平成１７年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

Ⅰ．概　要

平成１０年度から始めた数学コンテストは、今年度で８回目となった。

参加者は３３５名（１８校）で、昨年度より参加者数、参加校数ともに増加した。各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞７名、奨励賞１１名、アイデア賞１８名（昨年は最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞１１名、アイデア賞１４名）であった。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４校とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓の使用も認めている。

参加生徒は３時間集中して取り組んでいた。今年は作図の問題もあり、コンパスと定規を駆使して解答している姿が印象に残った。コンテスト終了後も解答した問題について意見を交わす生徒たちの姿が見られた。昨年度に引き続き参加した生徒の中には、昨年度は思いつかなかった考え方が、本年度は答案の中に盛り込むことができたと話していた生徒もいた。数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を越えて同じ問題を検討することなどは、今後、数学のみならずいろいろな教科を学習していくうえでよい経験になったと思われる。

問題のレベルについては昨年度より若干難化したようだが、答案の中には発想のユニークなものや論理的に整理されたすばらしいものが見られた。今後、この群馬県高校生数学コンテストが生徒にとって数学を楽しむ機会として更に充実していければ幸いである。

○　参加生徒の内訳

学科	普　通　科		総合学科		文理総合学科	理数科		計	
学年	男	女	男	女	男	男	女	男	女
1	１１４	１２	1	1	1	9	1	１２５	１４
2	１１５	５８						１１５	５８
3	２１	2						２１	2
計	２５０	７２	1	1	1	9	1	２６１	７４

Ⅱ．問題及び解答例

1　ある条件を満たすような，すべて異なる数字からなる10桁の自然数を作ることを考えた。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 10桁の自然数を abcdefghij と表すことにする。次の①から⑨までのすべての条件を満たすような10桁の自然数はあるか。あればすべて求め，無ければその理由を述べよ。ただし，a,b,…,j はすべて異なる数字であり，ab,bc,…,ij は２つの数字の積ではなく，10桁から取り出した２桁の数字を表すものとする。

<<条件>>

① ab は２の倍数，② bc は３の倍数，③ cd は４の倍数，
④ de は５の倍数，⑤ ef は６の倍数，⑥ fg は７の倍数，
⑦ gh は８の倍数，⑧ hi は９の倍数，⑨ ij は10の倍数，

(2) 10桁の自然数のうち，１から10までのすべての自然数で割り切れるような自然数を，次の倍数の判定法を利用して作ることにした。

<<９桁の自然数における７の倍数の判定法>>

９桁の自然数を３桁ずつ区切って，左から順に３桁の数字をＡ，Ｂ，Ｃとする。Ａ－Ｂ＋Ｃが７の倍数であるならば，もとの９桁の自然数は７の倍数である。

例：N=123456879のとき，123－456＋879＝546は７の倍数だから，Ｎも７の倍数となる。

(ｱ) 上記の<<９桁の自然数における７の倍数の判定法>>を証明せよ。

(ｲ) 10桁の自然数で，１から10までのすべての自然数で割り切れる数字を１つ求めよ。

ただし，10桁の自然数の各桁の数字はすべて異なる数字とする。

[解答例]

(1) 明らかに，b,d,f,h,j は２の倍数である。特に⑨より j＝0である。

よって，a,c,e,g,i は奇数となり，特に④より e＝5である。

⑤より f＝4。⑥より g＝9。⑦より h＝6。⑧より i＝3。

以上より，a,c は1または7であり，b,d は2または8である。

ｉ）a＝1,c＝7のとき，

（ｱ）b＝2,d＝8のとき，78が４の倍数でないので不適。

（ｲ）b＝8,d＝2のとき，87が３の倍数で72が４の倍数なので条件に適する。

ⅱ）a＝7,c＝1のとき，

（ｱ）b＝2,d＝8のとき，18が４の倍数でないので不適。

（ｲ）b＝8,d＝2のとき，81が３の倍数で12が４の倍数なので条件に適する。

以上より，条件を満たす10桁の自然数は1872549630と7812549630である。

(2) (ｱ) ９桁の自然数をＮとし，３桁ごとに区切って得られる３桁の数字を左から順A,B,Cとする。このとき，

$$
\begin{aligned}
N &= 1000000A + 1000B + C \\
&= (999999+1)A + (1001-1)B + C \\
&= (A - B + C) + 7\times 142857A + 7\times 143B \\
&= (A - B + C) + 7\times (142857A + 143B)
\end{aligned}
$$

以上より，Ａ－Ｂ＋Ｃが７の倍数であるならば，もとの9桁の自然数は７の倍数である（逆も成り立つ）。

(ｲ)求めたい自然数をＭとすると，すべての自然数が１で割り切れるから，Ｍも１で割り切れる。Ｍは10で割り切れるから一の位は0である。同時にＭは2でも5でも割り切れる。

各桁の数字を足すと，0から9までの数字の和だから45となり，これが９で割り切れるからＭも９で割り切れる。同時にＭは３で割り切れる。また，Ｍは偶数だから６でも割り切れることが言えた。

よって，求めたい自然数Ｍは，４で割り切れるから下２桁が４の倍数であり，８で割り切れるから，下３桁は８の倍数である。また，(ｱ)で示した７の倍数の判定法を利用して計算すると，求める値は，2438195760，4753869120などとなる。

[出題の意図]

10桁の異なる自然数を，条件を踏まえて作るというパズル的な要素を持った問題です。条件を満たす数字をただ漠然と見つけようとするだけでは，求めたい数字を特定することは難しいですが，倍数の判定法など数の性質を利用すると，数字の候補を絞り込んでいく方向性が見えてくることでしょう。この問題は，そうした解答の過程を楽しんでもらうことにねらいがあります。

[講評]

