平成１６年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

Ⅰ．　概　要

平成１０年度から始めた数学コンテストは、今年度で７回目となった。参加者は２８１名（１７校）で、昨年度より参加者数、参加校数はやや減少したものの、本事業は定着してきたものと考える。

また、学科については、普通科、理数科、農業科、商業科、中等教育学校からの参加があり、中には、２年、３年連続して参加した者も見られた。

各受賞者数は、最優秀賞１名、優秀賞８名、奨励賞１１名、アイデア賞１４名（昨年は最優秀賞２名、優秀賞７名、奨励賞１３名、アイデア賞７名）であった。

受賞者の中で、最優秀賞を受賞した生徒は、昨年のいきいき高校生海外派遣者であり、優秀賞を受賞した生徒の中には１年生もいた。

また、各受賞者の中には昨年に引き続き受賞した者も見られた。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し３時間で解答するものであり、電卓の使用も認めている。

参加生徒は３時間集中して取り組んでおり、コンテスト終了後も解答した問題について意見を交わす生徒たちの姿があちこちに見られた。中には、後輩に先輩が答えている姿もあった。

数学の問題を３時間集中して考えることや、学年を超えて同じ問題を検討することなどは、今後、数学のみならず色々な教科を学習していくうえで、よい経験になったと思われる。

答案については、発想のユニークなものや論理的に整理されたすばらしいものが見られた反面、答えのみや式変形だけのもの、何を説明したいのかわからないもの等も見られた。全体として、考察した内容を的確に表現する力が求められる。

今後、この群馬県数学コンテストが、生徒にとって数学を楽しむ機会として、更に充実していけば幸いである。

○　参加生徒の内訳

学科	普　通　科		理数科		農業科		商業科		中　等		計	
学年	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
1	１１８	２５					1				１１９	２５
2	７５	２５		2					3		７８	２７
3	３０				2						３２	
計	２２３	５０		2	2		1		3		２２９	５２

Ⅱ．　問題及び解答例

1　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　7^{2004}の末尾の数字(一の位の数)を求めよ。

(2)　7^{2004}の末尾の３つの数字(下３桁(けた)の数)を求めよ。

［解答例］

(1)　$7^1=7$，$7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$より，４乗すると一の位の数が１となる。

一方，$2004=501\times4$より，$7^{2004}=(7^4)^{501}$となる。

以上より，7^{2004}の一の位の数は，１である。

(2)　$7^{2004}=(7^4)^{501}$より，$(7^4)^2$，$(7^4)^3$，$(7^4)^4$，$(7^4)^5$について，1000で割ったときの余りを考える。ある自然数，a_0，a_1，a_2，a_3，a_4が存在して，

$7^4=a_0\times1000+401$，$(7^4)^2=a_1\times1000+801$，$(7^4)^3=a_2\times1000+201$，

$(7^4)^4=a_3\times1000+601$，$(7^4)^5=a_4\times1000+1$とかける。

したがって，

$7^{2004}=(7^4)^{501}=((7^4)^5)^{100}\times7^4=(a_4\times1000+1)^{100}\times(a_0\times1000+401)$となるので，求める数は，401となる。

［出題の意図］

７という数には不思議な性質があります。７を順次掛けていくと，その単純な作業のなかで，末尾の数字にある一定の規則性を見いだすことができます。

今回は末尾の数字(一の位の数)，末尾の３つの数字(下３桁の数)についての出題としました。

［講評］

265名（281名中）の者が選択しました。(1)は比較的よくできていました。(2)についても，周期的に同じ数字が現れることに気づいた解答が多く見られました。しかし，周期的に同じ数字が現れることを示した解答は，あまり見られませんでした。

また，電卓を使うにも，工夫しないとオーバーフローを起こしてしまいます。

［答案例］

下３桁の数が，それぞれ m，n（$0\leqq m$，$n\leqq999$，m，$n\in N$)となる自然数は，a，bを負でない数とすると，それぞれ，$1000a+m$，$1000b+n$とおける。

