平成１７年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　　意　　事　　項

1　問題は，１ページと２ページです。解答用紙は４枚あります。なお，問題４用の解答用紙は，裏面に印刷してあります。

2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，解答用紙の「問題番号」欄に選択した問題番号を記入し，さらにコンテスト番号と氏名も記入してください。

3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。

4　作図をする場合は，定規，コンパスを用いてください。

5　制限時間は３時間です（13：00〜16：00)。６問中４問を選択して、別々の解答用紙に解答してください。

6　トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

1　ある条件を満たすような，すべて異なる数字からなる10桁の自然数を作ることを考えた。次の(1),(2)の問いに答えなさい。

(1) 10桁の自然数を abcdefghij と表すことにする。次の①から⑨までのすべての条件を満たすような10桁の自然数はあるか。あればすべて求め，無ければその理由を述べよ。ただし，a,b,…,j はすべて異なる数字であり，ab,bc,…,ij は２つの数字の積ではなく，10桁から取り出した２桁の数字を表すものとする。

<<条件>>

① ab は２の倍数，　② bc は３の倍数，③ cd は４の倍数，
④ de は５の倍数，　⑤ ef は６の倍数，⑥ fg は７の倍数，
⑦ gh は８の倍数，　⑧ hi は９の倍数，⑨ ij は10の倍数，

(2) 10桁の自然数のうち, １から10までのすべての自然数で割り切れるような自然数を，次の倍数の判定法を利用して作ることにした。

<<９桁の自然数における７の倍数の判定法>>

９桁の自然数を３桁ずつ区切って，左から順に３桁の数字をＡ,Ｂ,Ｃとする。Ａ－Ｂ＋Ｃが７の倍数であるならば，もとの９桁の自然数は７の倍数である。

例：N=123456879のとき，123－456＋879＝546は７の倍数だから，Ｎも７の倍数となる。

(ｱ) 上記の<<９桁の自然数における７の倍数の判定法>>を証明せよ。

(ｲ) 10桁の自然数で, １から10までのすべての自然数で割り切れる数字を１つ求めよ。ただし，10桁の自然数の各桁の数字はすべて異なる数字とする。

2　自然数Ｎが，$N = p^i q^j \cdots t^n$ と素因数分解されるとき，自然数Ｎの約数の総和は
$(1+p+p^2+\cdots+p^i)(1+q+q^2+\cdots+q^j)\cdots(1+t+t^2+\cdots+t^n)$
と求められる。

例えば，$N = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$であるから，約数の総和は
$(1+2+2^2)(1+3)(1+5) = 168$
と求められる。

このことを利用して，約数の総和が252となるような自然数をすべて求めよ。必要であれば下記の参考を利用してもよい。

<<参考：252以下の素数>>

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199,211,223,227,229,233,239,241,251,

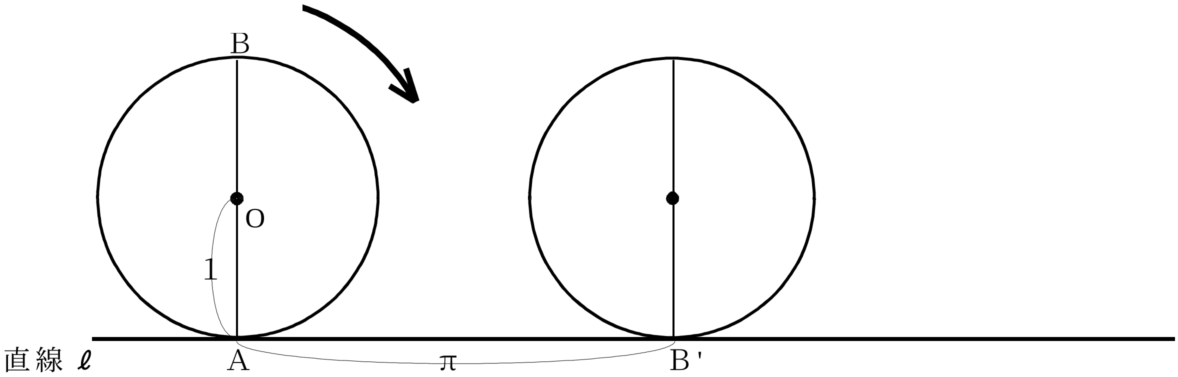
3　ｎ国からなる共和国があり，どの２国も１本の道路のみによってつながっているとする。また，その道路はすべて一方通行である。他の国に直接移動する移動を「直接移動」と呼び，１回だけ他の国を経由する移動を「間接移動」と呼ぶことにする。次の(1),(2)の問いに答えなさい。ただし，ｎは２以上の自然数とする。

