平成１８年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

群馬県教育委員会

Ⅰ．概　要

平成１０年度から始めた数学コンテストは、今年度は７月２６日（水）に実施され、今年で９回目となった。参加者は３６４名（１８校）で、参加者数は年々増加している。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞１０名、奨励賞８名、アイデア賞２３名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞７名、奨励賞１１名、アイデア賞１８名）計４２名であった。

会場は、県立前橋高校、県立高崎高校、県立太田高校、県立渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓の使用も認めている。

参加生徒は３時間集中して取り組んでいた。どの問題も短時間で解答を導くことが難しい問題であったが、ほとんどの生徒があきらめることなく最後まで取り組んでいた。コンテスト終了後における生徒の感想の中には、３時間が短く感じたというものや、普段じっくり考える問題に取り組む機会が少ないので楽しむことができたというものもあった。数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題に取り組むことなどは、今後、数学のみならずいろいろな教科を学習していくうえでよい経験になったと思われる。

問題のレベルとしては、昨年度に引き続き苦戦を強いられる問題が多かったようであったが、部分的に正解を導くことができた生徒や、素晴らしい解答の糸口を見つけられた生徒もいたようである。今後、この群馬県高校生数学コンテストが生徒にとって数学を楽しむ機会として更に充実していければ幸いである。

〇　参加生徒の内訳

学科	普　通　科		理　数　科		文理総合学科		計	
学年	男	女	男	女	男	女	男	女
1	１７０	4	1	0	1	1	１７２	5
2	１０４	５４	0	0	2	0	１０６	５４
3	２４	3	0	0	0	0	２４	3
計	２９８	６１	1	0	3	1	３０２	６２

合　計　３６４名

※次のページ以降に平成１８年度数学コンテストの問題と解答・解説があります。
下記は問題表紙の注意事項です（参考まで）。

注　意　事　項

1　問題は，１ページと２ページです。解答用紙は6枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，コンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。
4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：00 ～ 16：00）。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。

Ⅱ．問題及び解答例

1　現在の暦はグレゴリオ暦を用いており，次のルールに従っている。

グレゴリオ暦のルール

①　４で割り切れる年は，うるう年として１年を366日とする。
②　①の年のうち，100で割り切れる年はうるう年としない。
　　ただし，400で割り切れる年はうるう年とする。

今日(2006年7月26日)が水曜日であることを利用し，次の(1),(2)の問いに答えなさい。

(1) 自分の生年月日を書き，その曜日を求めよ。
　ただし，求めた手順をしっかりと書くこと。

(2) どんな日に対しても，その曜日を求められるような方法を考え，その手順をわかりやすく説明せよ。
　また，その手順を使って2500年12月25日の曜日を求めよ。

[解答例]

(1)　例：1970年5月27日の場合

１年は365日で、365÷7＝52･･･1より、通常は同じ月日の曜日は１年後には１日後ろにずれる。（2月29日をはさむときは２日あとにずれる。）

よって、４年を１セットと考えると、１セットで５日分後ろにずれることになる。

ただし、４の倍数の年でうるう年でない年があるので、その際は調整する。

①　2006年5月27日は誕生日より36年たっており、ちょうど９セット分となる。よって、9×5＝45で、45÷7＝6･･･３だから、1970年5月27日は2006年の曜日から３日前にずらせばよい。（2000年はうるう年なので調整は不要である。）

②　5月27日から7月26日までは、4＋30＋26＝60（日間）である。
　よって、60÷７＝８･･･４より、7月26日より曜日が４日分前にずれる。

以上①、②より、７日分前にずれるから今日（2006年7月26日）の曜日と変わらない。
したがって、1970年5月27日は水曜日である。

(2)　2500年7月26日までに494年あり、その間うるう年は120年ある。（4の倍数の年でうるう年でない年は４年ある。）

494年間は、366×120＋365×(494－120)＝180430（日）あり、12月25日は7月26日から数えて5＋31＋30＋31＋30＋25＝152（日）ある。

以上より、2500年12月25日は、今日より180582日後である。
よって、180582÷7＝25797･･･3より、曜日が3日後にずれる。
したがって、2500年12月25日は土曜日である。

