできない。

[出題の意図]

グラフ理論の一分野である「優美なグラフ」を題材にした問題です。見慣れない約束に戸惑う人もいるかと思いすが, 約束さえつかめれば具体的な例で試しながら法則性を見つけていけばよいので, 比較的取り組みやすい問題となっていると思います。答えを探る楽しさと,「できない」理由を論理的に説明する難しさの両面を感じ取って欲しいと考えています。

[講評]

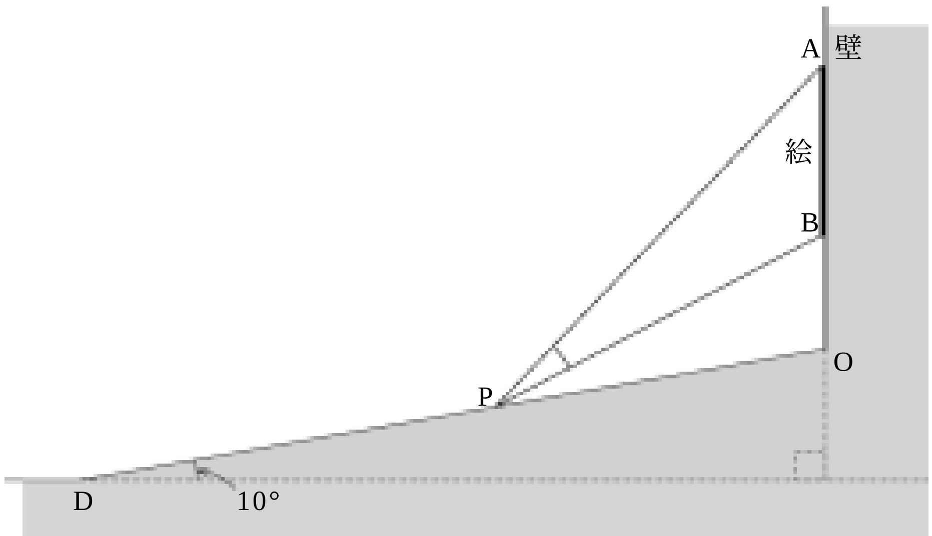
256 名 (294 名中)が選択し，2 名が完答しました。(1)で C_5 や C_6 が「できない」ことを見つけられた人が 20 名程度いました。(2)では，辺の値の和が，1 ＋ 2 ＋ … ＋ 26 ＝ 351 となることを利用して理由を説明している例も見られました。この問題では,「優雅な番号付けができる」条件として，奇辺が偶数個あることが見つかるかがポイントとなるでしょう。

3　下の図は，垂直な壁に掛けた絵を真横から見た様子を模式的に表したもので，AB は絵の高さを表し，AB ＝ 3 m である。

また，点 O は線分 AB の延長上の点で，OB ＝ 2 m である。このとき，線分 AB を含む壁と垂直な平面上の点 D から O を見上げる角は 10 ℃であった。

線分 OD 上の点 P から絵を見上げるとき，∠APB が最大となるときの OP の長さを求めなさい。

ただし，絵の厚みは考えないものとする。また，線分 OD は十分に長いものとする。



[解答例]

(1) 図Ⅰのように，3点A, B, Pを通る円を考え，円の中心をC，半径をrとする。

∠APBは円の円周角だから，∠APBが最大となるとき，中心角∠ACBも最大となる。

また，Cは線分ABの垂直二等分線上の点であり，三角形ABCはAC＝BCの二等辺三角形だから，∠ACBが最大となるとき，rが最小となる。

PがOD上にあり，rが最小となるのは，図Ⅱのように，円がODと接するときである。

図Ⅱにおいて，ABの中点をDとすると，$AD = \frac{3}{2}$であるから，

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{r^2 - \frac{9}{4}}$$

また，三角形OCDにおいて，

$$OD = \frac{7}{2}$$

であるから，

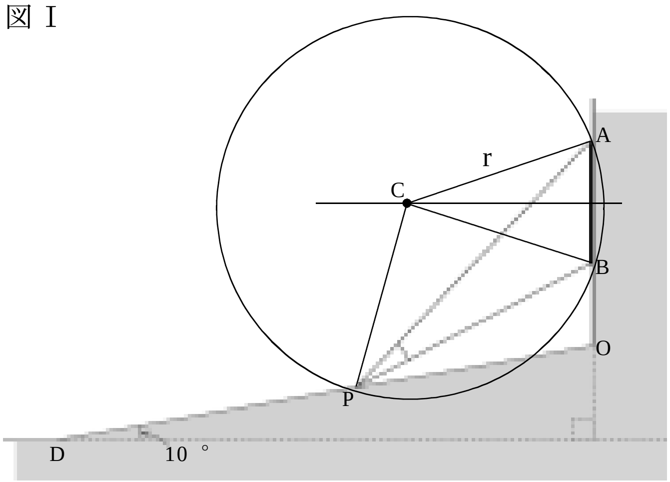
$$OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{r^2 + 10}$$