252名（335名中）の者が選択しました。(1)は比較的よくできていました。$e=5$，$j=0$ など見つけやすい数字から絞っていくとよいでしょう。その後は2桁の数字なので f～i などはひとつに決まります。(2)(ｱ)倍数の判定法を証明するためには，数式でどのように表せばよいかを考えることから始めるとよいでしょう。(ｲ)倍数の判定法を的確に利用して，できるだけ候補を絞っておき，あとは地道に探すことで求められます。倍数の判定法は自然数の性質として知っていると便利だと思います。

[生徒の答案例]

(2)(ｲ)ある自然数が1,2,･･･，10で割り切れるとき，少なくとも4,7,8,9,10の倍数であればよい。その条件は，

４…下２桁が４の倍数････････①
７…(ｱ)による･･･････････････②
８…下３桁が８の倍数････････③
９…各桁の数の和が９の倍数‥④
10…下１桁が０･･････････････⑤

ここで，1+2+･･･+9=45は９の倍数なので④を満たす。

①③⑤を満たす３桁の数は160,240,320,480,560,640,720,960のいずれかである。…⑥

ここで，879－465+132＝546＝78×7だから，(ｱ)より8794651320は７の倍数であり，⑥よりその他の条件も満たす。よって求める数は8794651320。

2　自然数Nが，$N=p^i q^j \cdots t^n$ と素因数分解されるとき，自然数Nの約数の総和は

$$(1+p+p^2+\cdots+p^i)(1+q+q^2+\cdots+q^j)\cdots(1+t+t^2+\cdots+t^n)$$

と求められる。

例えば，$N=60=2^2\times3\times5$であるから，約数の総和は

$$(1+2+2^2)(1+3)(1+5)=168$$

と求められる。

このことを利用して，約数の総和が252となるような自然数をすべて求めよ。必要であれば下記の参考を利用してもよい。

<<参考：252以下の素数>>

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199,211,223,227,229,233,239,241,251,

[解答例]

p，q は素数，i は自然数とする。

$252=2^2\times3^2\times7=(1+p+\cdots+p^i)(1+q+\cdots+q^j)\cdots$と考えて，252が$(1+p+\cdots+p^i)$で割り切れれば，N が p^i を因数に持つ可能性がある。よって，252が$(1+p+\cdots+p^i)$で割り切れるようなp，iの組を，次のページの表１を利用して小さい順に探していく。

Ⅰ　Nが2^iを因数に持つとすると，表１より$i=1,2,5$のみとなる。

A) $i=1$のとき，$252\div(1+2)=84=2^2\times3\times7$

a)さらに，N が3^iを因数に持つとすると，$i=1$のとき，

$84\div(1+3)=21=3\times7$

$1+p+\cdots+p^i$が21を割り切るような$p(>3)$, iの組は存在しない。

よって，N が p^i を因数に持つことはなく，この場合はあり得ない。

p	1+p	$1+p+p^2$	$1+p+p^2+p^3$	$1+p^2+p^3+p^4$	$1+p^2+p^3+p^4+p^5$	$1+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6$
2	3	7	15	31	63	127
3	4	13	40	121		
5	6	31	156			
7	8	57				
11	12	133				
13	14	183				
17	18					
19	20					

$\boxed{}$は２５２の約数

表１

b)Nが3^iを因数に持たず5^iを因数に持つとすると，i＝１のとき，
$84\div(1+5)=14$
$1+p+\cdots+p^i$が14を割り切るようなp＝13,i＝１のみとなる。
よって,252＝(1+2)(1+5)(1+13)となるから，N＝2×5×13＝130。
c)Nが7^iを因数に持つことはない。
d)Nが3^i,5^iを因数に持たないとする,
ⅰ)p^i　(p≧7，i≧2)を因数に持つことはない。
ⅱ)pを因数に持つとする。
① p＝11のとき，84÷(1+11)＝7。
さらにq(≧11)を因数に持つことはない。
②11より大きい素数p(＜83)に対し1+pで割ると，商が割る数以下になり，他の素数q(＞p)を因数に持つことはない。
③ p＝83のとき，84÷(1+83)＝1
よって,252＝(1+2)(1+83)となるから，N＝2×83＝166。

B)i＝2のとき，$252\div(1+2+2^2)=36$
a)$1+p+\cdots+p^i$が36を割り切るようなp(≧3),i(≧2)の組は存在しない。
よって，Nがp^i(p≧3,i≧2)を因数に持つことはない。
b)Nがp(≧3)を因数に持つとするとき,
ⅰ)p＝3を因数に持つとすると，36÷(1+3)＝9。
1+qが9を割り切るような素数q(＞3)はない。
ⅱ)q＝5を因数に持つとすると，36÷(1+5)＝6。
1+qが6を割り切るような素数q(＞5)はない。
ⅲ)5より大きい素数p(≦34)に対し1+pで割ると，商が割る数以下になり，他の素数q(＞p)を因数に持つことはない。
ⅳ)35は素数ではない。
よってB）の場合は起こりえない。

C)i＝5のとき，$252\div(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)=4$
よって，$252=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3)$となるから，$N=2^5\times3=96$

Ⅱ　Nが2^iを因数に持たないとする。
A)Nが3^iを因数に持つとする。i＝１のとき，252÷(1+3)＝63
$1+p+\cdots+p^i$が63を割り切るようなp(＞3),i(≧1)の組は存在しない。
よってこの場合はない。
B)Nが3^iを因数に持たず5^iを因数に持つとする。i＝１のとき，252÷(1+5)＝42
a)$1+p+\cdots+p^i$が42を割り切るようなp(＞5),i(≧2)の組は存在しない。
b)p(7≦p≦41)を因数に持つとする。
42を1+pで割ると，商が割る数以下になり，他の素数q(＞p)を因数に持つことはない。
c)p＝41のとき，42÷(1+41)＝1
よって，252＝(1+3)(1+41)となるから，N＝5×41＝205。