[出題の意図]

日常生活の中の素朴な疑問や課題に対し、規則性を発見しながら的確に数学的に処理する力を問う問題です。曜日という簡単な仕組みのものであっても、あらゆる場面を想定し、的確に把握し処理する力が要求されます。

[講評]

337名（364名中）が選択し、12名が完答しました。曜日が年ごとにずれていくルールについては、ほとんどの人が理解していたようです。うるう年の取り扱いが最大の課題となっていたようです。日数を単純に数え上げていく人、工夫をして法則や数式を導き出そうとしていた人など、様々なアプローチの解法が見られました。

2　自然数 n，r に対して，$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^r$ を展開し変形すると，連続する自然数 A，B を用いて，

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^r=\sqrt{A}+\sqrt{B}$$

と表せることを示しなさい。

[解答例]

$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^r$ の各項は、$\sqrt{n+1}$ と $\sqrt{n}$ を合計 r 回かけてできるから、

r が奇数のときは、$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^r = a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n}$

r が偶数のときは、$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^r = a + b\sqrt{n(n+1)}$

よって、 (i) rが奇数のとき

$$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^r = a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n} \quad (a>0、b>0) \quad \cdots①$$

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^r = a\sqrt{n+1}-b\sqrt{n} \quad (a>0、b>0) \quad \cdots②$$

①×②より、$1^r = a^2(n+1)-b^2 n$

よって、$a^2(n+1)=b^2 n+1\cdots③$

①、③より、 $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^r = a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n}=\sqrt{a^2(n+1)}+\sqrt{b^2 n}$
$=\sqrt{b^2 n+1}+\sqrt{b^2 n}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$

(ii) rが偶数のとき

$$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^r = a+b\sqrt{n(n+1)} \quad (a>0、b>0) \quad \cdots④$$

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^r = a-b\sqrt{n(n+1)} \quad (a>0、b>0) \quad \cdots⑤$$

④×⑤より、$1^r = a^2-b^2 n(n+1)$ よって、$a^2=b^2 n(n+1)+1\cdots⑥$

④、⑥より、$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^r = a+b\sqrt{n(n+1)} = \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2 n(n+1)}$
$=\sqrt{b^2 n(n+1)+1}+\sqrt{b^2 n(n+1)}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$

(i)、(ii)より、$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^r$ を展開し変形すると，連続する自然数 A， B を用いて，$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^r=\sqrt{A}+\sqrt{B}$ と表せる。

[出題の意図]

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}=\sqrt{26}+\sqrt{25}$、$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3=9\sqrt{3}+11\sqrt{2}=\sqrt{243}+\sqrt{242}$

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4=49+20\sqrt{6}=\sqrt{2401}+\sqrt{2400}$、$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^5=89\sqrt{3}+109\sqrt{2}=\sqrt{23763}+\sqrt{23762}$

