平成１９年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ．概　要

今年度の数学コンテストは７月２７日（金）に実施され、参加者は４０３名（１７校）であった。平成１０年度から始め、今年度で１０回目の開催となり参加者数は年々増加している。各受賞者数は、最優秀賞２名、優秀賞１２名、奨励賞１３名、アイデア賞７名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞１０名、奨励賞８名、アイデア賞２３名）計３４名であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓の使用も認めている。

参加生徒は３時間集中して取り組んでいた。今回は比較的取り組みやすい問題もあったが、論証力や発想力を問うものが多く、苦戦した問題もあったようである。しかし、ほとんどの生徒があきらめることなく最後まで取り組んでいた。答案の中には、論理的に整理されたすばらしいものも見られた。また、正解に至らない答案の中にも発想のユニークなものも見られた。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、今後、数学のみならずいろいろな教科を学習していくうえでよい経験になったと思われる。この群馬県高校生数学コンテストが生徒にとって数学を楽しむ機会として更に充実していければ幸いである。

○　参加生徒の内訳

学科	普　通　科		文理総合　科	理数科		総合学科		情　報処理科	計	
学年	男	女	女	男	女	男	女	男	男	女
1	１４０	６９							１４０	６９
2	１１７	５２	1	1	2			1	１１９	５５
3	１７			1		1	1		１９	1
計	２７４	１２１	1	2	2	1	1	1	２７８	１２５

合 計　４０３名

※次のページ以降に平成１９年度数学コンテストの問題と解答・解説があります。
下記は問題表紙の注意事項です（参考まで）。

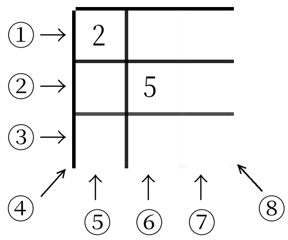
注　意　事　項

1　問題は，１ページと２ページです。解答用紙は６枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。

Ⅱ．問題及び解答例

1　3×3のマス目に，次の条件を満たすように1から9までの自然数を1つずつ書き込んでマス目をうめるとき，下の(1)，(2)の問いに答えなさい。

条件
「縦横斜め」8方向の和はすべて等しい。



(1) 条件を満たすように，右の図の3×3のマス目の空欄に，1，3，4，6，7，8，9の自然数を1つずつ書き込んでマス目をうめなさい。

(2) 条件を満たす自然数のうめ方は，(1)のうめ方以外にないことを説明しなさい。ただし，マス目を回転したり，対称移動して重なるものは同じものとする。

[解答例]

(1)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

または

2	9	4
7	5	3
6	1	8

(2) 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝45である。横3行の和がどれも等しいから、どの行の和も15となる。したがって、縦横斜めの8方向はすべて和が15となる。1～9のうちの3数を用いて和が15になる組は、次の8組しかない。

(1，5，9)，(1，6，8)，(2，4，9)，(2，5，8)，(2，6，7)，(3，4，8)，(3，5，7)，(4，5，6)。

縦横斜めの8方向の並び方はすべて異なるので、この8組が8方向のいずれかに1回ずつ使われていることになる。ここで、この8組に1～9の数字が用いられている回数を数えると，1は2回，2は3回，3は2回，4は3回，5は4回，6は3回，7は2回，8は3回，9は2回である。

また，それぞれのマス目の数に着目し、その数が3数の和に用いられる回数を考える。図の○数字はそれぞれの回数を表している。例えば左上のマス目の数字は、3数の和に3回用いられていることを表している。5は3数の和に4回用いられているから④には5が入る。4か所の②のいずれかに1が書き込まれる。1の位置が決まると9の位置がきまり，残る2つの②に3と7が入る。その書き込み方は2通りある。3と7が書き込まれた後は，2，4，6，8は自ずから位置が決まる。

③	②	③
②	④	②
③	②	③

③	②	③
9	5	1
③	②	③

マス目を回転したり，対称移動して重なるものは同じものとすると，条件を満たす自然数のうめ方はただ1通りのみとなる。

[出題の意図]