$(1000a+m)(1000b+n)=1000(1000ab+an+bm)+mn$より，任意の自然数の積の下３桁の数は，それぞれの数の下３桁の数の積と一致する。

このことをもとに，電卓で7^{20}までの下３桁の数を求めると次のようになる。

数	7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	7^{10}	7^{11}	7^{12}
下３桁	7	49	343	401	807	649	543	801	607	249	743	201

数	7^{13}	7^{14}	7^{15}	7^{16}	7^{17}	7^{18}	7^{19}	7^{20}
下３桁	407	849	943	601	207	449	143	1

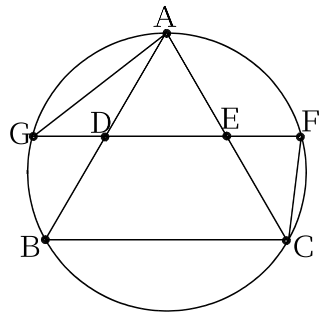
ここで，$7^{2004}=(7^{20})^{100}\times7^4$であり，$7^{20}$，$7^4$の下３桁の数は，それぞれ１，401だから$7^{2004}$の下３桁の数は，$1^{100}\times401$の下３桁の数に一致するから，求める答えは，

(1)は１，(2)は401

2　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

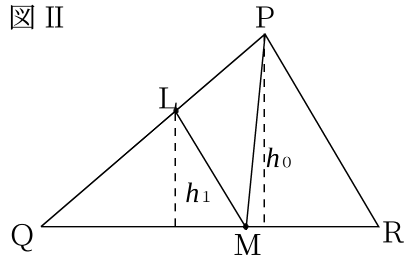
(1) 図Ｉにおいて，３点Ａ，Ｂ，Ｃは円周上の点であり，三角形ＡＢＣは正三角形である。
　また，点Ｆは，辺ＡＢ，ＡＣの中点をそれぞれ点Ｄ，Ｅとしたときの，半直線ＤＥと円との交点である。
　このとき，線分の比ＤＥ：ＥＦを求めなさい。

図Ｉ



(2) 図Ⅱは，三角形ＰＱＲの辺ＰＱ，ＱＲ上に，２点Ｌ，Ｍを，ＰＲ∥ＬＭかつ三角形ＰＭＲと三角形ＬＱＭとの面積が等しくなるように，とったものである。
　このとき，線分の比ＱＭ：ＭＲを求めなさい。

図Ⅱ



［解答例］

(1) 直線ＤＦと円との交点のうち，Ｆ以外の点をＧとする。

　ＤＥ＝ x，ＥＦ＝１とおくと，対称性からＤＧ＝１となる。

△ＡＧＥ∽△ＦＣＥ（∵∠ＡＧＥ＝∠ＦＣＥ（円周角が等しい），∠ＡＥＧ＝∠ＦＥＣ）であるから，ＡＥ：ＥＧ＝ＦＥ：ＥＣ

　よって，$x:(1+x)=1:x$　　∴ $x^2=x+1$　　∴ $x^2-x-1=0$

　方程式を解くと，　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ より，

$$ＤＥ：ＥＦ=\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$$

(2) ＱＭ＝ x，ＭＲ＝１とおく。　頂点Ｐから辺ＱＲに引いた垂線の長さを h_0，点Ｌから辺ＱＲに引いた垂線の長さを h_1 とする。

　△ＰＱＲ∽△ＬＱＭより，$h_0:h_1=(1+x):x$ …①

　△ＰＭＲ＝△ＬＱＭより，$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h_0=\frac{1}{2}xh_1$ …②