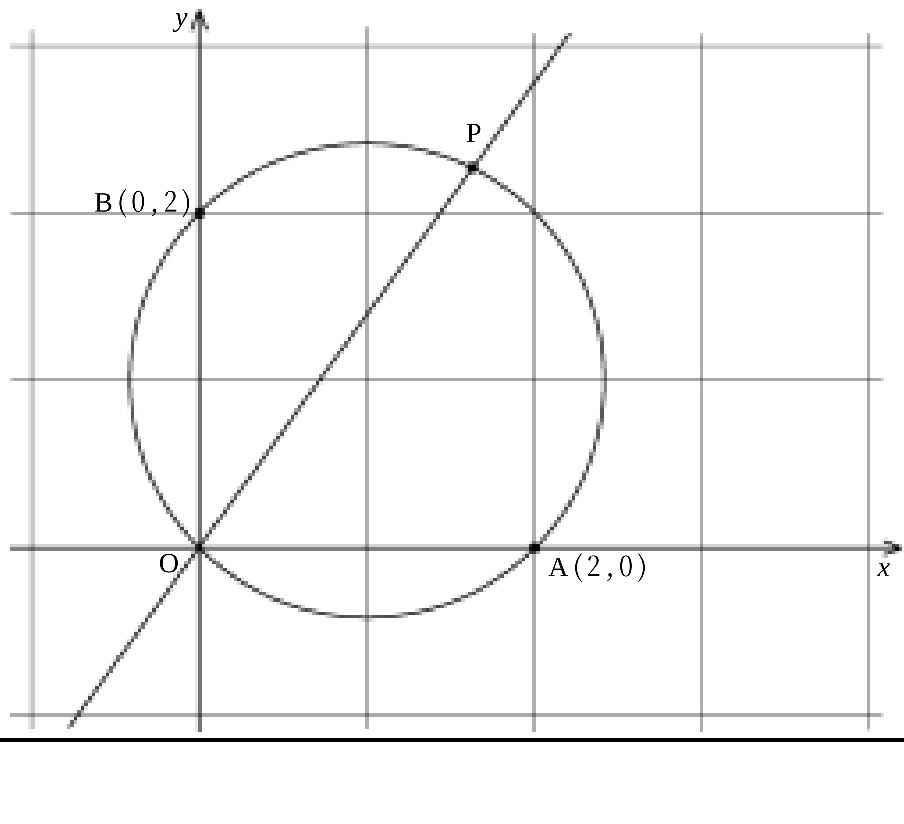
…のように、次数を増やしても保存される興味深い性質があることに気づかされます。この興味深い性質に着目した問題です。

[講評]

146名（364名中）が選択しました。試行錯誤を繰り返すなかで、法則性が発見できると思います。偶数乗と奇数乗に分けて証明する方法は、よく使われる手法の１つです。

3　下の図のような3点 O(0,0),A(2,0),B(0,2)を通る円と，これらの3点と異なる円周上の点 P がある。原点 O を含まない $\overset{\frown}{AP}$ を3等分する点 Q,R を求め，その方法をわかりやすく説明しなさい。

なお，必要であれば別添の用紙を折ったり，定規，コンパスを用いたりしてもよい。



[解答例]

【方針】$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$に対する円周角∠AOPの3等分線をひき、弧との交点をそれぞれ点Q、Rとすると$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$は3等分される。

【解説】

① 図の書かれている用紙を、y軸で山折りにする。

② 原点Oが直線l（y=1）上に、点B(0,2)が直線m（直線OP）上にくるように折り曲げる。（図Ⅰでは点線で示した直線nで谷折りにする。）

③ 折り曲げた状態で3点B、C、Oに対応する点をそれぞれB'、C'、O'とする。

④ OとC'、OとO'をそれぞれ結び、それらと$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$との交点をそれぞれ点Q、Rとする。

⑤ 線分OC'と線分OO'によって∠AOPは3等分されるので、Q、Rは$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$を3等分する点である。

【証明】

点O'からx軸に下ろした垂線の足を点H、点C(0,1)とする。折り曲げて点をとったので3点B、C、Oと3点B'、C'、O'は直線nに関して対称である。また、直線nは線分OO'、線分BB'、線分CC'の垂直2等分線となっている。