さらに，三角形OCPにおいて，

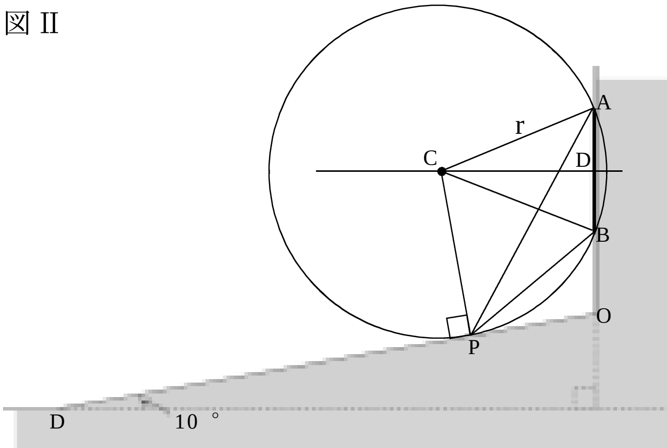
$$OP = \sqrt{OC^2 - CP^2} = \sqrt{(r^2 + 10) - r^2}$$

$$= 10(\mathrm{m})$$

図Ⅰ



図Ⅱ



[出題の意図]

日常生活に関連した図形の問題です。対象物を見込む角については，三角関数の加法定理を利用する方法もありますが，この問題のように円や円周角の性質をうまく利用して解くこともできます。日常生活のいろいろな場面で数学が活用されていることを身近に感じ，数学を積極的に活用する態度を身に付けることが重要です。

[講評]

111名(294名中)が選択し，4名が完答しました。答案の中には，三角関数の加法定理を利用したものや，方べきの定理を用いてOPの長さを求めたものもありました。また，A，B，Pを通る円を考えれば，斜面の斜度は何度であってもよいことが分かると思います。

4　図Ⅰの道具は，OA＝OB＝5cm，AP＝PB＝BQ＝QA＝3cmの6本のまっすぐな棒が，5つの点O，A，B，P，Qでそれぞれビスでつながっていて，棒と棒の角度はそれぞれ変えられるようになっている。

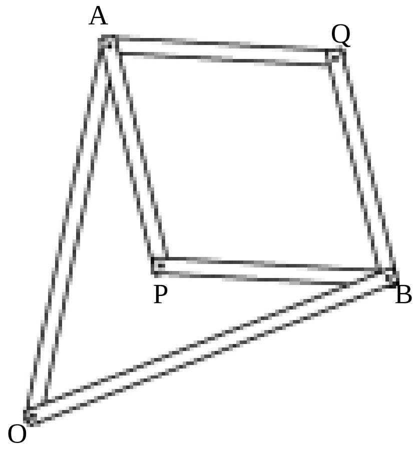
5つの点O，A，B，P，Qは常に同一平面上にあるものとする。また，棒の厚みは考えないものとして，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) OP･OQが一定であることを示しなさい。

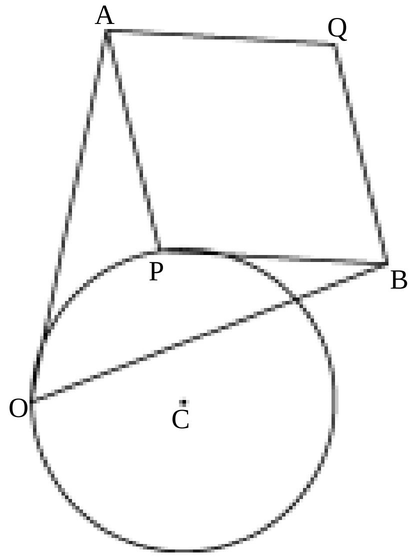
(2) 図Ⅱは，点Cを中心とする半径2cmの円周上に，図Ⅰの道具のOとPを置いたものを模式的に表したものである。

Oを固定し，Pを円Cの周上で動かすとき，Qはどのような図形を描くか図示し，なぜそのような図形を描くか，その理由を説明しなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



[解答例]