有名な魔法陣を題材とした問題です。3×3魔法陣では対称性を考えると解が1通りしかありません。その理由を論証する問題です。パズルのような魔方陣に潜む数学的なおもしろさを感じてほしいと思います。

[講評]

396名(403名中)が選択し，18名が完答しました。(1)は，ほとんどの人が1列の和が15になることに気づいたようです。(2)では，和が15になることを含めて，5が中央にあることと，その他の数の配置を説明することがポイントとなります。和が15になる組合せを列挙し1から9までの数を数える方法や，1や9の位置について場合分けをする方法，さらには偶数・奇数の配置に着目して整理する方法など，幾つかのアプローチが見られました。

2　自然数 a に対し，a を除く正の約数の総和が a と等しくなる数を完全数という。例えば，$6=1+2+3$ …①となり，6 は完全数である。

また，①の両辺を6で割ると $\dfrac{3+2+1}{6}=1$ すなわち，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=1$が成り立つ。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) x が完全数であるとき，次の等式を満たす自然数 a_1，a_2 と完全数 x を求めなさい。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{x}=1$$

ただし，2，a_1，7，a_2 は x の約数であり，$2<a_1<7<a_2<x$ とする。

(2) y が完全数であるとき，次の等式を満たす自然数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6と完全数 y を求めなさい。また，その過程を書きなさい。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{31}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{y}=1$$

ただし，2，a_1，a_2，a_3，31，a_4，a_5，a_6 は y の約数であり，$2<a_1<a_2<a_3<31<a_4<a_5<a_6<y$ とする。

[解答例]

(1) 与式の両辺に x をかけると，

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{a_1}+\frac{x}{7}+\frac{x}{a_2}+1=x \quad \cdots②$$

②において，2, a_1, 7, a_2は x の異なる正の約数であるから，左辺の各項もすべて x の異なる正の約数である。また，x は完全数であることから，x の約数の個数は6個である。

x は素因数に2と7を持つから，x は$2^2\cdot7$または$2\cdot7^2$のどちらかである。このうち，7が小さい方から4番目の約数となるのは$2^2\cdot7$であり，

$2^2\cdot7=28=1+2+4+7+14$となり，28は完全数である。

よって，$\dfrac{14+7+4+2+1}{28}=1$　すなわち $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{28}=1$

ゆえに，$a_1=4$，$a_2=14$，$x=28$となる。

(2) (1)と同様にして，与式の両辺に y をかけると，

$$\frac{y}{2}+\frac{y}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{y}{a_3}+\frac{y}{31}+\frac{y}{a_4}+\frac{y}{a_5}+\frac{y}{a_6}+1=y \quad \cdots③$$

③において，2, a_1, a_2, a_3, 31, a_4, a_5, a_6 は y の異なる正の約数であるから，左辺の各項もすべて y の異なる正の約数である。また，y は完全数であることから，y の約数の個数は10個である。

y は素因数に2と31を持つから，y は$2\cdot31^4$または$2^4\cdot31$のどちらかである。このうち，31が小さい方から6番目の約数となるのは$2^4\cdot31$である。

$2^4\cdot31=496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$となり，496は完全数である。

よって，③は次のようになる。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=1$$

ゆえに，$a_1=4$，$a_2=8$，$a_3=16$，$a_4=62$，$a_5=124$，$a_6=248$，$y=496$となる。

[出題の意図]

完全数についての出題です。ここでは分母にある2と7，2と31という数字がヒントとなります。論理的に数字を絞り込んでいくとよいでしょう。完全数の 6や 28は比較的見つけやすいですが，それより大きい完全数 (496，8128，33550336 …)を見つけるのは難しく，古代ギリシャ時代からの問題でした。現在知られている最大の完全数は$2^{32582657}-1$で、2006年に発見されました。この数を含めて44個の完全数が知られています。