OB ＝ O'B'，OO'//BB'より　四角形OO'B'Bは等脚台形である。

対角線の長さが等しいので　　O'B ＝ OB'　……①　である。

また　△COO'≡△CBO'より　O'B ＝ O'O　……②

①，②よりOB'＝OO'となり、△OB'O'は二等辺三角形である。折り曲げた対称性から　BC ＝ CO ＝ B'C'＝ C'O'＝ O'H ＝1

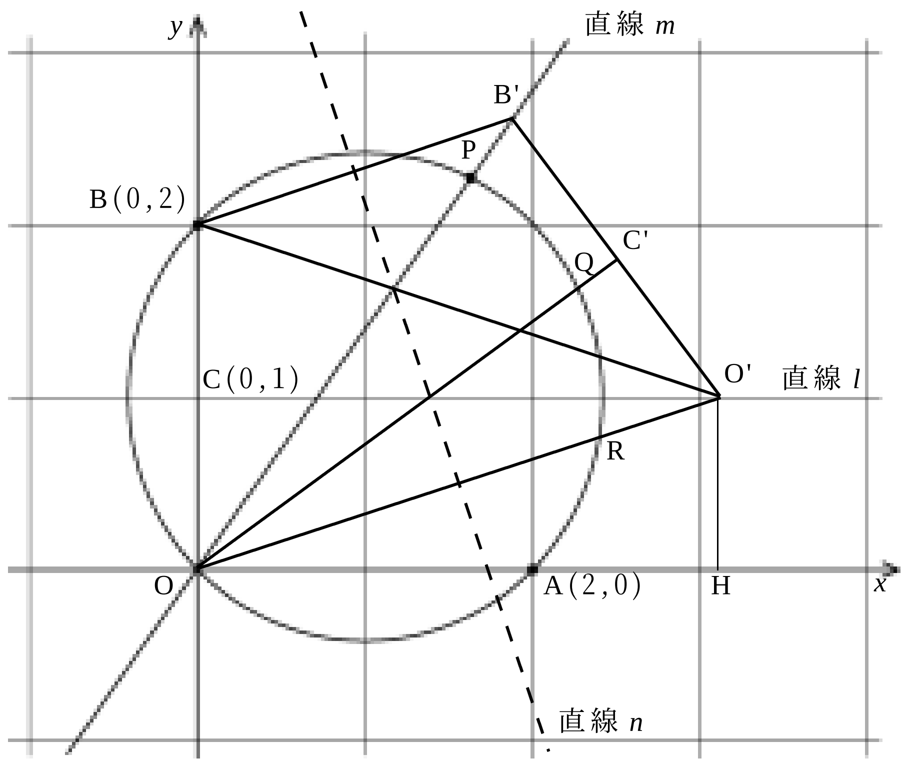
二等辺三角形の頂点Oから底辺B'O'の中点C'へ下ろした線分OC'は底辺B'O'と垂直である。

よって、直角三角形の斜辺と他の辺が等しいから　△OC'B'≡△OC'O'≡△OHO'

以上より線分OC'と線分OO'によって∠AOPは3等分される。

線分OC'、線分OO'と$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$との交点をそれぞれQ、Rとすると、Q、Rは$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$を3等分する点である。

図Ⅰ



[出題の意図]

三大作図問題の１つである「角の三等分」を題材にした問題です。一般的に定規とコンパスでは作図できないとされていますが、紙を折るなどの操作を利用すると角の３等分を示すことができます。実際に紙を切って操作すると、いろいろな解法が期待できます。対称性に着目すると良いでしょう。

[講評]

201名（364名中）が選択しました。弦 AP を３等分した2点を利用しても、弧 AP を三等分することはできません。答案の中には、円の中心を D として、扇形 DAP を切り取って円錐を作り、底面の円に内接する正六角形を使って弧ＰＡの３等分点を求めた、発想の素晴らしいものもありました。また、無限等比級数 $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$ が $\frac{1}{3}$ と等しくなることを利用して、角の２等分を繰り返し行うことにより、角の３等分に近づけるという発想も優れていると思います。

4　次の(1),(2)の問いに答えなさい。

(1) N 人に対して，選択肢が①,②,③の３つであるアンケートを実施したところ，N 人全員が①,②,③のいずれか１つを回答し，①と答えた人が a％，②と答えた人が b％，③と答えた人が c％であった。ただし，a,b,c はそれぞれ小数第１位で四捨五入した整数とする。このとき，$a+b+c$ は99,100,101のいずれかであることを示せ。

具体例
41人に対して，
①,②,③が10人,10人,21人のとき，百分率は24％,24％,51％となり合計は99％
①,②,③が９人,12人,20人のとき，百分率は22％,29％,49％となり合計は100％
①,②,③が６人,８人,27人のとき，百分率は15％,20％,66％となり合計は101％

