1　分数を小数で表すと，次の２つの場合に分かれます。

【１】　有限小数（小数点以下に０でない数字が有限個しかない小数）
例　$\frac{7}{20} = 0.35$

【２】　循環小数（同じ数の列(428571 や 6)が繰り返し限りなく続く小数）
例１　$\frac{3}{7} = 0.\underline{428571}42857142\cdots$　　例２　$\frac{5}{12} = 0.4166666\cdots$

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 既約分数（分母と分子がこれ以上約分できない分数）を小数で表すとき，分母がどのようなときに，有限小数になるか予想しなさい。また，そのことを証明しなさい。

(2) 既約分数が有限小数になる場合，小数点以下の桁(けた)数は，分母によってどのように定まるか，説明しなさい。

［解答例］

(1) 予想：分母が $2^m 5^n$（m，n は整数，$0 \leqq m$，n）のとき。

＜証明＞

a を正の整数とする。$m \leqq n$ のとき

$$\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}$$ となり，有限小数となる。

$m > n$ の場合も同様のことが言える。

逆に，

a を有限小数（小数点以下第 n 位まで，０でない数字がある）とする。

$a = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_0}{10^n}$ と表すことができる。

$10^n = 2^n 5^n$ であり，a_0 の素因数には，２または５が含まれる可能性を考えると，分母は，$2^m 5^n$ になる。

したがって、有限小数の分母は $2^m 5^n$ と表すことができる。

(2) 有限小数 $a = \frac{n}{m}$（m は自然数，n は整数，m と n は互いに素），

$m = 2^s 5^t$（s，t は整数，$0 \leqq s$，t）とする。

(ⅰ)　$s \geqq t$　のとき，

$\frac{n}{m} = \frac{n \times 5^{s-t}}{10^s}$ となるが，m と n とは互いに素なので，n の素因数に２は含まれない。したがって，小数点以下第 s 位である。

(ⅱ)　$s < t$　のとき，(ⅰ)と同様にして，小数以下第 t 位である。

［出題の意図］

日常，あまり意識しないで当然のように扱う分数や小数の中の規則性・法則性を見つけることで，どのような数学的事象も疑問をもって見たり，一般化できないか等考える機会としたい。

［講　評］

具体的にいくつか求めてみて，法則性を見つけるために大切なことです。ただし，証明はそれを一般化しなくてはなりません。また，予想したことを正しいと思いこんでしまうと，証明もうまくいかないと思います。

［答案例（抜粋）］

(1) 「分母が２，５以外の因数をもたない。⇔その分数は有限小数」…①と予想される。

(Ⅰ) (⇒)　分子をm（$\in \boldsymbol{Z}$），分母をn（$\in \boldsymbol{N}$）とおく（mとnは互いに素）と，

$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ が有限小数 ⇔ $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \times 10^{\mathrm{k}}$ が整数（$\mathrm{k} \in \boldsymbol{Z}$）

ここで，仮定よりnは2，5以外の因数をもたないので，

$n = 2^a 5^b$（$a, b \in \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, x \geqq 0\}$）とおける。

ｉ） $a \geqq b$のとき

$$\frac{m}{n} \times 10^a = \frac{m}{2^a 5^b} \times 2^a 5^a = m \cdot 5^{a-b} \in \boldsymbol{Z}\ (\because a - b \geqq 0 \text{ より } 5^{a-b} \in \boldsymbol{Z})$$

よって，$\dfrac{m}{n}$は有限小数

ⅱ） $a < b$のとき

$$\frac{m}{n} \times 10^b = \frac{m}{2^a 5^b} \times 2^b 5^b = m \cdot 2^{b-a} \in \boldsymbol{Z}\ (\because b - a \geqq 0 \text{ より } 2^{b-a} \in \boldsymbol{Z})$$