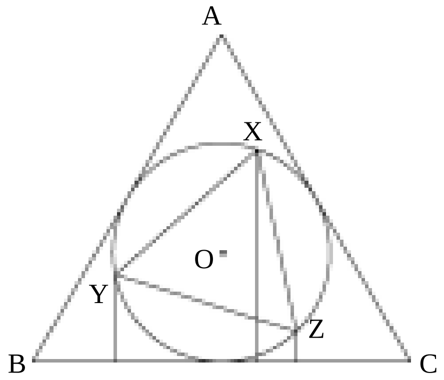
[講評]

278名(403名中)が選択し，136名が完答しました。(3)では，分母の2と31という数字を元に，小さい数から順に見つけていく答案や，約数が10個であることを利用して，y が$2^{\triangle}\cdot31^{\square}$の形になることを論理的にきちんと説明できていた答案も見られました。

3　右の図のように，半径１の円 O に，正三角形 ABC が外接し，正三角形 XYZ が内接している。３点 X，Y，Z から辺 BC に下ろした垂線の長さをそれぞれ x，y，z とするとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

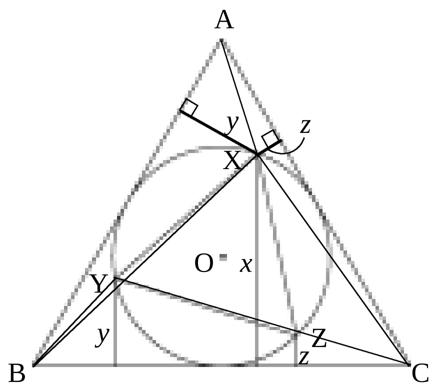
(1) 正三角形 XYZ が，円 O に内接しながら回転するとき，$x+y+z$ は一定であることを示しなさい。

(2) 正三角形 XYZ の代わりに，正54角形が円 O に内接しながら回転するとき，54個の各頂点から辺 BC に下ろした垂線の長さの和は一定であることを示しなさい。



[解答例]

(1) 三角形 XAB を点 O のまわりに120°回転させると三角形 YBC に一致する。したがって、X から AB に下ろした垂線の長さは y に等しい。同様に、三角形 ZBC を点 O のまわりに120°回転させると三角形 XCA に一致する。したがって、X から AC に下ろした垂線の長さは z に等しい。



ここで，面積に着目すると，

(△ABC の面積)＝(△XAB の面積)＋(△XBC の面積)＋(△XCA の面積)

$$3\sqrt{3} = \frac{1}{2}2\sqrt{3}\,y + \frac{1}{2}2\sqrt{3}\,x + \frac{1}{2}2\sqrt{3}\,z$$
$$= \sqrt{3}(x+y+z)$$

よって，$x+y+z=3$（一定）

(2) 正54角形の頂点を順に $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_{54}$ とおく。また，$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_{54}$ から BC におろした垂線の長さをそれぞれ $h_1, h_2, h_3, \cdots, h_{54}$ とおくと，$\triangle X_1X_{19}X_{37}$, $\triangle X_2X_{20}X_{38}$, …, $\triangle X_{18}X_{36}X_{54}$ は正三角形だから(1)より

$$h_1+h_2+h_3+\cdots+h_{54} = (h_1+h_{19}+h_{37})+(h_2+h_{20}+h_{38})+\cdots+(h_{18}+h_{36}+h_{54})$$
$$= 3+3+\cdots+3$$
$$= 3\times 18$$
$$= 54\text{（一定）}$$

[出題の意図]

正三角形が円に内接しながら回転するとき，$x+y+z$ の値が常に一定であることは推測できると思います。ここでは、それがつねに一定であることをどのように証明するか、数学的に考察する力をみる問題です。解答のように，三角形の面積に着目して図形的に処理することができます。

[講評]

42名(403名中)が選択し，7名が完答しました。x，y，z のそれぞれの値の変化のようすは三角関数で表現することができます。また，３点 X，Y，Z の座標をパラメータ（媒介変数）を使って表示する方法なども考えられます。正三角形の重心が，円 O の中心と一致していることを利用した答案も見られました。

