平成１９年度

群馬県高校生

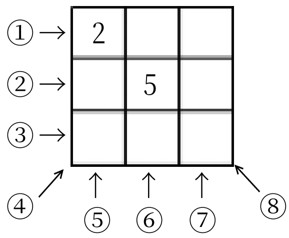
数学コンテスト

注　意　事　項

1　問題は，１ページと２ページです。解答用紙は**4**枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：00～16：00)。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。
6　トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

1　3 × 3 のマス目に，次の条件を満たすように 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ書き込んでマス目をうめるとき，下の(1)，(2)の問いに答えなさい。

> 条件
> 「縦横斜め」 8 方向の和はすべて等しい。



(1) 条件を満たすように，右の図の 3×3 のマス目の空欄に，1, 3, 4, 6, 7, 8, 9 の自然数を 1 つずつ書き込んでマス目をうめなさい。

(2) 条件を満たす自然数のうめ方は，(1) のうめ方以外にないことを説明しなさい。ただし，マス目を回転したり，対称移動して重なるものは同じものとする。

2　自然数 a に対し，a を除く正の約数の総和が a と等しくなる数を完全数という。例えば，6 ＝1＋2＋3 …①となり，6 は完全数である。

また，①の両辺を6で割ると $\dfrac{3+2+1}{6}=1$ すなわち，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=1$が成り立つ。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) xが完全数であるとき，次の等式を満たす自然数 a_1，a_2と完全数 x を求めなさい。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{x}=1$$

ただし，2，a_1，7，a_2 は x の約数であり，$2<a_1<7<a_2<x$ とする。

(2) yが完全数であるとき，次の等式を満たす自然数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6と完全数 y を求めなさい。また，その過程を書きなさい。

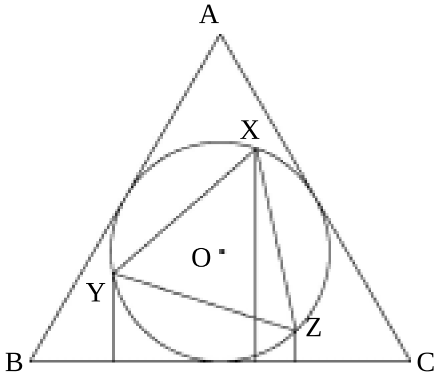
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{31}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{y}=1$$

ただし, 2, a_1, a_2, a_3, 31, a_4, a_5, a_6 は y の約数であり，$2<a_1<a_2<a_3<31<a_4<a_5<a_6<y$ とする。

3　右の図のように，半径 1 の円 O に，正三角形 ABC が外接し，正三角形 XYZ が内接している。3 点 X, Y, Z から辺 BC に下ろした垂線の長さをそれぞれ x, y, z とするとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 正三角形XYZ が，円O に内接しながら回転するとき，$x+y+z$ は一定であることを示しなさい。

(2) 正三角形XYZ の代わりに, 正54角形が円 O に内接しながら回転するとき，54 個の各頂点から辺 BC に下ろした垂線の長さの和は一定であることを示しなさい。



4　図１のような長方形の帯 ABCD がある。

図２は，この帯の AB を固定し，CD を180 °回転させたものであり，これを「１回ひねられた帯」と呼ぶことにする。

図３は，CD をさらに180 °回転させたものであり，これを「２回ひねられた帯」と呼ぶことにする。

次の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1) 図４のように帯を丸めた状態から，AB と CD をどちらもひねらずに矢印の方向へ引っ張ると，何回ひねられた帯になるか，書きなさい。

(2) 図５は，AB，CD をそれぞれ３等分する点 E，F 及び G, H に対し，E と H，F と G を破線で結んだもものである。

図６は，図５の帯の「１回ひねられた帯」である。A と C，B と D をつないで輪をつくり，EH，FG に沿って輪を切ると，いくつかの輪ができる。何回ひねられた輪がいくつできるか，書きなさい。また，その理由を説明しなさい。

図１


図２


「１回ひねられた帯」

図３


「２回ひねられた帯」

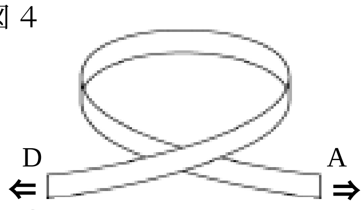
図４


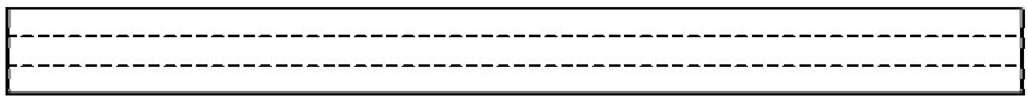
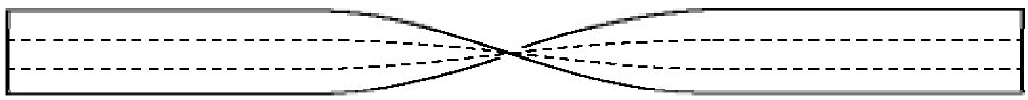
図５


図６


5　次の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1) ７個の自然数16，22，36，43，58，66，79がある。この中からいくつかの自然数を選び和をつくるとき，その和が７で割り切れるように選ぶことができる。このような自然数の組を１つ求めなさい。

(2) いずれも７の倍数ではない７個の自然数 a_1，a_2，…，a_7 を選ぶ。この自然数をどのように選んだとしても，この７個の自然数の中からいくつかの自然数を選び和をつくるとき，その和が７で割り切れるように選ぶことができることを示しなさい。

6　右の図のように，25枚の硬貨を表裏バラバラに縦５列，横５列に並べる。この並べた硬貨に対し，次の操作を繰り返してすべての硬貨を表にしたい。

○●○○○
●○●●●
○●○○○
○●○○○
○●○○○

○＝表，●＝裏

操作
ある特定の縦１列または横１列の硬貨５枚を同時に裏返す。

例えば，右の図であれば，この操作を２回行うことで，すべての硬貨を表にできる。

このように，縦５列，横５列に並べた硬貨に対し，次の (1)～(3) の問いに答えなさい。

(1) すべてを表にするための最小の操作回数が，４回である並び方を１つ示しなさい。また，操作する過程も示しなさい。

(2) 何回かの操作の後に，すべてを表にできる並び方を考える。すべてを表にするための最小の操作回数は，並び方によらず５回以下であることを示しなさい。

(3) すべてを表にするための最小の操作回数が，５回である並び方は全部で何通りあるか求めなさい。また，その理由を説明しなさい。