よって，$\dfrac{m}{n}$は有限小数

ｉ），ⅱ）より①の⇒が成立

（Ⅱ） （⇐） 有限小数を $T = N \times 10^{-k}$（$N \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{N}$）とおくと

$$T = \frac{N}{10^k} = \frac{N}{2^k 5^k}\ (N,\ 2^k 5^k \in \boldsymbol{Z})$$

より，Tは2，5以外の因数をもたない。

よって，①の⇐が成立

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，①が成立。

(2) (1)の(Ⅰ)より，

(ｱ) $a \geqq b$のとき

$$\frac{m}{n} \times 10^a = m \cdot 5^{a-b} \text{ より}$$

$$\frac{m}{n} = m \cdot 5^{a-b} \times 10^{-a}$$ ここで，$m \cdot 5^{a-b}$ は10の倍数ではない。

∴ 小数点以下の桁数はa

(ｲ) $a < b$のとき

$$\frac{m}{n} \times 10^b = m \cdot 2^{b-a}$$ より(ｱ)と同様に，小数点以下の桁数はb

(ｱ)，(ｲ)より，小数点以下の桁数は，分母の2と5の因数のうち，多い方の数になる。

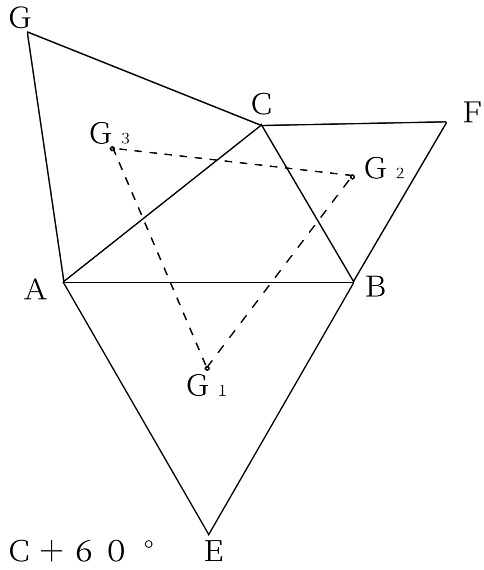
2　右の図の三角形ＡＢＥ，三角形ＢＣＦ，三角形ＡＣＧは，それぞれ正三角形である。

三角形ＡＢＥ，三角形ＢＣＦ，三角形ＡＣＧの重心をそれぞれG_1，G_2，G_3 とするとき，三角形$G_1G_2G_3$が正三角形となることを証明しなさい。

［注意］

三角形の頂点と対辺の中点とを結ぶ線分を中線という。

一般に三角形の３つの中線は１点で交わり，その交わった点を三角形の重心という。



［解答例］

△ＡＢＦと△ＥＢＣにおいて，

ＡＢ＝ＥＢ，ＢＦ＝ＢＣ…①

∠ＡＢＦ＝∠ＡＢＣ＋６０°　∠ＥＢＣ＝∠ＡＢＣ＋６０°

よって，∠ＡＢＦ＝∠ＥＢＣ…②

①，②より，△ＡＢＦ≡△ＥＢＣとなるので，ＡＦ＝ＣＥ

同様に，△ＡＣＦ≡△ＧＣＢとなるので，ＡＦ＝ＢＧ

したがって，ＡＦ＝ＢＧ＝ＣＥ…③

△ＥＢＣと△G_1ＢG_2において

∠ＥＢＣ＝∠ＡＢＣ＋６０°

∠G_1ＢG_2＝∠ＡＢＣ＋∠G_1ＢＡ＋∠G_2ＢＣ＝∠ＡＢＣ＋３０°＋３０°

よって，∠ＥＢＣ＝∠G_1ＢG_2 …④

G_1Ｂ：ＢＥ＝G_2Ｂ：ＢＣ＝１：$\sqrt{3}$ …⑤

したがって，④，⑤より△ＥＢＣ∽△G_1ＢG_2

よって，G_1G_2：ＥＣ＝１：$\sqrt{3}$…⑥

同様にして，G_2G_3：ＡＦ＝G_3G_1：ＢＧ＝１：$\sqrt{3}$…⑦

③，⑥，⑦より、G_1G_2＝G_2G_3＝G_3G_1　となるので，△$G_1G_2G_3$は正三角形

［出題の意図］

この定理は，ナポレオンの発見に関わるとされる定理です。多くの予備知識を必要とせずに内容を考察でき，また，幾何学的に美しいものであります。さらに，その証明には論理的思考力，表現力が必要であり，数学的な楽しさを味わうことができるものとして，出題した。