4　図１のような長方形の帯 ABCD がある。

図２は，この帯の AB を固定し, CD を180 °回転させたものであり，これを「１回ひねられた帯」と呼ぶことにする。

図３は, CD をさらに180 °回転させたものであり，これを「２回ひねられた帯」と呼ぶことにする。

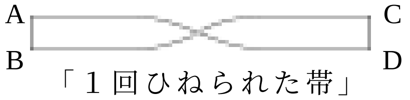
次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 図４のように帯を丸めた状態から，AB と CD をどちらもひねらずに矢印の方向へ引っ張ると，何回ひねられた帯になるか，書きなさい。

(2) 図５は，AB, CD をそれぞれ３等分する点 E，F 及び G, H に対し，E とH，F とG を破線で結んだものである。

図６は，図５の帯の「１回ひねられた帯」である。A とC，B とD をつないで輪をつくり，EH，FG に沿って輪を切ると，いくつかの輪ができる。何回ひねられた輪がいくつできるか，書きなさい。また，その理由を説明しなさい。

図１


図２


「１回ひねられた帯」

図３


「２回ひねられた帯」

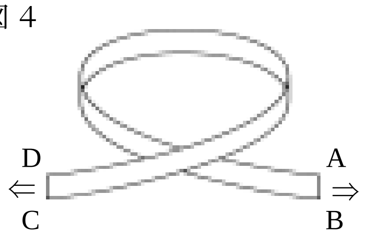
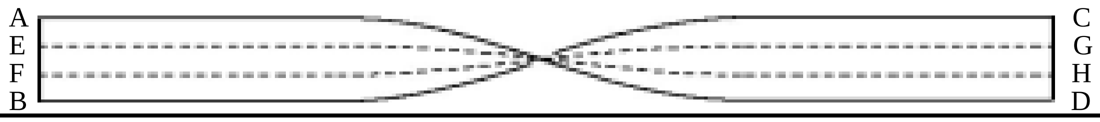
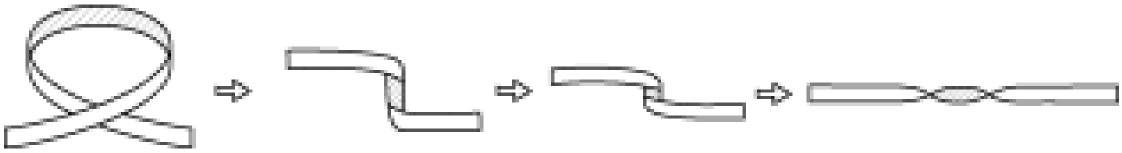
図４


図５

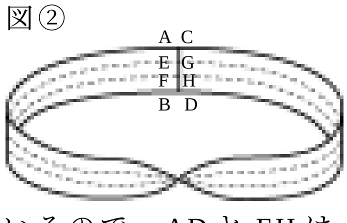

図６


[解答例]

(1) 図４を変形すると下の図①のようになり、2回ひねられた帯になる。

図①


(2) 図6の帯の AB と CD をつなげて、図②のように輪をつくる。

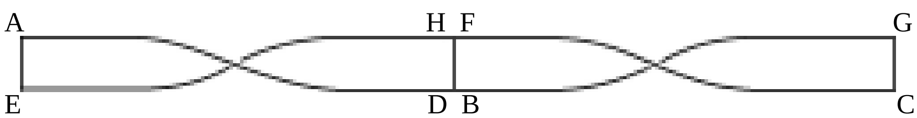
図②


帯 EFGH は，破線で切ると EF と GH がつながっているので，1回ひねられた輪になる。

帯 AEHD と帯 BFGC は，AE と CG がつながり，BF と DH がつながっているので，1つの大きな輪になる。

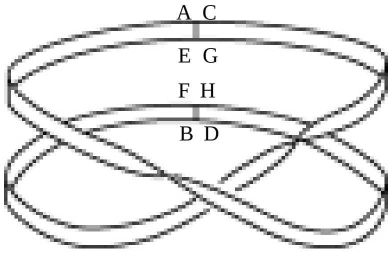
図６では，AD が BC より“手前”になるようにひねっているので，AD と EH は AD の方が“手前”にあり，FG と BC は FG の方が“手前”にある。