(1) 四角形 APBQ はひし形であるから，対角線 AB と PQ の交点を R とすると，R は PQ の中点となる。また，三角形 OAB，三角形 PAB，三角形 QAB はそれぞれ AB を底辺とする二等辺三角形だから，3 点 O，P，Q 及び R は線分 AB の垂直二等分線上の点となる。

ここで，$OP = x$，$OQ = y$ とすると，$OR = \dfrac{x+y}{2}$，$PR = OR - OP = \dfrac{y-x}{2}$ となる。

三角形 OAR において，$AR^2 = OA^2 - OR^2 = 5^2 - \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$

三角形 APR において，$AR^2 = AP^2 - PR^2 = 3^2 - \left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2$

だから，$25 - \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = 9 - \left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2$。これを整理すると，$xy = 16$ すなわち，$OP \cdot OQ = 16$

(2) 図Ⅲのように，直線 OC と円との交点のうち，O とは異なる点を D とする。

△ODP と△OQD において，$\angle DOP = \angle QOD$ …①

(1)より $OP \cdot OQ = 16$，また，$OD^2 = 4^2 = 16$ より

$OP \cdot OQ = OD^2$ すなわち，$\dfrac{OP}{OD} = \dfrac{OD}{OQ}$ だから，

$OP : OD = OD : OQ$ …②

①，②より，2 辺の比とそのはさむ角が等しいから，△ODP ∽△OQD となる。

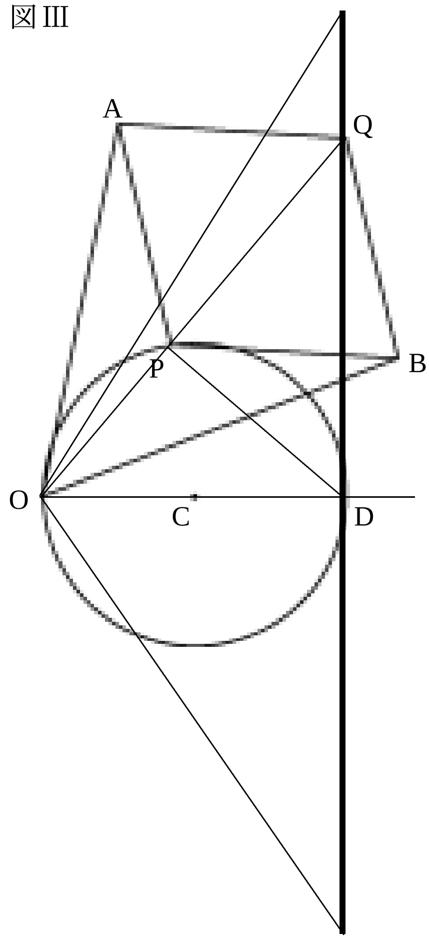
OD は直径だから，$\angle OPD = 90°$ であり，対応する辺は等しいので，$\angle ODQ = 90°$ となる。

したがって，Q は D を通り OD に垂直な直線上の点である。

ただし，OP の長さは，$5 - 3 \leqq OP \leqq \sqrt{5^2 - 3^2}$ だから $2 \leqq OP \leqq 4$ となる。$OP = 4$ のとき，P 及び Q は点 D と重なり，$OP = 2$ のとき，三角形 OCP は正三角形となり，$\angle POD = 60°$ だから $DQ = 4\sqrt{3}$。

したがって，Q は D を通り OD に垂直な直線上の点であり，$DQ \leqq 4\sqrt{3}$ の範囲である。

図Ⅲ



[出題の意図]

ポースリエの機構を題材にした問題です。ポースリエの機構は，円運動を直線運動に変換する機械の一つです。直線を描くには定規を使えばよいのですが，定規自体を作るためにはもとの直線がなければならず，定規で直線が描けるという保証はありません。そこで，「コンパスで円が描ける」ように，「直線を描く装置」として考えられたものです。

証明の方法は三角形の相似を利用することで簡単にできますが，座標平面上で考えても分かりやすいと思います。

[講評]

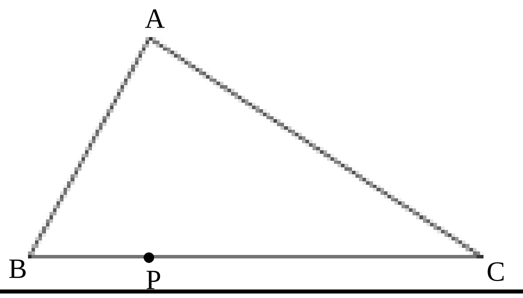
111 名(294 名中)が選択し，3 名が完答しました。(1)は，三角形の相似を利用することに気づき，証明できた人も多かったようです。この証明は，A を中心として半径 3cm の円を考え，方べきの定理を利用して求めることもできます。(2)は，座標平面上で考えて，軌跡の問題としてとらえることも可能です。