(2) N 人に対して，選択肢が①～⑥の６つであるアンケートを実施したところ，N 人全員が①～⑥のいずれか１つを回答し，①～⑥の選択肢を回答した人数はすべて異なり，それぞれの百分率は a％,b％,c％,d％,e％,f％であった。ただし，a ～ f はそれぞれ小数第１位で四捨五入した整数とする。
$a+b+c+d+e+f=103$ となるときの N のうちで，最小の N を求めよ。

[解答例]

(1) ①、②、③と答えた人をそれぞれ A 人、B 人、C 人とすると、$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=N$ …①

a は、$\frac{\mathrm{A}}{N}\times 100$ の小数第1位を四捨五入したものだから $-0.5< a-\frac{\mathrm{A}}{N}\times 100 \leqq 0.5$ …②

同様に、$-0.5< b-\frac{\mathrm{B}}{N}\times 100 \leqq 0.5$ …③、$-0.5< c-\frac{\mathrm{C}}{N}\times 100 \leqq 0.5$ …④である。

②、③、④の辺々を加えて、$-1.5<(a+b+c)-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{N}\times 100 \leqq 1.5$

①より、$-1.5<(a+b+c)-100 \leqq 1.5$　よって、$98.5< a+b+c \leqq 101.5$

a、b、c は整数だから、$a+b+c$ は整数で、99、100、101のいずれかになる。

(2) ①～⑥と答えた人をそれぞれ A 人、B 人、C 人、D 人、E 人、F 人とすると

$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}=N$ …⑤

(1)と同様に、

$-0.5\times 6< a+b+c+d+e+f-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}}{N}\times 100 \leqq 0.5\times 6$ …⑥

⑤より、$-3< a+b+c+d+e+f-100 \leqq 3$

よって、$-97< a+b+c+d+e+f \leqq 103$

$a+b+c+d+e+f=103$ のとき、$a-\frac{\mathrm{A}}{N}\times 100=0.5$…⑥ が成り立つ。同様の式が b、c、d、e、f についても成り立つ。

⑥を変形すると、$N(2a-1)=200\mathrm{A}$ …⑥’となる。$(2a-1)$ は奇数だから、

「N は8の倍数である」…⑦

また、A、B、C、D、E、F はすべて異なるから A ＜ B ＜ C ＜ D ＜ E ＜ F とすると、A ≧1から、$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F} \geqq 1+2+3+4+5+6=21$ となり、N ≧21…⑧

(i) ⑦、⑧を満たす最小の N は24である。このとき、⑥’は $3(2a-1)=25\mathrm{A}$ となり、これを満たす最小の A は3である。

このとき、$N=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F} \geqq 33$ となり不適。

(ii) ⑦、⑧を満たす次に小さい N は32である。このとき、⑥’は $4(2a-1)=25\mathrm{A}$ となり、これを満たす最小の A は4である。

このとき、$N=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F} \geqq 39$ となり不適。

(iii) ⑦、⑧を満たす次に小さい N は40である。このとき、⑥’は $(2a-1)=5\mathrm{A}$ となり、

各条件を考慮すると A ＝1、B ＝3、C ＝5、D ＝7、E ＝9、F ＝15で題意を満たす。
これを満たす最小の A は3である。
したがって、求める最小の N は40である。

[出題の意図]

百分率を用いた身近な統計の問題を題材としました。四捨五入によって誤差が生じ、その誤差が積み重なると、大きな差となって現れてきます。四捨五入の仕組みや整数の性質を使った論証力を問う問題として出題しました。

[講評]

166名（364名中）が選択しました。まず、問題文から必要となる情報を読みとることが大切です。いくつかの具体例で試行錯誤してみるとよいでしょう。文字などを使って式に表せればゴールは近いはずです。

5　次の(1),(2)の問いに答えなさい。

(1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$ を満たす自然数の組(a_1, a_2, a_3, a)を１組求めよ。
ただし，$a_1 < a_2 < a_3 < a$ とする。

(2) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2006}^2=a^2$ を満たす自然数の組$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2006}, a)$が存在することを示せ。
ただし，$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2006} < a$ とする。

[解答例]