Ⅲ Nが2^i ,3^i ,5^i を因数に持たないとする。

A)$1+p+\cdots+p^i$ が252を割り切るようなp(≧7),i(≧2)の組は存在しない。

よってp^i(p≧7,i≧2)を因数に持つことはない。

B)p(≧7)を因数に持つとする。

a)p＝11のとき，252÷(1+11)＝21

21を割り切る1+q(q＞11)は存在しない。

b)p＝13のとき，252÷(1+13)＝18

よって，252＝(1+13)(1+17)となるから，N＝13×17＝221。

c)13より大きい素数p(≦251)に対し，1+pで割ると商が割る数以下になり，他の素数q(＞p)を因数に持つことはない。

d)p＝251のとき，252÷(1+251)＝1

よって，N＝251。

以上より求めるNは，N＝96,130,166,205,221,251。

[出題の意図]

「自然数Nの約数の総和を求めなさい。」という問題はよくありますが，逆に「総和がNとなる自然数を求めなさい。」という問題はなじみが薄いと思います。ヒントとして与えられた約数の総和を求める式をどう利用するかがポイントとなります。また，この問題では，場合分けを工夫して漏らさず重複せずに数え上げられる力を要求しています。

[講評]

140名（335名中）の者が選択しました。251をはじめ，２～３個の自然数を見つけ出せた人が多かったようです。252を(1＋　)(1＋　)(1＋　)…の形に変形し数字を見つけていくことに気づき，解答用紙両面を使って正解を導いた答案や，下の解答例のように，表を利用して効率よく解答した答案もありました。いずれにしても，きちんと場合分けして漏らさず重複せずに数え上げることは難しかったようです。

[生徒の答案例]

$252=2^2\times3^2\times7$であるから，252の約数は2,3,4,6,9,12,18,36,7,14,21,28,42,63,84,126,252である。あるp,iに対し，$1+p+\cdots+p^i$（pは素数，iは自然数）の値を表にすると以下のようになる。

i＼p	2	3	5	7	11	13	17	・・・	41	・・・	83	・・・	251
1	**3**	**4**	**6**	8	**12**	**14**	**18**		**42**		**84**		**252**
2	**7**	13	31	57	133	183	252より大きい						
3	15	40	156	400	252より大きい								
4	31	121	781										
5	**63**	364											
6	127												
7	255												

252の約数

上記の表より，約数の総和が252となる自然数は251，83×2，41×5，17×13，3×2^5，2×5×13となる。　（答）251,166,205,221,96,130

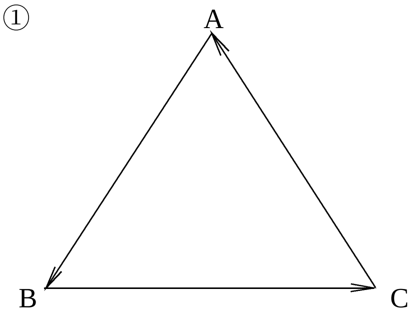
3　ｎ国からなる共和国があり，どの２国も１本の道路のみによってつながっているとする。また，その道路はすべて一方通行である。他の国に直接移動する移動を「直接移動」と呼び，１回だけ他の国を経由する移動を「間接移動」と呼ぶことにする。次の(1),(2)の問いに答えなさい。ただし，ｎは２以上の自然数とする。

(1) ｎ＝３のとき（すなわち，Ａ,Ｂ,Ｃの３つの共和国があるとき），通行可能な道路の向きがどのように設定されていたとしても，少なくとも１つの国は，他のすべての国に「直接移動」または「間接移動」のいずれかの方法で移動できることを示せ。

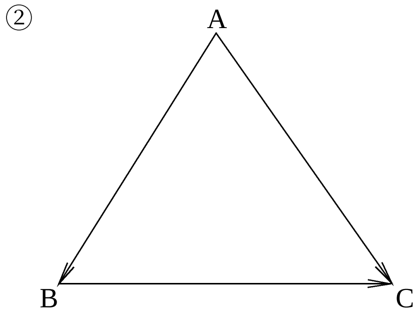
(2) 任意のｎ国について，通行可能な道路の向きがどのように設定されていたとしても，少なくとも１つの国は，他のすべての国に「直接移動」または「間接移動」のいずれかの方法で移動できることを証明せよ。

[解答例]

(1)対称性より，３国間の道路の向きは次の２パターンに分類される。



(循環している場合)



(１本だけ逆向きの場合)

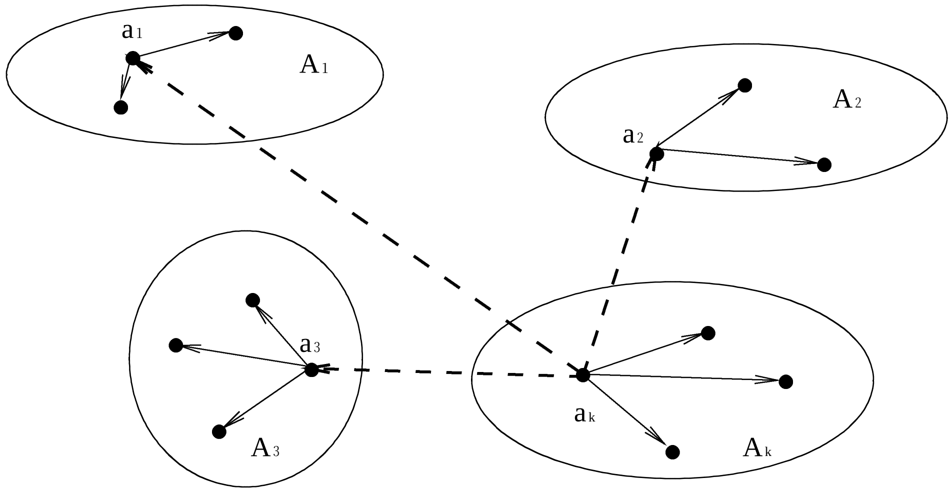
①の場合は３国全てが，②の場合はA国が条件を満たすので題意は示された。

(2) n国の中から適当に１つ選び，その国を a_1 とする。a_1 から直接移動できる国の集まりを A_1 とする。

次に，A_1 以外の国から適当に１つ(a_2 とする)を選び，a_2 から直接移動できる国の集まりを A_2 とする。

以下，同様の操作を続けて，k回目に全ての国が集合 A_k によって尽くされたとする。このとき，a_k は $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ のどれからも直接移動できないから，逆に a_k からは $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ に直接移動することができる。