よって，①，②より，

$xh_1:h_1=(1+x):x$　　∴ $x:1=(1+x):x$

∴ $x^2=x+1$　　∴ $x^2-x-1=0$

方程式を解くと，　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ より，

$$ＱＭ：ＭＲ=\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$$

［出題の意図］

　黄金比は，人間が美しさや調和を考える上で大きな要素の一つです。パルテノン神殿にもこの黄金比が使われています。数学では，フィボナッチ数列等に関係しています。

　図形の相似を利用し，二次方程式を作り，その解を求めることによって線分の長さや比が簡単に求められます。黄金比に関心を持つとともに，数学的な見方・考え方を体験する場として出題しました。(1)，(2)ともに同じ比となるところがおもしろいと思います。

［講評］

　142名の者が選択しました。予想では，もっと多くの者が選択すると思っていたので，意外でした。正五角形の対角線の交点の比が，黄金比となることはよく知られています。

(1)，(2)以外にも黄金比になるものがあります。是非，考えてみてください。
(1)は補助線を引いて三角形の相似を用いた解答が多く見られましたが，他にも，円の半径を r として三平方の定理を用いて解くこともできます。

［答案例］

(1) 円の半径を r とすると，ＢＣ＝$\sqrt{3}\,r$

中点連結定理より，２ＤＥ＝ＢＣからＤＥ＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$

ＤＥの中点をＨとすると，直角三角形ＯＦＨにおいて

$OF^2=OH^2+HF^2$ より，$HF^2=r^2-\left(\frac{1}{4}r\right)^2$　　よって，ＨＦ＝$\dfrac{\sqrt{15}}{4}r$

ＥＦ＝ＨＦ－ＥＨ＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}-1)r$

よって，ＤＥ：ＥＦ＝２：($\sqrt{5}$－１)

(2) ∠ＬＭＱ＝∠ＰＲＭ＝θとする。

△ＭＬＱ＝$\frac{1}{2}$ＭＬ・ＭＱ sin θ，　△ＲＰＭ＝$\frac{1}{2}$ＲＰ・ＲＭ sin θより

ＭＬ・ＭＱ＝ＲＰ・ＲＭより，ＭＬ：ＰＲ＝ＲＭ：ＭＱ…①

一方，ＬＭ∥ＰＲより，ＬＭ：ＰＲ＝ＱＭ：ＱＲ…②

①，②より，ＱＭ：ＱＲ＝ＲＭ：ＭＱ

こので，ＭＱ＝１，ＭＲ＝xとおくと，

$1:(x+1)=x:1$　　よって，$x^2+x-1=0$

これを解いて，ＱＭ：ＭＲ＝２：(－１＋$\sqrt{5}$)

3　あるバス停では，バスが１時間に３回停まる。その時刻は毎時間 p 分，q 分，r 分である。（$0 \leqq p < q < r < 60$）

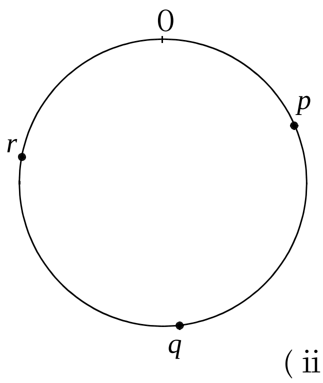
また，このバス停は常に混んでいて，必ずバスを１台見送らなければ乗れない状況である。

時刻表を知らない人が，このバス停でバスに乗るときの，平均の待ち時間は何分か，求めなさい。

ただし，人もバスもバス停にちょうど□時○○分に到着するものとし，バスの乗降にかかる時間は考えないものとする。

> 注　意
>
> １　p 分にバス停に着いた人は，p 分発のバスを見送るので，q 分発のバスに乗ることとなる。
>
> ２　必要があれば，次の公式を利用しても構わない。（nは自然数）
>
> $$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

［解答例］



１時間の周期で待ち時間は同じになるので，x 分にバス停に着いたとして，次の３つの場合について考える。

$$\begin{cases} (\mathrm{i}) & p < x \leqq q \\ (\mathrm{ii}) & q < x \leqq r \\ (\mathrm{iii}) & r < x \leqq 60+p \end{cases}$$