5　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

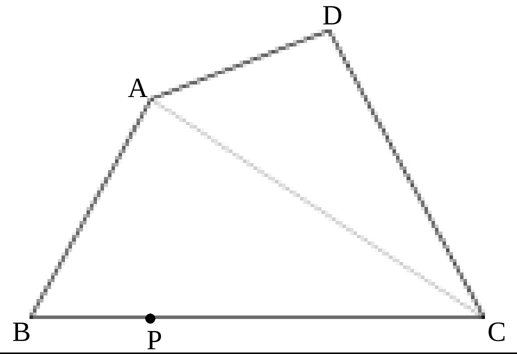
(1) 図Ⅰの三角形 ABC において，辺 BC 上の点 P を通り，三角形 ABC の面積を二等分する直線を作図しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。
　また，その直線が三角形 ABC の面積を二等分することを説明しなさい。

(2) 図Ⅱの四角形 ABCD において，辺 BC 上の点 P を通り，四角形 ABCD の面積を二等分する直線を作図しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。
　また，その直線が四角形 ABCD の面積を二等分することを説明しなさい。

図Ⅰ



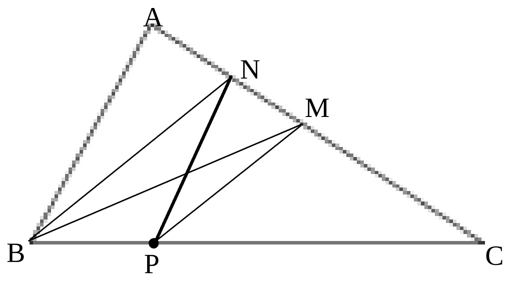
図Ⅱ



[解答例]

(1) 辺 AC の中点を M とし, 線分 BM を引く。次に, B を通り MP に平行な直線を引き，AC との交点を N とすると，PN が三角形 ABC の面積を二等分する。

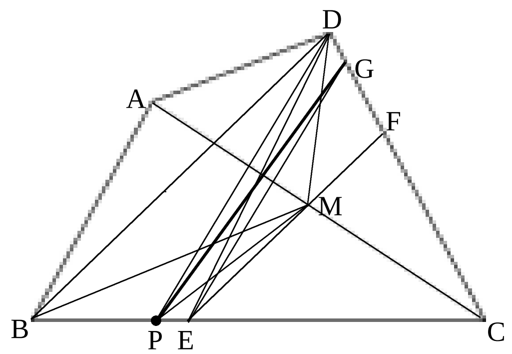
[理由］M は AC の中点だから，△ABM ＝△CBM であり，△ABM ＝△ ABN ＋△ NBM より△ ABN ＋△ NBM ＝△CBM …①となる。ここで，BN ∥ PM だから，△MBN ＝△PBN …②。①, ②より, △ ABN ＋△ PBN ＝△CBM すなわち, 四角形 ABPN ＝△CBM となる。



(2) 対角線 AC を引き，中点を M とする。M を通り, BD に平行な直線と BC，CD との交点をそれぞれ E，F とする。

E を通り，線分 DP に平行な直線と CD との交点を G とすると，PG が四角形 ABCD の面積を二等分する。

[理由](1)と同様に，M が AC の中点だから，四角形 ABMD ＝四角形 BCDM …①。



四角形 ABMD ＝△ABD ＋△BDM …②及び四角形 BCDM ＝△BEM ＋四角形 ECDM …③
①, ②, ③より，△ ABD ＋△ BDM ＝△BEM ＋四角形 ECDM …④。ここで BD ∥ EF だから，△ BDM ＝△ BDE …⑤及び△ BEM ＝△ DEM …⑥。④, ⑤, ⑥より, △ABD＋△ BDP ＝△ DEM ＋四角形 ECDM。すなわち，四角形 ABED ＝△ CDE …⑦。

同様にして, PD ∥ EG だから, △PDG =△PDE …⑧。⑦, ⑧より, 五角形 ABPGD ＝△ PCG。よって，線分 PG は四角形 ABCD を二等分する。

[出題の意図]