したがって，a_k からは集合 A_i $(1 \leqq i \leqq k-1)$内の国には a_i を経由して「間接」に，集合 A_k 内の国には「直接」に移動することができるから，a_k が条件を満たす国に該当する。



＜別解＞

Ⅰ　n＝2のとき，２つの国のうち，どちらか１つは必ずもう一方の国に移動できる。

Ⅱ　n＝kのとき，他の全ての国に直接または間接に移動できる国が存在するとし，その国を a_k とする。

ここで，k＋1番目の国 a_{k+1} を加えたとき，

① $a_k \to a_{k+1}$ のとき，a_k 国は a_{k+1} も含めて，他の全ての国に移動可能である。

② $a_k \leftarrow a_{k+1}$ のとき，a_k から直接移動できる国を $b_1, b_2, \cdots$ とし，a_k から間接移動できる国を $c_1, c_2, \cdots$ とする。

ⅰ) $b_i \to a_{k+1}$ となる国 b_i が１つでもあれば a_k が b_i を経由して a_{k+1} に移動できる。

ⅱ) 全ての b_i について，$a_{k+1} \to b_i$ であれば，a_{k+1} が $a_k, b_1, b_2, \cdots$ には直接，$c_1, c_2, \cdots$ には $b_1, b_2, \cdots$ のどれか１つを経由して間接に移動できるから，この場合は a_{k+1} が条件を満たす国に該当する。

以上により，題意は示された。

[出題の意図]

背景となる事実はよく知られているものですが，集合の考え方や数学的帰納法など，様々な論証の方法が考えられます。「間接移動」の定義など，問題文の題意をしっかり理解した上での柔軟な発想力や論証力を問う問題として出題しました。

[講評]

236名(335名中)の者が選択しました。(1)は多くの人が正解しましたが，対称性に着目して効率よく数え上げられた人は少数でした。(2)で正解した者は１名で，数学的帰納法による証明に挑戦し，あと一歩のところまで迫った人が数名いました。「間接移動」の定義（１回だけ寄り道）をしっかり理解できたかどうかが鍵となったようです。

[生徒の答案例]

(1) ①　どこかの国から２本出るだけの道があるとき，その国から全ての国に行ける。

②　全ての国が出入り１本ずつのときは，全ての国から１国へ直接移動でき，もう１国へは間接移動できる。

(2) ｎ＝２のとき，○→○となり，１つの国は全ての国へ行ける。

ｎ＝ｋのとき，全ての国へ行ける国があるとする（これを A 国とする)。

ｎ＝ｋ＋１のとき，新しくできた国を B 国とする。

①　A 国から B 国へ直接行ける。

②　A 国から B 国へ間接で行ける。

③　A 国から B 国へは行けない。

の３パターンがある。

③のとき，A 国から B 国へは行けない。A 国から直接行ける国々（これを C の国々と表す）から B 国へ直接行けない。よって，B 国から A 国および C の国々へは直接行ける。