（ⅰ）のとき，待ち時間の合計（$=h_1$）は，$a=r-q$ とおくと，

$h_1=a+(a+1)+\cdots+(a+(q-p-1))$　…①

（ⅱ）のとき，待ち時間の合計（$=h_2$）は，$b=60+p-r$ とおくと，

$h_2=b+(b+1)+\cdots+(b+(r-q-1))$　…②

（ⅲ）のとき，待ち時間の合計（$=h_3$）は，$c=q-p$ とおくと，

$h_3=c+(c+1)+\cdots+(c+(60+p-r-1))$　…③

ここで，

$h_1=a+(a+1)+\cdots+(a+(q-p-1))$

$\quad =ac+1+2+\cdots+(c-1)=ac+\frac{1}{2}c(c-1)$

$h_2=b+(b+1)+\cdots+(b+(r-q-1))$

$\quad =ab+1+2+\cdots+(a-1)=ab+\frac{1}{2}a(a-1)$

$h_3=c+(c+1)+\cdots+(c+(60+p-r-1))$

$\quad =bc+1+2+\cdots+(b-1)=bc+\frac{1}{2}b(b-1)$

よって，$h_1+h_2+h_3=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca-\frac{1}{2}(a+b+c)$

$\quad =\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca))-\frac{1}{2}(a+b+c)$

$\quad =\frac{1}{2}(a+b+c)^2-\frac{1}{2}(a+b+c)$

$a+b+c=(r-q)+(60+p-r)+(q-p)=60$ より，

$h_1+h_2+h_3=\frac{1}{2}(a+b+c)^2-\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(60)^2-\frac{1}{2}(60)=\frac{1}{2}60(60-1)$

より，$(h_1+h_2+h_3)\div 60=29.5$　　よって，29.5分

［出題の意図］

電車やバスの待ち時間は気になるものです。待ち時間という身近な例を題材として，予想（30分かな，と思った人もいると思います。）と実際との差を検証することも，数学の取組の一つと考えます。

また，工夫次第では，計算が楽になるというのも，この問題のおもしろいところです。

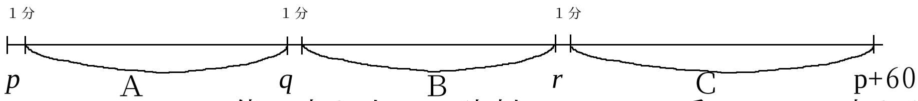
［講評］

133名の者が選択しました。待ち時間の平均について気づけば，考え方はさほど難し

くはないと思います。計算にだいぶ苦労していたようです。ちょっとした工夫で計算も楽になります。

［答案例］

待ち時間は１時間の周期で同じになるので，特定の１時間の間にバス停に来た人を調べればよい。



Aにおいてバス停に来た人は，時刻 r にバスに乗るから，来た時刻を k とすると，待ち時間は　$r-k\,(k=p+1,\ p+2,\ \cdots,q-1,\ q)$

Bにおいてバス停に来た人は，時刻 $p+60$ にバスに乗るから，来た時刻を l とすると，待ち時間は　$p+60-l\,(l=q+1,\ q+2,\ \cdots,r-1,r)$

Cにおいてバス停に来た人は，時刻 $q+60$ にバスに乗るから，来た時刻を m とすると，待ち時間は　$q+60-m\,(m=r+1,\ r+2,\cdots,\ p+59,\ p+60)$

したがって，求める平均の待ち時間は

$$\frac{1}{60}\left\{\sum_{k=p+1}^{q}(r-k)+\sum_{l=q+1}^{r}(p+60-l)+\sum_{m=r+1}^{p+60}(q+60-m)\right\}$$

$$=\frac{1}{60}\left\{\sum_{k=1}^{q-p}(r-p-k)+\sum_{l=1}^{r-q}(p-q+60-l)+\sum_{m=1}^{p-r+60}(q-r+60-m)\right\}=29.5$$

