

平成16年度

群馬県高校生

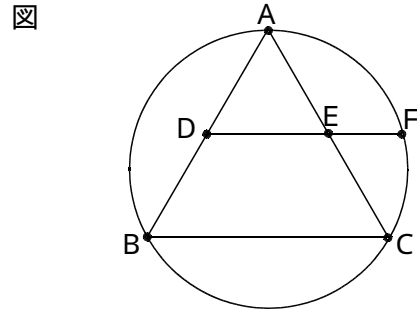
数学コンテスト

注 意 事 項

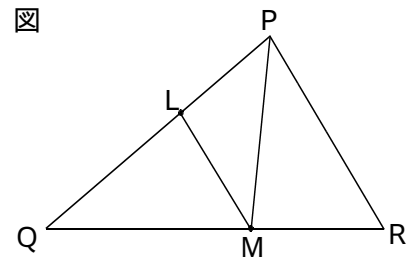
- 1 問題は、1ページと2ページです。解答用紙は4枚あります。なお、問題5用の解答用紙は、裏面に印刷してあります。
- 2 解答は、すべて解答用紙に記入してください。また、解答用紙の「問題番号」欄に選択した問題番号を記入し、さらにコンテスト番号と氏名も記入してください。
- 3 必要があれば、電卓を用いてもかまいません。また、問題用紙を折ったり、切ったりしてもかまいません。
- 4 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。
問題5で図示する場合は、フリーハンドでかまいません。
- 5 制限時間は3時間です(13:00~16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 6 トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

- 1 次の(1), (2)の問いに答えなさい。
- (1) 7^{2004} の末尾の数字(一の位の数)を求めよ。
- (2) 7^{2004} の末尾の3つの数字(下3桁の数)を求めよ。

- 2 次の(1), (2)の問いに答えなさい。
- (1) 図において, 3点A, B, Cは円周上の点であり, 三角形ABCは正三角形である。
 また, 点Fは, 辺AB, ACの中点をそれぞれ点D, Eとしたときの, 半直線DEと円との交点である。
 このとき, 線分の比DE : EFを求めなさい。



- (2) 図は, 三角形PQRの辺PQ, QR上に, 2点L, Mを, PRにLMかつ三角形PMRと三角形LQMとの面積が等しくなるように, とったものである。
 このとき, 線分の比QM : MRを求めなさい。



- 3 あるバス停では, バスが1時間に3回停まる。その時刻は毎時間 p 分, q 分, r 分である。($0 < p < q < r < 60$)
 また, このバス停は常に混んでいて, 必ずバスを1台見送らなければ乗れない状況である。
 時刻表を知らない人が, このバス停でバスに乗るときの, 平均の待ち時間は何分か, 求めなさい。
 ただし, 人もバスもバス停にちょうど 時 分に到着するものとし, バスの乗降にかかる時間は考えないものとする。

注 意

1 p 分にバス停に着いた人は, p 分発のバスを見送るので, q 分発のバスに乗ることとなる。

2 必要があれば, 次の公式を利用しても構わない。(n は自然数)


$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

- 4 自然数 n (10進法で表された数)の各桁の数の積が $n^2 - 20n - 63$ となるときの, n の値を求めなさい。
 <例> $n = 34$ のとき
 各桁の数の積は12, $n^2 - 20n - 63 = 413$ となり, $n = 34$ は求める数ではない。

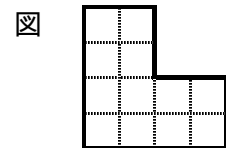
- 5 下記のように「L字型タイル」(以下,「タイルL」とする。)を定める。
 次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

L字型タイル

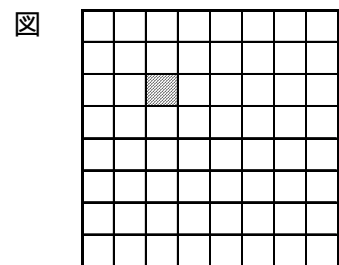
一辺の長さが2 cmの正方形を縦,横ともに1 cm 間隔に区切った四つのマスから,一つの正方形のマスを取り除いた後の図形。



- (1) 図 は,タイルLと相似な図形で,タイルLとの相似比は,1 : 2である。この図形はタイルLで隙間なく埋めることができることを示しなさい。(図 は,1 cm 間隔に引いた波線を示している。)



- (2) 図 は,一辺の長さが8 cmの正方形を縦,横ともに1 cm 間隔に区切ったマスから,正方形のマス(■)を一つ取り除いた後の図形を示している。
 この図形はタイルLで隙間なく埋めることができることを示しなさい。



- (3) 一辺の長さが 2^n cmの正方形を(2)のように,縦,横ともに1 cm 間隔に区切り,任意の位置から正方形のマス(■)を一つ取り除いた後の図形は,タイルLで隙間なく埋めることができることを説明しなさい。(ただし, n は自然数である。)

注 意

1 2^n は2を n 回掛けたものである。
 たとえば, $n = 4$ のとき, $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ となる。
 2 「任意の位置」とは,「どこの位置でも」という意味。

- 6 面積 S の三角形 PQR の内部にある長方形 $ABCD$ の面積を T とするとき, 次の(1), (2)の問いに答えなさい。
 ただし,長方形の頂点が三角形の边上の点であってもよい。
 (1) $BC \parallel QR$ のとき, $2T = S$ となることを証明しなさい。(図)

- (2) 三角形の各辺と長方形の各辺とが平行とならない場合, $2T < S$ となることを証明しなさい。(図)