［講　評］

複素数平面を用いて解答した生徒が見られた。合同の証明，相似の証明と２段階の証明であり，証明の方針を立てる力も要求されている。図形の証明で正三角形が関係したものは多く，また，美しいものも多いので，自分で問題を作ってみることも楽しいのではないかと思う。

［答案例（抜粋）］

複素数平面で考える。

Ａ(０)，Ｂ(b)，Ｃ(c)，Ｅ(e)，Ｆ(f)，Ｇ（g)，$G_1(g_1)$，$G_2(g_2)$，$G_3(g_3)$とする。

また，$\alpha = \cos 60° + i\sin 60°$，$\beta = \cos(-60°) + i\sin(-60°)$ とおく。

$g_1 = \frac{1}{3}(e+b)$，$e = b\beta$ より，$g_1 = \frac{1}{3}b\left(1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$…①

同様に，

$g_3 = \frac{1}{3}(c+g)$，$g = c\alpha$ より，$g_3 = \frac{1}{3}c\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$…②

$f = (b-c)\alpha + c$ より，

$$g_2=\frac{1}{3}(b+c+f)=\frac{1}{3}\{(b-c)+(f-c)\}+c=\frac{1}{3}\{(b-c)+(b-c)\alpha\}+c$$

$$=\frac{1}{3}(b-c)(1+\alpha)+c=\frac{1}{3}(b-c)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)+c$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\cdots③$$

$$g_1-g_3=\frac{\sqrt{3}}{3}b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$g_2-g_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(g_1-g_3)\alpha$$

よって，G_1 を G_3 を中心として 60 °回転させると G_2 になるので，題意は示された。

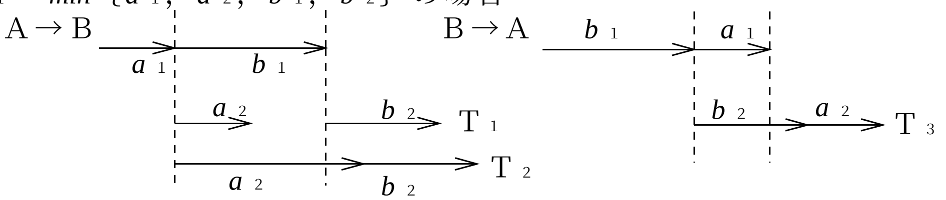
3　ある工場では，３つの製品Ａ，Ｂ，Ｃを製作しています。
２つの工程K_1，K_2を，K_1，K_2の順に行うことで，１つの製品を完成させることができます。ただし，１つの工程で複数の製品を作る作業を同時に行うことはできません。
また，工程K_1と工程K_2とはそれぞれ独立して別の製品を作る作業を同時に行うこともできます。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

１つの製品を完成させるのにかかる時間
Ａ製品：工程K_1をa_1時間，工程K_2をa_2時間
Ｂ製品：工程K_1をb_1時間，工程K_2をb_2時間
Ｃ製品：工程K_1をc_1時間，工程K_2をc_2時間

(1)　２つの製品Ａ，Ｂを製作するとき，Ａ，Ｂ，２つの製品を完成させるまでにかかる時間を最短にするには，Ａ，Ｂを作り上げるまでの作業の順序をどのようにしたらよいか説明しなさい。

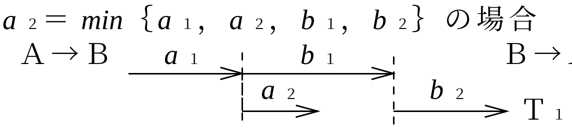
(2)　３つの製品Ａ，Ｂ，Ｃを製作するとき，３つの製品を完成させるまでにかかる時間を最短にするには，Ａ，Ｂ，Ｃのすべてを作り上げるまでの作業の順序をどのようにしたらよいか説明しなさい。