4　自然数n(10進法で表された数)の各桁の数の積が$n^2-20n-63$となるときの，nの値を求めなさい。
＜例＞　n＝34のとき
各桁の数の積は12，$n^2-20n-63=413$となり，n＝34は求める数ではない。

［解答例］
4　xが一桁の自然数のときは，各桁の数の積と x とは一致する。
一方，x を n 桁($n>2$)の自然数とし，各桁の数を最高位の数から順に a_1，a_2，…a_n，とすると，$x=a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_n$　と表され，
$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\leqq a_1\cdot9^{n-1}<a_1\cdot10^{n-1}\leqq a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+\cdots+a_n$　が成り立つ。
以上から，自然数 x の各桁の数の積は x を超えない。
条件から各桁の数の積が $n^2-20n-63$であることから，

$$\begin{cases} n^2-20n-63>0 & \cdots① \\ n^2-20n-63\leqq n & \cdots② \end{cases}$$ が成り立つ。

①から　$n>10+\sqrt{163}>22$

②から　$0<n\leqq\dfrac{21+\sqrt{693}}{2}<24$

よって，$22<n<24$
$n=23$のとき，$n^2-20n-63=6$となるので，求める数は，$n=23$

［出題の意図］
整数、二次不等式に関する出題です。nとして，いろいろな数値を計算することで、「自然数 x の各桁の数の積は x を超えない」ということに気づいたでしょうか。気づいたことを証明する，ということも数学的な活動だと思います。

［講評］
206名の者が選択しました。問題の例が，ヒントになってしまったようです。n＝23はすぐに見つかったようです。しかし，答案の多くは，$n=23$だけであることの説明に欠けていました。見つかることは大切なことですが，吟味する姿勢も大切です。

［答案例］
条件から，$n^2-20n-63>0$　…①
$n<10-\sqrt{163}$，$10+\sqrt{163}<n$　　よって，$23\leqq n$
(1) nが２桁の数のとき，
$81\geqq n^2-20n-63$…②　が成り立つ
②の不等式を解くと，$10-\sqrt{244}\leqq n\leqq10+\sqrt{244}$
よって，$23\leqq n\leqq25$　計算して $n=23$
(2) nが３桁以上の数のとき，$m\geqq3$ の m に対し

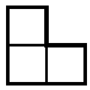
$$\begin{aligned}(10^{m-1})^2-20\cdot10^{m-1}-9^m &>(10^{m-1})^2-20\cdot10^{m-1}-10^m\\ &=(10^{m-1})^2-30\cdot10^{m-1}\\ &=10^{m-1}(10^{m-1}-30)>0\end{aligned}$$

よって，３桁以上の数 n に対し，$n^2-20n-63$の値は各桁の数の積を超えるので題意を満たさない。

5　下記のように「Ｌ字型タイル」(以下，「タイルＬ」とする。)を定める。
次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

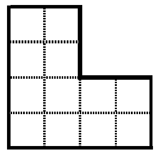
Ｌ字型タイル

一辺の長さが２ cm の正方形を縦，横ともに１ cm 間隔に区切った四つのマスから，一つの正方形のマスを取り除いた後の図形。



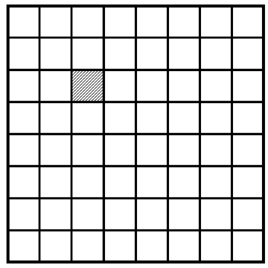
(1) 図Ⅰは，タイルＬと相似な図形で，タイルＬとの相似比は，１：２である。この図形はタイルＬで隙間なく埋めることができることを示しなさい。（図Ⅰは，１ cm 間隔に引いた波線を示している。）