よって，図③のように AEHD と BFGC を DH と BF でつなぐと，それぞれ同じ方向に1回ずつひねられていることになる。

図③


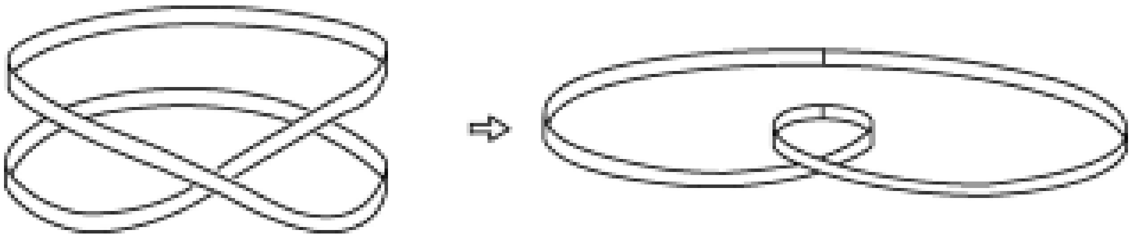
図②の輪を破線で切ったとき，AEHD が BFGC より“ 手前 ”になる。
したがって，図②の輪を破線で切って EFGH を除いた輪は図④のようになる。

図④



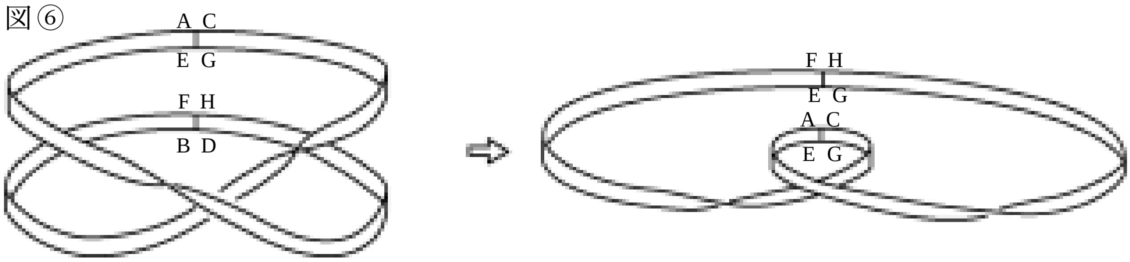
ここで、図④の輪で、図⑤のようにひねりを加えていない輪を考える。(1)を用いると図⑤の輪は、2回ひねられた大きな輪ができる。

図⑤



したがって、図④の輪は、図⑤の輪にさらにひねりが1回ずつ加わっているので，合わせて4回ひねられた輪となる。（図⑥）

図⑥



以上から，1回ひねられた輪が１つと，4回ひねられた輪が１つできる。

[出題の意図]

表裏が区別できない図形として有名なメビウスの帯を使った問題です。その帯を境界線に沿った方向で切ったときに，どんな輪ができるかを考えてもらうものです。実際に切ってしまえば分かることですが，それを図や記号，言葉を使って説明してもらうことをねらいとしました。

[講評]

212名(403名中)が選択し，6名が完答しました。帯が何回ひねられているかを記述する方法が難しかったようです。帯に模様をつけたり番号を付けたりする答案も見られました。また、ひねりを表す記号を用いて見事に説明している答案も見られました。

5　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) ７個の自然数16，22，36，43，58，66，79がある。この中からいくつかの自然数を選び和をつくるとき，その和が７で割り切れるように選ぶことができる。このような自然数の組を１つ求めなさい。

(2) いずれも７の倍数ではない７個の自然数 a_1，a_2，…，a_7を選ぶ。この自然数をどのように選んだとしても，この７個の自然数の中からいくつかの自然数を選び和をつくるとき，その和が７で割り切れるように選ぶことができることを示しなさい。

[解答例]

(1) ７で割った余りに着目する。

（例）16，22，36，43，58または16，22，58，79など。

(2)