A 国は全ての国へ直接か間接で行けるので，A 国から直接行ける国と C の国々から直接行ける国しかない。

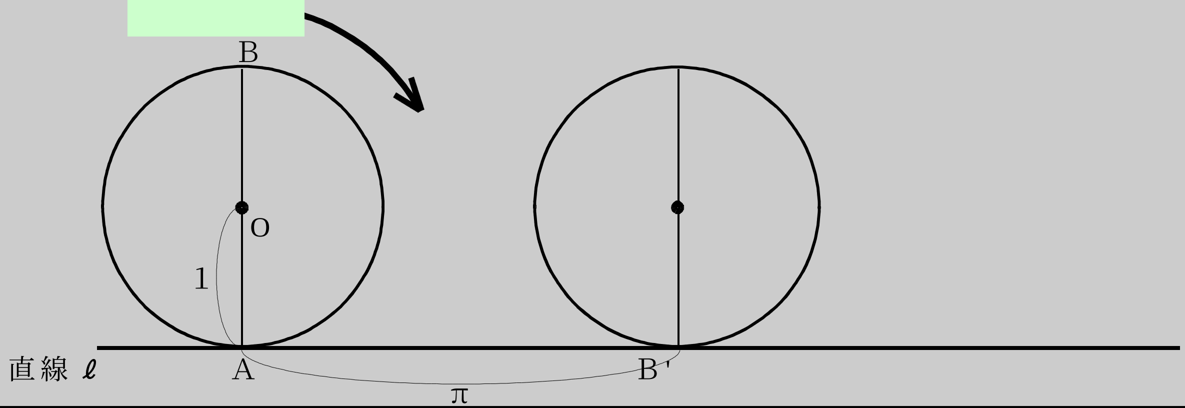
よって，B 国から全ての国へ行ける。

①，②のときは A 国から全ての国に行ける。

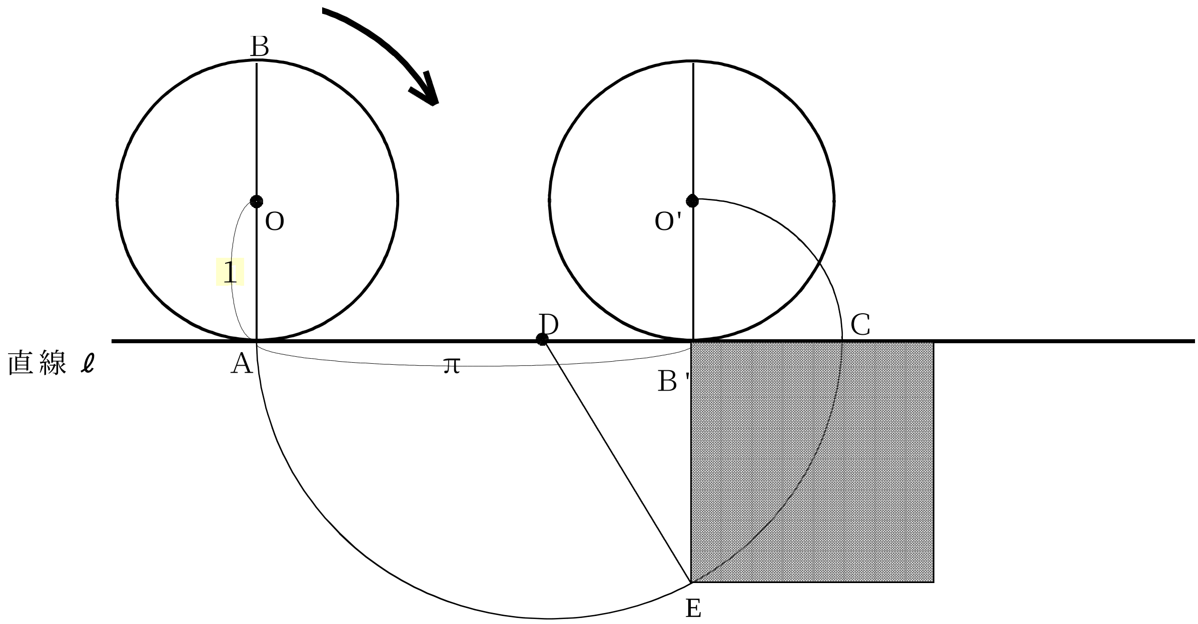
よって，ｎが２以上の自然数のとき，少なくとも１つの国は，他の全ての国に直接あるいは間接移動できることが示された。

4　下図のように，ＡＢを直径とする半径１の円板 O が点Ａで直線 ℓ と接している。この円板 O を直線 ℓ 上で滑らないように回転させて，点Ｂが初めて直線 ℓ に重なる点を点Ｂ'とした。その結果ＡＢ'の長さはπとなった。

この状態から，定規やコンパスのみを使い，この円板と同じ面積を持つ正方形を作図し，その手順をできるだけ詳しく説明しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。



[解答例]
(1)



円の面積がπなので，一辺の長さが $\sqrt{\pi}$ の正方形を作ればよい。

＜手順＞

① 直線 ℓ 上に，B'C＝1となるような点Cを，点Aと反対側にとる。

② ACの中点を点Dとし（コンパス，定規を用いてかける），図のように点Dを中心として半径AD＝CD＝$\dfrac{\pi+1}{2}$ の半円をかく。

③ 点B'で直線 ℓ と直交する直線と，②でかいた半円との交点を点Eとすると，
DE＝$\dfrac{\pi+1}{2}$，DB'＝$\dfrac{\pi+1}{2}-1=\dfrac{\pi-1}{2}$

④ このとき，EB'＝$\sqrt{DE^2-DB'^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\pi+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\pi-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\pi}$ となる。

⑤ EB'を一辺とする正方形が，求める正方形である。

[出題の意図]

コンパスと定規だけを用いて，円と面積が等しい正方形は作図できません。しかし，長さπが与えられると作図できるという意外性がおもしろいと思います。$\sqrt{\pi}$ をどのように作るかが工夫のしどころです。

[講評]

119名(335名中)の者が選択しました。まず，求めたい正方形の一辺の長さが $\sqrt{\pi}$ であることを確認します。$\sqrt{\pi}$ を作る方法として，手順④の数式を利用する方法と，方べきの定理を用いて $x^2=\pi$ という二次方程式を解く方法があります。正解者の中には，このほか座標平面を用いて円の方程式を使ったすばらしい解答もありました。

[生徒の答案例]