図Ⅰ



(2) 図Ⅱは，一辺の長さが８ cm の正方形を縦，横ともに１ cm 間隔に区切ったマスから，正方形のマス（ ▨ ）を一つ取り除いた後の図形を示している。
　この図形はタイルＬで隙間なく埋めることができることを示しなさい。

図Ⅱ



(3) 一辺の長さが 2^n cm の正方形を(2)のように，縦，横ともに１ cm 間隔に区切り，任意の位置から正方形のマス（ ▨ ）を一つ取り除いた後の図形は，タイルＬで隙間なく埋めることができることを説明しなさい。（ただし，ｎは自然数である。）

注　意

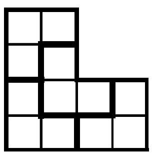
1　2^nは２をｎ回掛けたものである。
　たとえば，ｎ＝４のとき，$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ となる。

2　「任意の位置」とは，「どこの位置でも」という意味。

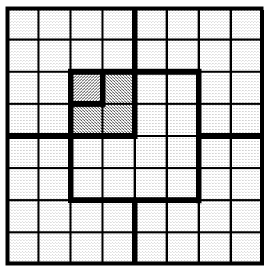
［解答例］

5

(1) 下のとおり。



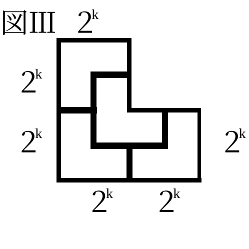
(2) 右の□図で，で塗られた部分は，(1)でタイルＬで埋めつくせることが，示された部分。
　また，▨で塗られた部分はタイルＬである。
　したがって，タイルＬで埋めつくすことができる。



(3) ｎ＝１のときは，タイルＬなので隙間なく埋めることができる。
ｎ≧２について考える。

(ｉ)

図Ⅲ

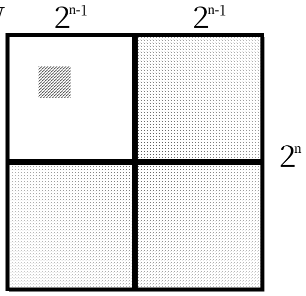


左の図Ⅲのように，一辺の長さが 2^kcm の正方形３つで作られるＬ字型を「(k+1)－Ｌ」と呼ぶ。
(k+1)－Ｌを４つ使い，(1)のように組み合わせると，(k+2)－Ｌを作ることができる。
(1)で示した図Ⅰは，２－Ｌであり，これを４つ使うと３－Ｌを作ることができる。
（これは，(2)で示している。また，タイルＬは1－Ｌである。）

同様に，3－Ｌから4－Ｌ，4－Ｌから5－Ｌと順に作ることができ，このことを繰り返すことで，ｎ－Ｌを作ることができる。

このことは，ｎ－Ｌはタイル L で隙間なく埋めることができることを示す。

図Ⅳ



ここで，図Ⅳのように，一辺の長さが 2^{n}cm の正方形を，一辺の長さが 2^{n-1}cm である正方形に４分割する。

４分割したうちの１つは，正方形のマス▨が取られており，残り３つはｎ－Ｌの形になっている。

残りのｎ－Ｌはタイル L で隙間なく埋めることができる。

正方形のマス▨を含む 2^{n-1}cm である正方形について，同様に４分割をする。すると，

（n-1）－ L と▨を含む正方形とに分けられる。

このことを繰り返すと，最後には，タイル L が残るので、題意は示された。

［出題の意図］

合同な図形で平面を隙間なく埋めることは、数学の一つの題材でもあり、アーケード街でもよく見かける図です。

Ｌ字型タイルで平面を隙間なく埋めることを考察する中で、帰納法的発想の有用性に気づいてもらいたい問題です。

［講評］

268名の者が選択しました。今回，選択者が一番多かった問題です。たぶん，(1)，(2)が手が出しやすかったからではないかと考えます。

(3)は，帰納的に考える問題です。３年生の解答は，きちんと数学的帰納法で証明されていました。多くの者が解答例と同様な解答でしたが，１名だけすばらしい解答がありました。