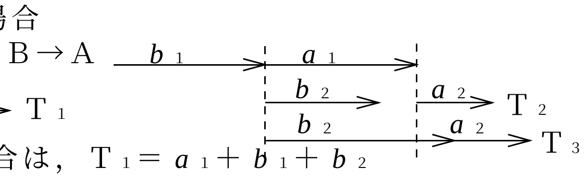
［解答例］
４つの実数p，q，r，sの最小値を$min\{p, q, r, s\}$と表す。
例えば，$min\{1, 2, 3, 4\}=1$
(1)
ｉ）　$a_1=min\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$の場合



完成にかかる時間は，Ａ→Ｂの場合は，$T_1=a_1+b_1+b_2$（$a_2\leqq b_1$）または，$T_2=a_1+a_2+b_2$（$a_2>b_1$）となる。
Ｂ→Ａの場合は，$T_3=b_1+b_2+a_2$となり，いずれの場合においても，Ａ→Ｂの順に作業したほうが短時間で完成できる。

ⅱ）　$a_2=min\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$の場合





完成にかかる時間は，Ａ→Ｂの場合は，$T_1=a_1+b_1+b_2$
Ｂ→Ａの場合は，$T_2=b_1+a_1+a_2$（$a_1\geqq b_2$）または$T_3=b_1+b_2+a_2$（$a_1<b_2$）となり，いずれの場合においても，Ｂ→Ａの順に作業したほうが短時間で完成できる。
以上ｉ），ⅱ）をまとめると，

a_1またはb_1が最小のときはその製品から作業を始め，a_2またはb_2が最小のときはその製品の作業を最後にすると，完成させるまでの時間を最短にできる。

(2)
ｉ）　a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2のうち，a_1が最小の場合を考える。
ＡとＢ，ＡとＣの作業の順を考えるとき，(1)の結果から，Ａ→ＢまたはＡ→Ｃの順に作業したほうが，Ｂ→ＡまたはＣ→Ａより短時間ですむので，ＡをＢ，Ｃより先に作り始めるとよい。すなわち，Ａから作り始める。
(ア)　$b_1=min\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$のとき，(1)からＢ→Ｃとしたほうが，Ｃ→Ｂとするより短時間ですむので，この場合は，Ａ→Ｂ→Ｃの順に作業を行う。

(イ) $b_2 = \min\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$ のとき，(1)からC→Bとしたほうが，B→Cとするより短時間ですむので，この場合は，A→C→Bの順に作業を行う。

ⅱ）　a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2のうち，a_2が最小の場合を考える。
AとB，AとCの作業の順を考えるとき，(1)の結果から，B→AまたはC→Aの順に作業したほうが，A→BまたはA→Cより短時間ですむので，AをB，Cの後に作るとよい。すなわち，Aを一番最後に作る。
(ア) $b_1 = \min\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$ のとき，(1)からB→Cとしたほうが，C→Bとするより短時間ですむので，この場合は，B→C→Aの順に作業を行う。
(イ) $b_2 = \min\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$ のとき，(1)からC→Bとしたほうが，B→Cとするより短時間ですむので，この場合は，C→B→Aの順に作業を行う。

以上ⅰ），ⅱ）をまとめると，

> $○_1$が最小のときはその製品から作業を始め，$○_2$が最小のときはその製品の作業を最後にする。２番目については，$○_1$または$○_2$を除いた中で，$△_1$が最小のときは○→△→□の順か，または△→□→○の順に作業をする。一方，$△_2$が最小のときは，○→□→△の順か，または□→△→○に作業をすると，完成させるまでの時間を最短にできる。ただし，製品を便宜的に○，△，□と表した。

［出題の意図］
我々は，日常の生活の中で，暗黙の内に勉強等に優先順位を決めている。では，同じようなような事柄があった場合，どのように順序を決めれば，短時間で効率良く作業を実行できるか，その判断基準を発見してもらうための出題である。