＜手順－方べきの定理を利用した例－＞

① 線分AB'上にB'C＝1となる点Cをとる。

② 線分ACとその垂直二等分線の交点を点Dとする。点Dは線分ACの中点。

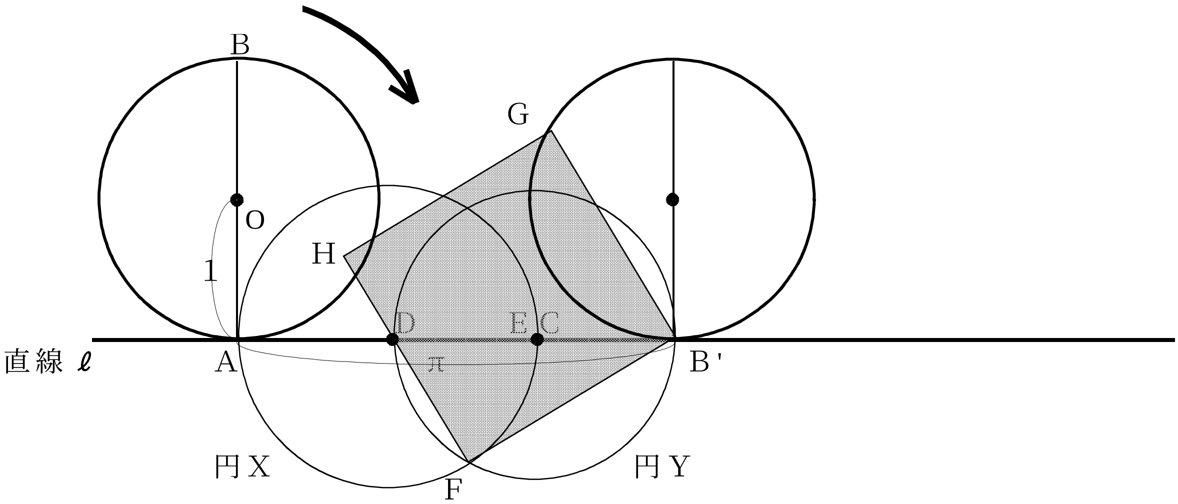
③ 点Dを中心とし，ACを直径とする円Xをかく。

④ 線分B'Dとその垂直二等分線の交点を点Eとする。点Eは線分B'Dの中点。

⑤ 点Eを中心とし，2点B'Dを直径とする円Yをかく。

⑥ 2円X，Yの交点のうち，1つを点Fとする。

ここで，B'Dは円Yの直径なので $\overset{\frown}{B'D}$ 上点Fは，∠B'FD=90°を満たす。よって，点Fで円Xに接する接線となる。



したがって，4点ＡＢ'ＣＦにおいて，方べきの定理より，

$AB' \cdot B'C = B'F^2$

$AB' = \pi$，$B'C = 1$ より，$B'F^2 = \pi$

ゆえに，$B'F = \sqrt{\pi}$。

⑦　図のように点Ｂ'を通り，直線Ｂ'Ｆに垂直な直線上でＢ'Ｇ＝Ｂ'Ｆとなる点Ｇをとる。

⑧　⑦と同様に，点Ｆを通り直線Ｂ'Ｆに垂直な直線上で，ＦＨ＝ＦＢ'となる点Ｈをとる。ただし，点Ｈは直線 ℓ に関し，点Ｇと同じ側にとる。

⑨　４点Ｂ'ＦＨＧを結ぶと，四角形Ｂ'ＦＨＧは一辺の長さが $\sqrt{\pi}$ の正方形となり，その面積は π となり，円の面積と等しい。

5　次の(1),(2),(3)の問いに答えなさい。

(1) 2^{2005}を７で割ったときの余りを求めよ。

(2) $3^{2006}+4^{2007}$ を７で割ったときの余りを求めよ。

(3) ｎを正の整数とするとき，$2^n+3^{n+1}+4^{n+2}+5^{n+3}+6^{n+4}$ が７で割り切れるように，正の整数ｎの値を求めよ。

[解答例]

(1)　2^n を７で割った余りを調べると，

$2^1=2\equiv 2$，$2^2=4\equiv 4$，$2^3=8\equiv 1$，

$2^4=16\equiv 2$，$2^5=32\equiv 4$，$2^6=64\equiv 1$，

$2^7=128\equiv 2$，…

ゆえに，2^n を7で割った余りは，2→4→1を繰り返す(周期3)。

よって，$n=3k+1$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$2^n=2^{3k+1}\equiv 2$

$n=3k+2$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$2^n=2^{3k+2}\equiv 4$

$n=3k$ $(k=1,2,3,\cdots)$のとき，$2^n=2^{3k}\equiv 1$

ゆえに，$2005=3\times 668+1\equiv 2$

よって，求める余りは2である。

(2) (1)と同様に3^n を７で割った余りを調べると，

$3^1=3\equiv 3$，$3^2=9\equiv 2$，$3^3=27\equiv 6$，$3^4\equiv 6\times 3\equiv 4$，$3^5\equiv 4\times 3\equiv 5$，$3^6\equiv 5\times 3\equiv 1$，

$3^7\equiv 1\times 3\equiv 3$，…

ゆえに，3^n を7で割った余りは，3→2→6→4→5→1を繰り返す(周期6)。

よって，$n=6k+1$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$3^n=3^{6k+1}\equiv 3$

$n=6k+2$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$3^n=3^{6k+2}\equiv 2$

$n=6k+3$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$3^n=3^{6k+3}\equiv 6$

$n=6k+4$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$3^n=3^{6k+4}\equiv 4$

$n=6k+5$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$3^n=3^{6k+5}\equiv 5$

$n=3k\quad(k=1,2,3,\cdots)$のとき，$3^n=3^{6k}\ \equiv 1$

また，$4^n=2^{2n}$だから4^nを７で割った余りを調べると，余りは$4\to2\to1$を繰り返す(周期3)。

よって，$n=3k+1(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$4^n=4^{3k+1}\equiv 4$

$n=3k+2(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$4^n=4^{3k+2}\equiv 2$

$n=3k\quad(k=1,2,3,\cdots)$のとき，$4^n=4^{3k}\ \equiv 1$

ゆえに，$2006=6\times334+2\equiv 2$

$2007=3\times669\equiv 1$

よって，$3^{2006}+4^{2007}\ \equiv 2+1=3$から，求める余りは3である。

(3) (1)，(2)と同様に，5^nを７で割った余りを調べると，余りは$5\to4\to6\to2\to3\to1$を繰り返す(周期6)。

よって，$n=6k+1(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$5^n=5^{6k+1}\equiv 5$

$n=6k+2(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$5^n=5^{6k+2}\equiv 4$

$n=6k+3(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$5^n=5^{6k+3}\equiv 6$

$n=6k+4(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$5^n=5^{6k+4}\equiv 2$

$n=6k+5(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$5^n=5^{6k+5}\equiv 3$

$n=6k\quad(k=1,2,3,\cdots)$のとき，$5^n=5^{6k}\ \equiv 1$

6^nを７で割った余りを調べると，余りは$6\to1$を繰り返す(周期2)。

よって，$n=2k+1(k=0,1,2,3,\cdots)$のとき，$6^n=6^{6k+1}\equiv 6$

$n=2k\quad(k=1,2,3,\cdots)$のとき，$6^n=6^{6k+2}\equiv 1$

ここで，$2^n+3^{n+1}+4^{n+2}+5^{n+3}+6^{n+4}\ =T$とおくと，以上よりTを７で割った余りを調べると周期は6で，

$n=6k+1(k=0,1,2,\cdots)$のとき，$T=2^{6k+1}+3^{6k+2}+4^{6k+3}+5^{6k+4}+6^{6k+5}$

$\equiv 2+2+1+2+6=13\equiv 6$

$n=6k+2(k=0,1,2,\cdots)$のとき，$T=2^{6k+2}+3^{6k+3}+4^{6k+4}+5^{6k+5}+6^{6(k+1)}$

$\equiv 4+6+4+3+1=18\equiv 4$

$n=6k+3(k=0,1,2,\cdots)$のとき，$T=2^{6k+3}+3^{6k+4}+4^{6k+5}+5^{6(k+1)}+6^{6(k+1)+1}$