［答案例］

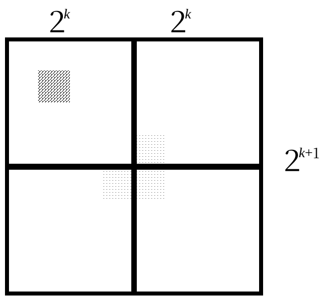
(3) 数学的帰納法によって証明する。

［１］$n=1$ のとき，題意の図形はタイルそのものなので埋められる。

［２」$n=k(k\in N)$ のとき題意が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，一辺の長さが 2^{k+1}ｃｍの正方形（左図）を一辺が 2^{k} の正方形４つに分ける。

このとき, 取り除いた正方形のマス１つが右上, 右下, 左上，左下（図は，左上）の各場合について，右図の□の部分にタイルを１つ置くと残った部分はタイル L で埋めることができる。($n=k$ のとき，埋められると仮定している。)



左上の部分も仮定からタイル L で埋めることができるから，$n=k+1$ のときも題意が成り立つ。

以上，［１］，［２］より任意の自然数について題意が成り立つ。

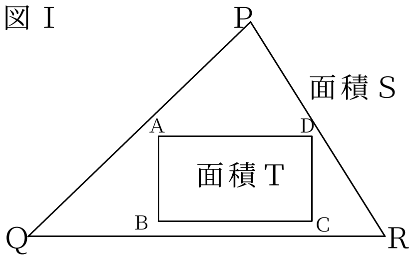
6　面積Ｓの三角形ＰＱＲの内部にある長方形ＡＢＣＤの面積をＴとするとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

ただし，長方形の頂点が三角形の辺上の点であってもよい。

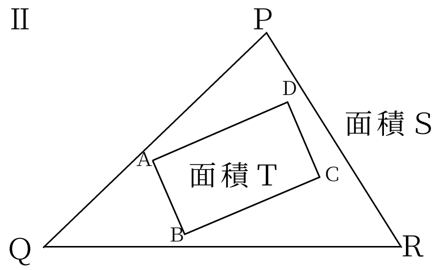
(1) ＢＣ∥ＱＲのとき，２Ｔ≦Ｓとなることを証明しなさい。（図Ⅰ）

(2) 三角形の各辺と長方形の各辺とが平行とならない場合，２Ｔ＜Ｓとなることを証明しなさい。（図Ⅱ）

図Ⅰ



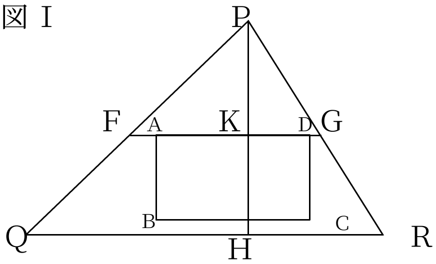
図Ⅱ



［解答例］

(1)　＜Ｒが鋭角の場合＞

図Ⅰ



図Ⅰで，直線ＡＤと辺ＰＱ，ＰＲとの交点をそれぞれＦ，Ｇとし，頂点Ｐから辺ＱＲへ引いた垂線と辺ＡＤ，ＱＲの交点をそれぞれＫ，Ｈとする。

ＱＲ＝a，ＰＨ＝hとすると，

$S = \triangle PQR = \frac{1}{2}ah$

ＰＫ＝tＰＨ($0 < t < 1$)とすると，

△ＰＦＧ∽△ＰＱＲより，ＦＧ＝tＱＲ＝taから

$T \leqq FG \times KH = ta \times (h - th) = -ah(t^2 - t)$

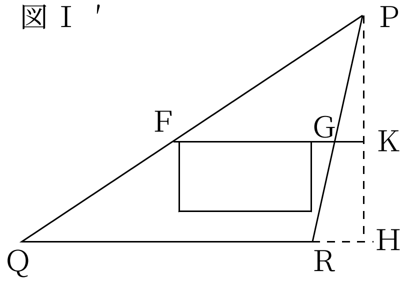
$= -ah\{(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\} \leqq \frac{1}{4}ah = \frac{1}{2}S$ …①