(1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$ を変形して、$a_1^2+a_2^2=a^2-a_3^2=(a+a_3)(a-a_3)$
ここで、$a-a_3=1$とすると $a=a_3+1$となり、$a_1^2+a_2^2=(a+a_3)\cdot 1=2a_3+1$
ここで、$a_1^2=2$、$a_2^2=3$とすると $a_3=6$、$a=7$
よって、$(a_1, a_2, a_3, a)=(2,\ 3,\ 6,\ 7)$

(2) $a=a_{2006}+1$とすると、$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2006}^2=(a_{2006}+1)^2$ だから
$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2005}^2=2a_{2006}+1\cdots$①
ここで、$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2005})=(1, 2, 3, \cdots, 2004, 2005)$とすると、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2005}$の中に奇数が1003個、偶数が1002個含まれるから
$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2005}^2=2\alpha+1$（ただし αは自然数）
と表せる。①から、$2a_{2006}+1=2\alpha+1$より $a_{2006}=\alpha$。さらに、$a=\alpha+1$となる。
ここで、$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2005}$かつ $a_{2006} < a$だから、$a_{2005} < a_{2006}$を示す。

①より、$a_{2006}=\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2005}^2-1}{2}=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-1}{2}$

$$
\begin{aligned}
a_{2006}-a_{2005} &= \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-1}{2}-2005\\
&= \frac{2^2+3^2+\cdots+2005^2-2\cdot 2005+1-1}{2}\\
&= \frac{3+3^2+\cdots+(2005-1)^2}{2} > 0
\end{aligned}
$$

よって、$a_{2005} < a_{2006}$。
以上のことから、条件を満たす$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2006}, a)$の組が存在し

$$\left(1, 2, 3, \cdots, 2004, 2005,\ \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-1}{2},\ \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2+1}{2}\right)$$

と表せる。

[出題の意図]

$a_1^2+b^2=c^2$の式でなじみ深い「ピタゴラス数」を拡張した問題です。整数の性質には、フェルマーの定理などをはじめ数多くの興味深い性質があります。この問題では、そうした整数の性質を題材にして、「与えられた式を拡張する」という考えを養う問題として出題しています。

[講評]

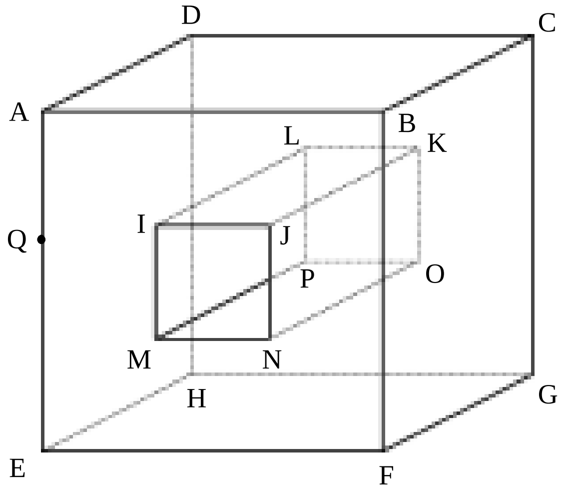
256名（364名中）が選択しました。(1)は$3^2+4^2=5^2$や$5^2+12^2=13^2$を利用して、$3^2+4^2=5^2=13^2-12^2$などから$3^2+4^2+12^2=13^2$を見つけることも可能です。(2)は $a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$ $(a_1 < a_2 < a_3 < a)$、$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=a^2$ $(a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a)\cdots$と、数を拡張する方向で考えることがポイントです。

6　下の図のような一辺の長さが 3 である立方体 ABCD-EFGH から，IJ ＝ IM ＝ 1, IL ＝ 3である直方体 IJKL-MNOP をくりぬいた立体を考える。ただし，I,N は対角線 AF を三等分する点である。Q を辺 AE 上の点とするとき，次の(1)〜(3)の問いに答えなさい。