$\equiv 1+4+2+1+6=14\equiv 0$

$n=6k+4(k=0,1,2,\cdots)$のとき，$T=2^{6k+4}+3^{6k+5}+4^{6(k+1)}+5^{6(k+1)+1}+6^{6(k+1)+2}$

$\equiv 2+5+1+5+1=14\equiv 0$

$n=6k+5(k=0,1,2,\cdots)$のとき，$T=2^{6k+5}+3^{6(k+1)}+4^{6(k+1)+1}+5^{6(k+1)+2}+6^{6(k+1)+3}$

$\equiv 4+1+4+4+6=19\equiv 5$

$n=6k\quad(k=1,2,3,\cdots)$のとき，$T=2^{6k}+3^{6k+1}+4^{6k+2}+5^{6k+3}+6^{6k+4}$

$\equiv 1+3+2+6+1=13\equiv 6$

したがって，Tが７で割り切れるのは，$n=6k+3, n=6k+4(k=0,1,2,3,\cdots)$である。

[出題の意図]

2^{27}は９桁の整数であり，よく使われている８桁表示の電卓ではオーバーフローをおこしてしまい計算できません。しかし，このような電卓で扱えない大きな数字であっても，ある数で割った余りについては，電卓などを利用して比較的簡単に一定の規則性を発見することができます。試行錯誤を繰り返して，余りの周期性を発見できたら成功でしょう。(1)，(2)が(3)のヒントになっています。

[講評]

179名(335名中)の者が選択しました。(1)は比較的よくできていました。$2^1,2^2,2^3,\cdots$のそれぞれの数を順番に７で割っていき，余りの周期性を見つけて行く答案が多かったようです。そのほか，正解者の答案には二項定理や合同式を用いたすばらしい解答もありました。試行錯誤を繰り返した結果を表などにまとめると，余りの周期性を発見しやすくなります。(2)，(3)は，(1)の考え方を利用するとよいでしょう。

[生徒の答案例]

(1)　二項定理を用いて，

$2^{2005}=2^{3\times668+1}=8^{668}\cdot2=(7+1)^{668}\cdot2$

$=2(7^{668}+668\cdot7+\cdots+668\cdot7)+2$

よって，求める余りは2である。

(2)　(1)と同様に二項定理を用いて,

$3^{2006}=3^{6\times334+2}=729^{334}\cdot9=9(728+1)^{334}$

$=9(728^{334}+334\cdot728^{333}+\cdots+334\cdot728+1)$

$=9(728^{334}+334\cdot728^{333}+\cdots+334\cdot728)+9$

728＝7×104より7の倍数だから, 求める余りは2である。

$4^{2007}=2^{4014}=2^{3\times1338}=8^{1338}=(7+1)^{1338}$

$=(7^{1338}+1338\cdot7^{1337}+\cdots+1338\cdot7+1)$

$=(7^{1338}+1338\cdot7^{1337}+\cdots+1338\cdot7)+1$

よって, 求める余りは1である。

したがって, $3^{2006}+4^{2007}$ を７で割った余りは3である。

(3)　$2^n, 3^n, 4^n, 5^n, 6^n$ を７で割った余りは, 整数k(≧0)を用いて次の表のように周期的に変化する。

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
2^n	1	2	4	1	2	4
3^n	1	3	2	6	4	5
4^n	1	4	2	1	4	2
5^n	1	5	4	6	2	3
6^n	1	6	1	6	1	6

例)n＝6kのとき, 余りの和は13

n＝6k, 6k+1, 6k+2, …, 6k+5まで変化させたとき, $2^n+3^{n+1}+4^{n+2}+5^{n+3}+6^{n+4}$ を７で割ったときの余りの合計は次の表のようになる。

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
余りの合計	13	13	18	14	14	19

よって, 余りの合計が７で割り切れればよいからn＝6k+3, 6k+4(k=0, 1, 2, 3, …)。

6　１からｎまでの自然数がそれぞれ書かれたカードがｎ枚ある。これらのカードの順番を任意に並べ替え, 左から一列に並べてある。このとき, 次のような手順１～３に従うことにより, 左から小さい順に並べ替える操作を行う。ただし, ｎ≧２とする。

手順１：ｉ＝１とする。
手順２：左からｉ枚目のカードを見て, そこに書かれた数字をｍとする。
　　　　このとき, ｍ＝ｉならば手順３へ進み, ｍ≠ｉならばそのカードと左からｍ枚目のカードを交換し, 手順２をもう一度行う。
手順３：ｉ＜ｎならば, ｉに１を加えて, それを新たにｉとし手順２に戻る。
　　　　ｉ＝ｎならば, 操作は終了する。

例：ｎ＝５のとき, カードの操作を図示すると以下のようになる。

<<操作の説明>>

$\boxed{3}$　$\boxed{5}$　$\boxed{1}$　$\boxed{4}$　$\boxed{2}$　→　ｉ＝１であるから, 左端のカードの数字を見る。ｍ＝３であるから, ３と１のカードを入れ替える。

$\boxed{1}$　$\boxed{5}$　$\boxed{3}$　$\boxed{4}$　$\boxed{2}$　→　ｍ＝ｉ＝１となったのでｉ＝２とし, ２枚目のカードを見る。ｍ＝５であるから, ５と２のカードを入れ替える。

$\boxed{1}$　$\boxed{2}$　$\boxed{3}$　$\boxed{4}$　$\boxed{5}$　→　並べ替えが完成し, 操作が終了する（ｉ＝ｎ＝５）。