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

……

$S_7 = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$

とおく。

S_1，S_2，…，S_7 の中に7で割り切れるような数があれば，それが求める和の作り方の１つである。

S_1，S_2，…，S_7がどれも7で割り切れないとき，それらを７で割った余りは 1，2，3，4，5，6のいずれかである。これらの余りは全部で７個ある。したがって，少なくとも２個は同じ余りであるはずである。そこで，S_n　(n＝1，2，3，4，5，6，7)のうち，同じ余りになる２つの和 S_i と S_j ($i < j$)を取り出し，$S_j - S_i$ を作る。これを7で割った余りは 0だから，$S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ が求める和の作り方の1つとなる。

以上により題意は示された。

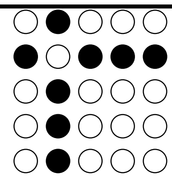
[出題の意図]

整数の「余り」の性質を題材にした問題で，発想力や論証力を問う問題です。(2)の問題では、余りが1～6の6種類しかないところに7つの余りがあるため、少なくともどれか2つは同じ余りになります。これは「鳩の巣原理」と呼ばれているものです。また、説明しにくい事柄をどれだけ論理的に示せるかが問われています。７で割った余りの種類で分類し，丁寧で効率的な場合分けを行うことで示すこともできます。

[講評]

347名(403名中)が選択し，1名が完答しました。「鳩の巣原理」とは、「ディリクレの引き出し論法」や「部屋割り論法」とも言われ、「ｎ個の巣穴にｎ＋1羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴は2羽以上の鳩が入る」という論証法です。「たくさんあるものの中で2つ（以上）は同じであること」を示したりする場合に有効です。

6　右の図のように，25枚の硬貨を表裏バラバラに縦５列，横５列に並べる。この並べた硬貨に対し，次の操作を繰り返してすべての硬貨を表にしたい。



○＝表，●＝裏

> 操作
> ある特定の縦１列または横１列の硬貨５枚を同時に裏返す。

例えば，右の図であれば，この操作を２回行うことで，すべての硬貨を表にできる。

このように，縦５列，横５列に並べた硬貨に対し，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

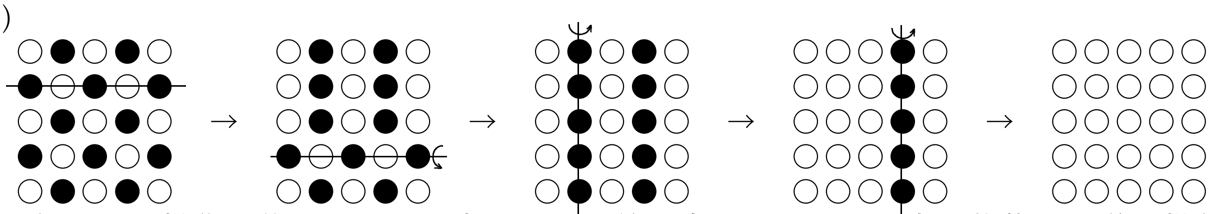
(1) すべてを表にするための最小の操作回数が，４回である並び方を１つ示しなさい。また，操作する過程も示しなさい。

(2) 何回かの操作の後に，すべてを表にできる並び方を考える。すべてを表にするための最小の操作回数は，並び方によらず５回以下であることを示しなさい。

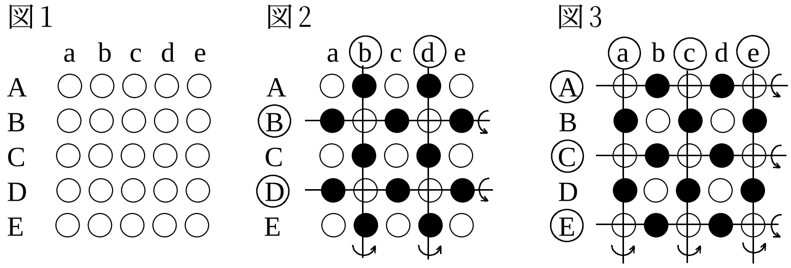
(3) すべてを表にするための最小の操作回数が，５回である並び方は全部で何通りあるか求めなさい。また，その理由を説明しなさい。