(1) この立体を3点 A,D,G を通る平面で切ったときの切り口の面積を求めよ。

(2) AQ ＝ 1 のとき，この立体を3点 Q,D,G を通る平面で切ったときの切り口の面積を求めよ。

(3) AQ ＝ a ($0 \leqq a \leqq 3$)のとき，この立体を3点 Q,D,G を通る平面で切ったときの切り口の面積を求めよ。



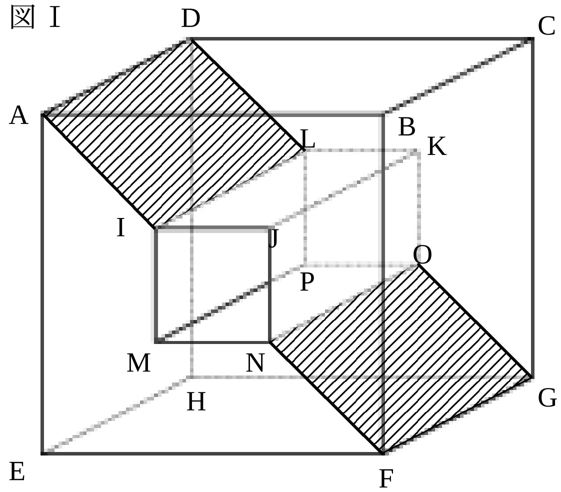
[解答例]

(1) 切り口は図Ⅰのようになる。

　AD ＝3、AI ＝ NF ＝$\sqrt{2}$ だから、切り口の面積は

$$3(\sqrt{2}+\sqrt{2})=6\sqrt{2}$$

図Ⅰ



(2) ML ＝ QD ＝$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

　二等辺三角形 MOL において、底辺を OL 高さを h_1とすると

$$ML^2 = h_1^2+\left(\frac{OL}{2}\right)^2$$

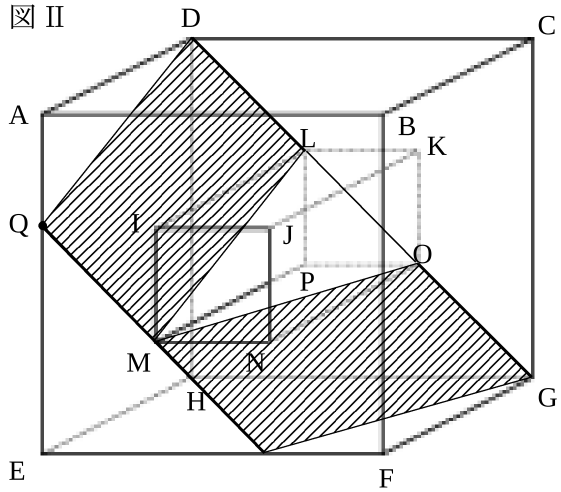
$$\sqrt{10}^{\,2} = h_1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

　よって面積は

$$2\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{19}{2}}=2\sqrt{19}$$

図Ⅱ



(3) (i)　$0 \leqq a < 1$ のとき

Qから DL に下ろした垂線を QR とすると

$$DR = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{2}(3-a)\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

また、$QD^2 = a^2 + 9$ だから

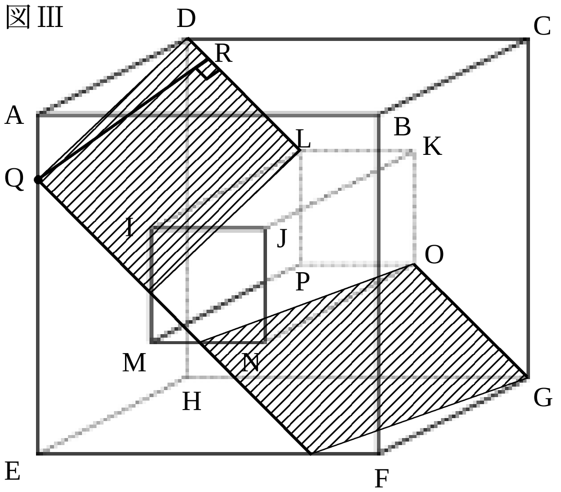
$$QR = \sqrt{QD^2 - DR^2} = \sqrt{a^2 + 9 - \frac{a^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2} + 9}$$