次の(1), (2), (3)の問いに答えなさい。

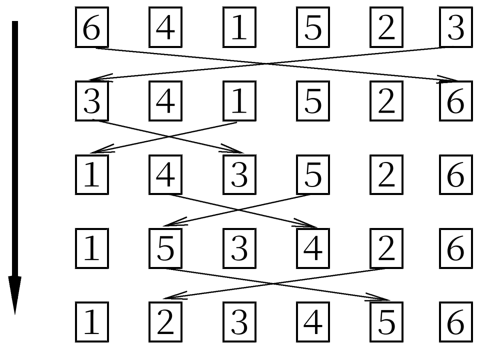
(1) 例にならって，$\boxed{6}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ の順に並んでいるカードを，左から小さい順に並べ替える操作を図示せよ。

(2) すべての操作を行うなかで，手順２で行われる「カードの交換」の総回数をｋとする。ｋの最大値をｎの式で表し，その理由も示せ。

(3) ｋを最大にするような「最初の並び方」は何通りあるか。ｎを用いて表し，その理由も示せ。

[解答例]

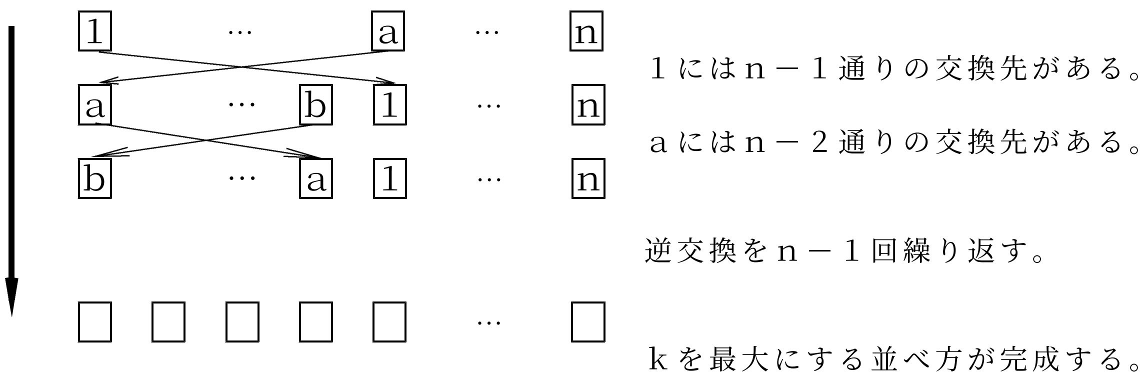
(1)次の通り。



(2) １回の交換を行うと，正しいカードの位置が必ず１つまたは２つできる。ここで，２つできるときは交換の結果としてｍ＝ｉとなるときであり, 例における１回目の交換がそれにあたる。したがって，ｋが最大値となるのは各回の交換により正しいカードの位置が１つずつ増えていく場合である。つまり，ｉ＝１のまま交換を続け最後にｍ＝ｉ＝１となった時点で終了するときｋは最大となる。このとき，１以外のカードがｎ－２回の交換により正しい位置に移動し, ｎ－１回目に１が先頭に来て終了となる。したがってｋの最大値は，ｎ－１である。

(3) (2)より，すでに整列している状態から逆にｎ－１回の交換を行うことによって，ｋを最大にする並べ方が作れることがわかる。まず，１のカードが交換可能な場所はｎ－１カ所であり，そのとき交換したカードをａとし，次にａのカードを交換する（下図参照)。すでに交換した１のカード以外で交換可能な場所はｎ－２カ所である。この操作をｎ－１回行うことによって得られた並べ方は, 逆の操作をたどることによってｋが最大となる整列操作を行うことができる。

したがって，求める並べ方は　(n-1)(n-2)(n-3)…3･2･1＝(n-1)！である。



[出題の意図]

コンピュータを使ってある目的を達成するための処理手順のことを「アルゴリズム」と言います。本問では，簡単な並べ替え（ソーティング）のアルゴリズムについて，その性質を数学的な立場から解析・考察することを目的としました。具体例から類推して，それを論理的に示すことで, 数学的な発想の良さを感じてもらうための出題でもあります。

[講評]

263名(335名中)の者が選択しました。(1)は，具体的で取り組みやすい問題であり，よくできていました。(2)では，正しい位置に移動するカードの枚数を数え上げるとよいでしょう（下の答案例参照)。(3)は一つのアイデアとして，すでに並び終わった状態からｎ－１回の操作で逆に交換していくという方法があります。その際，それぞれのカードを交換することのできる場所が何通りあるかを順に考えていくと，(ｎ－１)！にたどり着けます。

[生徒の答案例]

(2) ｉ番目のカードの番号がｍで，左からｍ番目のカードがｉだったとき，この２枚の交換が行われ，２枚とも正しい位置に移る。ｋが最大となるとき，このような交換が最後だけ起これればよい。つまり，最後までｉ＝１ならばよい。

したがって，ｋの最大値はカードの枚数より１だけ小さいので，ｋ＝ｎ－１。

(3) 条件を満たすカードの並べ方を考える。

① 左端の位置には１以外のカードが置けるのでｎ－１通り。この位置においたカードの数をａとする。

② 左からａ番目の位置には，１とａを置くことができない。なぜなら，１を置くと第１回目の操作でａと１を交換することになり，(2)に反するからである。また，ａはすでに左端に置いたので置くことはできない。したがって，この位置に置けるカードはｎ－２通りである。この位置に置いたカードをｂとする。

③ ②と同様に，左からｂ番目の位置に置けるカードは１，ａ，ｂ以外のｎ－３通り。以上のように繰り返して，最後の２ヵ所の置き方が１通りとなる。これで，条件を満たす「最初の並べ方」が完成する。

よって，求める並べ方は，

$$(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=(n-1)!$$

である。