[解答例]

(1)



(2) 何回かの操作の後にすべてを表にできる並び方は，すべてが表の状態から逆に操作することによってつくることができる。



○のついた列を操作すると，すべてを表にできる。

図1のように各列をA～E，a～eとする。例えば左上の角に配置された硬貨をAa，中央に配置された硬貨をCcなどと表すことにする。また，図2のように，操作を線分で図示する。

硬貨の上を線分が1回通過しているAbやBaなどは裏返しになり，線分が2回通過しているBbは再び表になっている。

ある列に操作を2回行うことは0回の操作と等しいので，どの列の操作も1回のみを考えればよい。

また，すべての硬貨を表にできる場合，すべての硬貨を表にする操作の方法は必ず2通りある。例えば図2ではB，D，b，d，の4列を操作してすべての硬貨を表にすることができるが，図3ではA，C，E，a，c，eの6列を操作してもすべての硬貨を表にすることができる。Aaに着目すると，図2では0回，図3では2回裏返して表になっている。

よって，1～5回の操作の後にすべてを表にできる並び方では，元に戻す操作を行えば最小の操作回数が5回以下となる。

6～9回の操作の後にすべてを表にできる並び方では，操作されていない列を操作することによって，最小の操作回数を4回以下にすることができる。

以上より，すべてを表にするための最小の操作回数は並び方によらず5回以下である。

(3) 5回の操作ですべての硬貨を表にできる並び方を考える。(2)と同様に，すべて表の状態から逆に操作した並び方を考える。

すべての硬貨を表にする操作の方法は必ず2通りある。操作可能な異なる10列への操作のうち，5列を選んで操作した並び方の総数が，求める場合の数である。

ここでまず，それらの並べ方について，そのたどり着き方が必ず2通りあることを示す。

図４

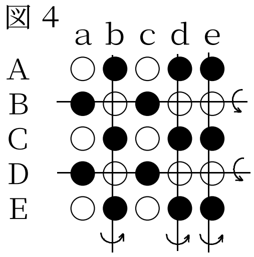


図５

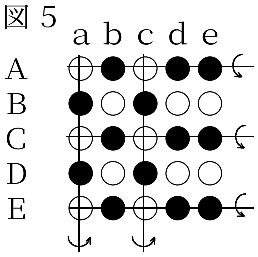


図4と図5は，すべて表の状態から5回の操作の後にできた並び方であり，作り方が異なっているが並び方が等しいものである。すべての並び方は必ず2通りの操作の方法がある。したがって，求めたい方法には次のような３つの方法がある。

すべて表の状態から，

① 縦5列を操作する方法

② 縦4列と横1列を操作する方法

③ 縦3列と横2列を操作する方法

ここで，縦2列と横3列を操作する方法は③と重複し，縦1列と横4列を操作する方法は②と重複し，横5列を操作する方法は①と重複する。

①は1通り。

②は縦4列の選び方は5通り。横1列の選び方も5通りだから，5×5＝25通り。

③は縦3列の選び方は，abc，abd，abe，acd，ace，ade，bcd，bce，bde，cde の10通りで、横2列の選び方は，AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE の10通り。

よって，10×10＝100通り。

以上より，求める並び方は１＋25＋100＝126通りとなる。

[出題の意図]

パズルのような身近な問題に対して、その「複雑さ」を数学的にとらえることを目的として出題しました。一見複雑に見える状況も記号化して整理するなどして一般化し、うまく分析することができます。その際、様々な状況を実際に試してみて結果を予測し、それを確かめるというアプローチの仕方は、数学の問題を解く有効な手段の1つです。

[講評]

287名(403名中)が選択し, 3名が完答しました。(1)は比較的よくできていたようです。(2)､(3)では、同じ列を2回操作することは操作しないことと等しい点と、すべての硬貨を表にできる場合, すべての硬貨を表にする操作の方法は必ず2通りある点がポイントです。そのことに気づいて、ポイントを押さえたすばらしい答案も見られました。