よって面積は

$$\left(\frac{\sqrt{2}(3-a) - \sqrt{2}(1-a)}{2} + \sqrt{2}\right) \times \sqrt{\frac{a^2}{2} + 9} \times \frac{1}{2} \times 2 = 2\sqrt{a^2+18}$$

図III



(ii)　$1 \leqq a \leqq 3$ のとき

切断する平面と MP、EF との交点をれぞれ S、T とすると、求める面積は台形 OTGD の面積から三角形 SOL の面積を引いたものである。

LO の中点を U とし、SU ＝ h_2 とする。

ここで、4点 B、C、H、E を通る平面を考えと切断面は図Ⅴのようになる。

$$EV = \frac{QE}{\sqrt{2}} = \frac{3-a}{\sqrt{2}}$$

よって

$$EV = \sqrt{2} - \frac{3-a}{\sqrt{2}} = \frac{a-1}{\sqrt{2}}$$

VM : SM ＝ UP : PS、PS ＋ SM ＝3より

$$\frac{a-1}{\sqrt{2}} : (3 - PS) = \frac{\sqrt{2}}{2} : PS$$

$$PS = \frac{3}{a}$$

よって

$$h_2 = \sqrt{\frac{9}{a^2} + \frac{1}{2}}$$

また、QT ＝ $2(3-a)$ で、(i) より台形の高さは $\sqrt{\frac{a}{2}+9}$ だから、求める面積は

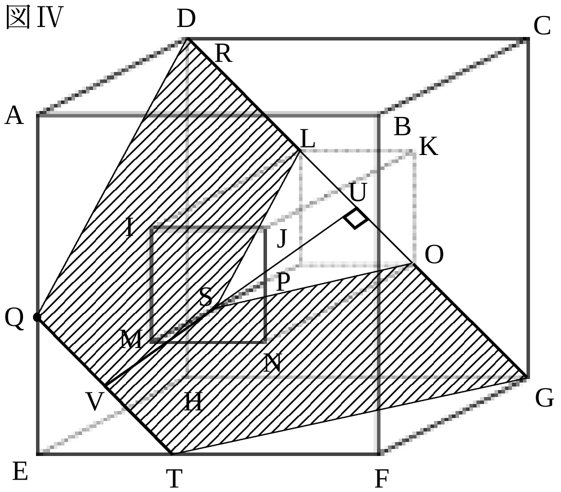
（台形 QTGD）－（三角形 SOL）

$$= \left(\sqrt{2}(3-a) + 3\sqrt{2}\right) \times \sqrt{\frac{a^2}{2}+9} \times \frac{1}{2}$$

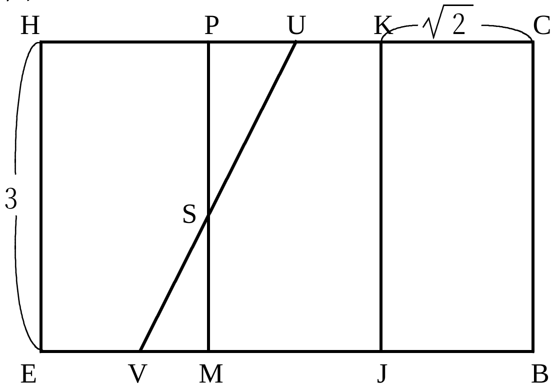
$$- \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{9}{a^2} + \frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(-a^2 + 6a - 1)\sqrt{a^2+18}}{2a}$$

図Ⅳ



図Ⅴ



(i)、(ii) より

$0 \leqq a < 1$ のとき　$2\sqrt{a^2+18}$

$1 \leqq a \leqq 3$ のとき

$$\frac{(-a^2 + 6a - 1)\sqrt{a^2+18}}{2a}$$

[出題の意図]

立体の切断を題材とした問題です。複雑な立体図形も、面と面、辺と辺などの位置関係に着目して考えると理解しやすいと思います。試行錯誤しながら図形の様子を探っていく楽しさを感じて欲しいと思います。

[講評]

301名（364名中）が選択しました。(1)、(2) は比較的考えやすかったようです。一般的な場合の切断面を考える場合は、(1)、(2) を手がかりに考えることも有効です。