(1) ｎ＝３のとき（すなわち、Ａ,Ｂ,Ｃの３つの共和国があるとき），通行可能な道路の向きがどのように設定されていたとしても，少なくとも１つの国は，他のすべての国に「直接移動」または「間接移動」のいずれかの方法で移動できることを示せ。

(2) 任意のｎ国について，通行可能な道路の向きがどのように設定されていたとしても，少なくとも１つの国は，他のすべての国に「直接移動」または「間接移動」のいずれかの方法で移動できることを証明せよ。

4　下図のように、ＡＢを直径とする半径１の円板Ｏが点Ａで直線 ℓ と接している。この円板Ｏを直線 ℓ 上で滑らないように回転させて，点Ｂが初めて直線 ℓ に重なる点を点Ｂ'とした。その結果ＡＢ'の長さはπとなった。

この状態から，定規やコンパスのみを使い，この円板と同じ面積を持つ正方形を作図し，その手順をできるだけ詳しく説明しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。



5　次の(1),(2),(3)の問いに答えなさい。

(1) 2^{2005}を７で割ったときの余りを求めよ。

(2) $3^{2006}+4^{2007}$ を７で割ったときの余りを求めよ。

(3) ｎを正の整数とするとき，$2^n+3^{n+1}+4^{n+2}+5^{n+3}+6^{n+4}$ が７で割り切れるように，正の整数ｎの値を求めよ。

6　１からｎまでの自然数がそれぞれ書かれたカードがｎ枚ある。これらのカードの順番を任意に並べ替え，左から一列に並べてある。このとき，次のような手順１～３に従うことにより，左から小さい順に並べ替える操作を行う。ただし，ｎ≧２とする。

> 手順１：ｉ＝１とする。
> 手順２：左からｉ枚目のカードを見て，そこに書かれた数字をｍとする。
> 　　　　このとき，ｍ＝ｉならば手順３へ進み，ｍ≠ｉならばそのカードと左からｍ枚目のカードを交換し，手順２をもう一度行う。
> 手順３：ｉ＜ｎならば，ｉに１を加えて，それを新たにｉとし手順２に戻る。
> 　　　　ｉ＝ｎならば，操作は終了する。

例：ｎ＝５のとき，カードの操作を図示すると以下のようになる。

<<操作の説明>>

$\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{2}$ → ｉ＝１であるから，左端のカードの数字を見る。ｍ＝３であるから，３と１のカードを入れ替える。

$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{2}$ → ｍ＝ｉ＝１となったのでｉ＝２とし，２枚目のカードを見る。ｍ＝５であるから，５と２のカードを入れ替える。

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ → 並べ替えが完成し，操作が終了する（ｉ＝ｎ＝５）。

次の(1),(2),(3)の問いに答えなさい。

(1) 例にならって，$\boxed{6}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ の順に並んでいるカードを，左から小さい順に並べ替える操作を図示せよ。

(2) すべての操作を行うなかで，手順２で行われる「カードの交換」の総回数をｋとする。ｋの最大値をｎの式で表し，その理由も示せ。

(3) ｋを最大にするような「最初の並び方」は何通りあるか。ｎを用いて表し，その理由も示せ。