よって，２Ｔ≦Ｓ

（等号は，頂点Ａ，Ｄがそれぞれ辺ＰＱ，ＰＲの中点で辺ＢＣが辺ＱＲと重なるとき）

＜Ｒが鈍角のとき＞

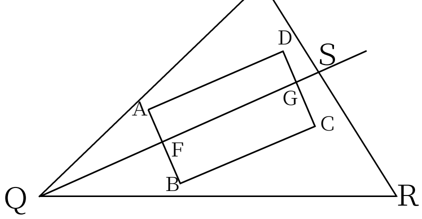
図Ⅰ′



ＡＤ＜ＦＧより，①から，２Ｔ＜Ｓ

(2)　Ｑをとおり，辺ＡＤと平行な直線と辺ＡＢ，ＣＤ，ＰＲとの交点をそれぞれＦ，Ｇ，Ｓとする。（左図）

図Ⅱ



△ＰＱＳ＝S_1，△ＱＲＳ＝S_2，

長方形ＡＦＧＤ＝T_1，長方形ＢＣＧＦ＝T_2とすると，(1)より，∠ＰＳＱが鋭角か鈍角かによって，

$2T_1 \leqq S_1$，$2T_2 < S_2$

または，$2T_1 < S_1$，$2T_2 \leqq S_2$が成り立つので，$T = T_1 + T_2$，$S = S_1 + S_2$より，どちらの場合においても２Ｔ＜Ｓが成り立つ。

［出題の意図］

二つの単純な図形の中に隠された、単純な性質のおもしろさを発見してもらうとともに、特殊な場合から、一般性を導く数学的着想の有用性を体験・理解してもらうための出題でした。

また、(1)では、三角形を巧に折ると、隙間なく、かつ重なることなく長方形が折れることも示しています。

［講評］

58名の者が選択しました。今回，選択者が一番少ない問題でした。単純そうではあるが，奥の深い問題です。また，(1)では，鈍角の場合も吟味してほしかったのですが，なかなかしてもらえませんでした。あらゆる可能性を考えることも大切だと思います。

［答案例］

(1) 図Ｉ（解答例の）で，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄが△ＰＱＲの辺上にくるときを考える。

ＡＤ＝x，ＡＢ＝y，ＰＡ＝a，ＡＱ＝bとすると，

a：x＝$(a+b)$：ＱＲから　ＱＲ＝$(a+b)x$／a

b：$(b+a)$＝y：ＰＨから　ＰＨ＝$(a+b)y$／b

Ｓ＝$\frac{1}{2}$ＱＲ・ＰＨ＝$(a+b)^2xy$／$2ab$

a，bともに正の数より，相加・相乗平均の関係より

$(a+b)^2 \geqq 4ab$が成り立つので，Ｓ$\geqq 2xy \geqq$２Ｔ

等号は，$a=b$，すなわち，Ａ，Ｄがそれぞれ辺ＰＱ，ＰＲの中点のとき。

＊鈍角の場合についての説明があると，さらに良かった。

(2) 四角形の４点のうち３点が△ＰＱＲの辺上の点である場合を考える。

図Ⅱ（解答例の）で，(1)より，四角形ＡＦＧＤ＝T_1，四角形ＢＣＧＦ＝T_2，

△ＰＱＳ＝S_1，△ＱＲＳ＝S_2とおくと，

$2T_1 \leqq S_1$，$2T_2 < S_2$が成り立つので，$2(T_1+T_2) < S_1+S_2$

したがって，２Ｔ＜Ｓ