面積を二等分する直線の作図問題です。簡単な例は中学校でもよく取り扱われる内容ですが，これはその発展です。図形の等積変形をどう利用するかを問うもので，補助線の引き方など図形における総合力を必要とする問題です。

[講評]

165 名 (294 名中)が選択し，20 名が完答しました。比較的なじみのある問題であったためか，正答が多数見られました。(2)では，(1)の考え方を 2 回使う方法や，四角形 ABCD をまず三角形に等積変形してから(1)を利用した答案も見られました。

6　0 以上の整数 n に対し，f(n)を次のように定める。

≪ f(n)≫

$f(0)=0$

$n \geqq 1$ のとき，n が偶数ならば $f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)$

n が奇数ならば $f(n)=f(n-1)+1$

また，0 以上の整数 n の二進表示を次のように定める。

≪ n の二進表示≫

$n = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + a_{m-2} \cdot 2^{m-2} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$ ($a_m = 1$, $a_i = 0$ または 1 ($i=0,1,2,\cdots,m-1$))

と表し，簡単に

$n = (a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_2$

と表すことにする。

特に，n ＝ 0，1 のときは，それぞれ $0=(0)_2$，$1=(1)_2$ と表すことにする。

これを n の二進表示という。

例えば，$11=1 \cdot 2^3+0 \cdot 2^2+1 \cdot 2^1+1$ と表せるので，$11=(1011)_2$ と表す。

また，$16=1 \cdot 2^4+0 \cdot 2^3+0 \cdot 2^2+0 \cdot 2^1+0=(10000)_2$ である。

このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) f(30)，f(31)，f(32)をそれぞれ求めなさい。

(2) 30，31，32 をそれぞれ二進表示しなさい。

(3) f(n)の値と, n を二進表示したときの各桁の数にはどんな関係があるか答えなさい。また，その理由を説明しなさい。

[解答例]

(1) $f(30)=f(15)=f(14)+1=f(7)+1=f(6)+2=f(3)+2=f(2)+3=f(1)+3=f(0)+4=4$

$f(31)=f(30)+1=5$

$f(32)=f(16)=f(8)=f(4)=f(2)=f(1)=f(0)+1=1$

(2) $30 =1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 = (11110)_2$

$31 =1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = (11111)_2$

$32 =1 \cdot 2^5 = (100000)_2$

(3) f(n)は n を二進表示したとき各桁の数の和を表している。つまり、n を二進表示したときの 1の個数を表している。

[説明] f(0)＝ 0

n ≧ 1 のとき，n が偶数ならば $f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)+0$

n が奇数ならば $f(n)=f(n-1)+1$

したがって，n が偶数のとき $a_0=0$ であり，n が奇数のとき $a_0=1$ となる。

ここで，$(a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_2$ を考えると,

$$\begin{aligned}(a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_2 &= a_m \cdot 2^m + a_{m-1}\cdot 2^{m-1} + a_{m-2}\cdot 2^{m-2} + \cdots + a_1\cdot 2^1 + a_0 \\ &= 2(a_m\cdot 2^{m-1} + a_{m-1}\cdot 2^{m-2} + a_{m-2}\cdot 2^{m-3} + \cdots + a_1\cdot 2^0) + a_0 \\ &= 2(a_m a_{m-1} \cdots a_1)_2 + a_0\end{aligned}$$

よって，$f((a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_2) = f(2(a_m a_{m-1} \cdots a_1)_2 + a_0)$

$= f((a_m a_{m-1} \cdots a_1)_2) + a_0$

同様にして，$= f((a_m a_{m-1} \cdots a_2)_2) + a_1 + a_0$

$\vdots$

$= f((a_m)_2) + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0$

ここで、$a_m=1$ 、$f(0)=0$ だから，$f((a_m)_2)=f(1)=f(0)+1=1=a_m$

よって、$f((a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0)_2) = a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0$

となる。

[出題の意図]

二進法についての問題です。具体的な計算を通して f(n)の正体をつかむ問題であり，f(n)に潜む規則性を発見する考察力と，証明に必要な表現力や論証力を問うものです。なお，二進法は，0 と 1 だけを用いて数を表すための規則であり，コンピュータの世界で使われる基本的な「言葉」となっています。

[講評]

210 名(294 名中)が選択し，6 名が完答しました。(1)，(2)では，f(n)の条件をもとに丁寧に考察すれば，規則性は比較的容易につかめると思います。それに対し，(3)では，(1)，(2)で見つけた規則性をきちんと説明することは容易なものではありません。ふだんから自分の考えをまとめて表現する力を養っておきたいものです。