

平成15年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページと2ページです。解答用紙は4枚あります。
- 2 解答は、すべて解答用紙に記入してください。また、解答用紙の「問題番号」欄に選択した問題番号を記入し、さらにコンテスト番号と氏名も記入してください。
- 3 必要があれば、電卓を用いてもかまいません。また、問題用紙を折ったり、切ったりしてもかまいません。
- 4 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。
- 5 制限時間は3時間です(13:00～16:00)。6問中4問を選択して解答してください。
- 6 トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

1 分数を小数で表すと、次の2つの場合に分かれます。

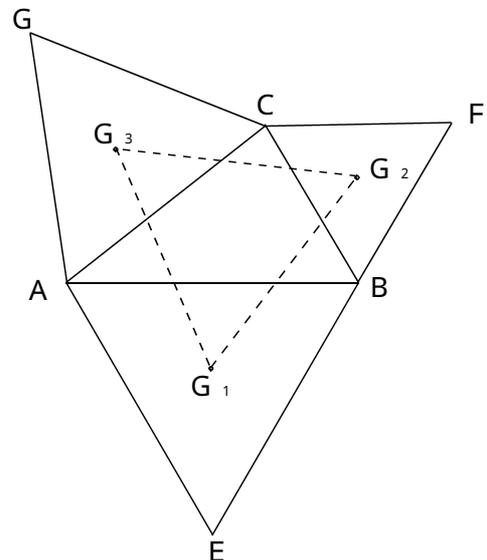
【1】 有限小数（小数点以下に0でない数字が有限個しかない小数）
 例 $\frac{7}{20} = 0.35$

【2】 循環小数（同じ数の列(428571 や 6)が繰り返し限りなく続く小数）
 例 1 $\frac{3}{7} = 0.\underline{428571}42857142 \dots$ 例 2 $\frac{5}{12} = 0.4166666 \dots$

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

- (1) 既約分数（分母と分子がこれ以上約分できない分数）を小数で表すとき、分母がどのようなときに、有限小数になるか予想しなさい。また、そのことを証明しなさい。
- (2) 既約分数が有限小数になる場合、小数点以下の桁数は、分母によってどのように定まるか、説明しなさい。

2 右の図の三角形 ABE, 三角形 BCF, 三角形 ACG は、それぞれ正三角形である。三角形 ABE, 三角形 BCF, 三角形 ACG の重心をそれぞれ G_1, G_2, G_3 とするとき、三角形 $G_1G_2G_3$ が正三角形となることを証明しなさい。



[注意]

三角形の頂点と対辺の中点とを結ぶ線分を中線という。

一般に三角形の3つの中線は1点で交わり、その交わった点を三角形の重心という。

3 ある工場では、3つの製品 A, B, C を製作しています。

2つの工程 K_1, K_2 を、 K_1, K_2 の順に行うことで、1つの製品を完成させることができます。ただし、1つの工程で複数の製品を作る作業を同時に行うことはできません。

また、工程 K_1 と工程 K_2 とはそれぞれ独立して別の製品を作る作業を同時に行うこともできます。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

1つの製品を完成させるのにかかる時間

A 製品：工程 K_1 を a_1 時間，工程 K_2 を a_2 時間
 B 製品：工程 K_1 を b_1 時間，工程 K_2 を b_2 時間
 C 製品：工程 K_1 を c_1 時間，工程 K_2 を c_2 時間

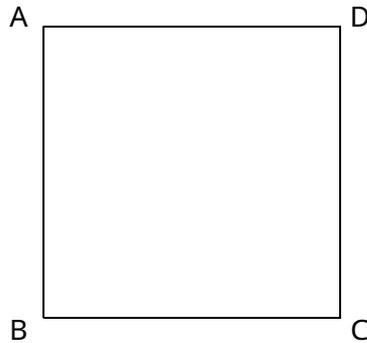
(1) 2つの製品 A, B を製作するとき、A, B, 2つの製品を完成させるまでにかかる時間を最短にするには、A, B を作り上げるまでの作業の順序をどのようにしたらよいか説明しなさい。

(2) 3つの製品 A, B, C を製作するとき、3つの製品を完成させるまでにかかる時間を最短にするには、A, B, C のすべてを作り上げるまでの作業の順序をどのようにしたらよいか説明しなさい。

4 正方形の紙 A B C D を何回か折って，新たな正方形を作るとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) できた正方形の面積がもとの正方形 A B C D の面積の $\frac{1}{2}$ となるような，折り方を説明しなさい。

(2) できた正方形の面積がもとの正方形 A B C D の面積の $\frac{1}{3}$ となるような，折り方を説明しなさい。



5 次のような規則で，整数を順に並べるとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

規 則

1 番目の整数を a ，2 番目の整数を b と定める。
 3 番目の整数は，1 番目の整数と 2 番目の整数との和とする。
 (3 番目の整数は、 $a + b$ となる。)
 4 番目の整数は，2 番目の整数と 3 番目の整数との和とする。
 5 番目の整数は，3 番目の整数と 4 番目の整数との和とする。

 すなわち， $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して， $(n + 2)$ 番目の整数は， n 番目の整数と $(n + 1)$ 番目の整数との和となる。
 例えば， $a = 2, b = 6$ のときは，
 2, 6, 8, 14, 22, 36, 58, 94, 152, ... となる。

(1) $a = 14, b = 27$ のとき，2003 番目の整数の一の位の数を求めなさい。

(2) $a = 12, b = 32$ のとき，2003 番目の整数の一の位の数を求めなさい。

6 次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 一辺が 10 cm の正三角形の周及び内部に無作為に置いた 5 つの点について，2 点間の距離のそれぞれを測り，その最小値を記録するとき，5 つの点をどのように置いても，記録された値は 5 cm を超えないことを証明しなさい。
 ただし，各点は重ならないものとする。

(2) 一辺が 10 cm の正四面体の表面及び内部に無作為に置いた 5 つの点について，2 点間の距離のそれぞれを測り，その最小値を記録するとき，5 つの点をどのように置いても，記録された値はある範囲内の値となる。記録された値の範囲を求めなさい。
 ただし，各点は重ならないものとする。