［講　評］
２種類または２種類の製品ですから，すべてを調べれば，各工程で製品を作る作業手順を決定することができます。しかし，どんな時にどちらから先に行うべきか，簡単な判断基準を見つけられるとよかったと思います。

［答案例（抜粋　(1)のみ）］
製品A，Bについて，原料をα，βとし，工程K_1を行ったときの未完成の製品をα′，β′とする。

［１］　Aから作り始める場合を調べる。
工程K_1でαからα′を作ると、a_1時間かかる。その後，すぐにβを工程K_1でβ′にし，同時にα′を工程K_2でAにすると，その時かかる時間はa_2，b_1時間のうち大きい方のどちらかである。その後，β′をK_2でBにするときb_2時間かかる。
この場合，かかる時間は全体で
$a_2 \geqq b_1$のとき，$a_1 + a_2 + b_2$　…①
$a_2 \leqq b_1$のとき，$a_1 + b_1 + b_2$　…②

［２］　Bから作り始める場合を調べる。
［１］と同様にして，かかる時間は全体で
$a_1 \leqq b_2$のとき，$a_2 + b_1 + b_2$　…③
$a_1 \geqq b_2$のとき，$a_1 + a_2 + b_1$　…④

①～④のうち，どれが最短となるかを調べる。
ⅰ）　$a_2 \geqq b_1$かつ$a_1 \leqq b_2$のとき，①－③＝$a_1 - b_1$より
　$a_1 \geqq b_1$のときは，③が最小となる。
　$a_1 \leqq b_1$のときは，①が最小となる。
ⅱ）　$a_2 \geqq b_1$かつ$a_1 \geqq b_2$のとき，ⅰ）と同様にして，
　$b_1 \leqq b_2$のときは，④が最小となる。
　$b_1 \geqq b_2$のときは，①が最小となる。
ⅲ）　$a_2 \leqq b_1$かつ$a_1 \leqq b_2$のとき，
　$a_1 \leqq a_2$のときは，②が最小となる。
　$a_1 \geqq a_2$のときは，③が最小となる。
ⅳ）　$a_2 \leqq b_1$かつ$a_1 \geqq b_2$のとき，

$a_2 \leqq b_2$のときは，④が最小となる。
$a_2 \leqq b_2$のときは，②が最小となる。

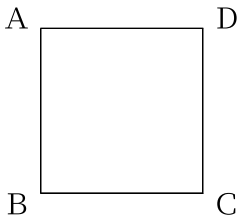
以上，ｉ）～ⅳ）をまとめると，

a_1またはb_2が一番小さいときは，Ａから作り始め，$a_2 \leqq b_1$が一番小さいときは，Ｂから作り始めると良い。

4　正方形の紙ＡＢＣＤを何回か折って，新たな正方形を作るとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

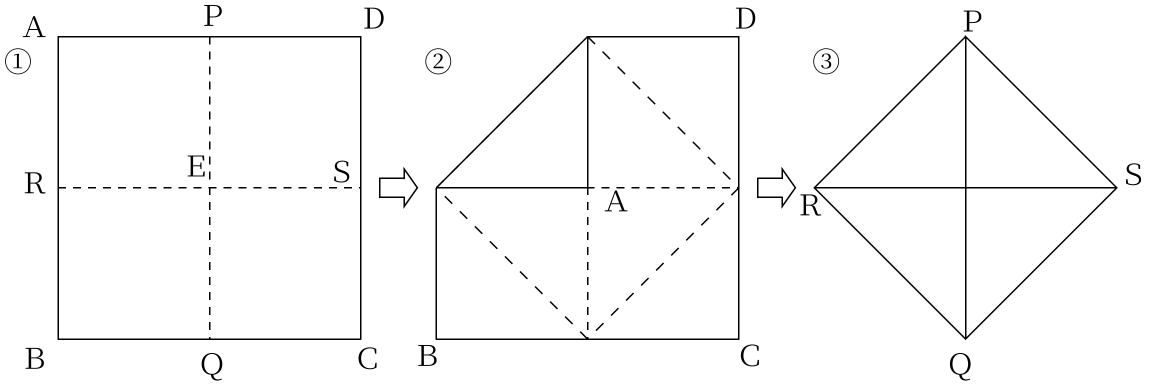
(1) できた正方形の面積がもとの正方形ＡＢＣＤの面積の $\frac{1}{2}$ となるような，折り方を説明しなさい。

(2) できた正方形の面積がもとの正方形ＡＢＣＤの面積の $\frac{1}{3}$ となるような，折り方を説明しなさい。



［解答例］

(1)　一辺の長さが，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるように折る。

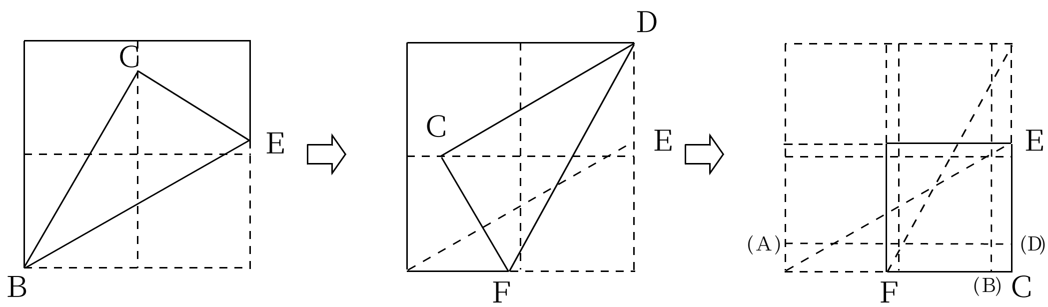


辺ＡＢと辺ＣＤ，辺ＡＤと辺ＢＣとが重なるように折り，折り目を付ける。
折り目の重なった点をＥとする。

ＡがＥと重なるように折る。

Ｂ，Ｃ，ＤについてもＥと重なるように折る。

(2)　一辺の長さが，$\frac{1}{\sqrt{3}}$ となるように折る。



(1)の①を行った後，ＣがＰＱ上に来るようにＢＥで折り，折り目を付けて，もどす。

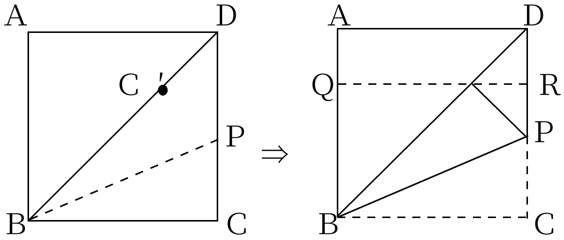
ＣがＲＳ上に来るようにＤＦで折り，折り目を付けて，もどす。

Ｅを折り目として，Ｄが辺ＣＥ上に来るように折る。
Ｆを折り目として，Ｂが辺ＦＣ上に来るように折る。

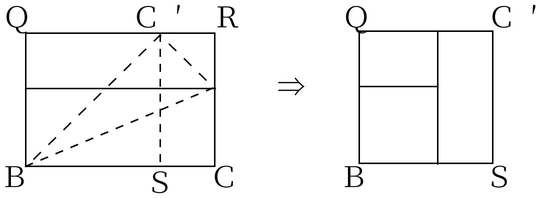
［出題の意図］
　幼いころから馴染みの深い折り紙に隠された数学的性質を発見することで，数学と日常生活との結びつきを実感できることを目的に出題した。

［講　評］
　(1)は比較的良くできていた。一方，(1)，(2)ともに出題は「折り方の説明」であったが，説明になっていないものも見られた。解答用紙を１部余分に付けたので，色々と試行錯誤できたのではないかと思う。このような試行錯誤も数学的活動として大切な活動である。

［答案例（抜粋）］
(1)　１辺の長さがもとの正方形の$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となれば良い。もとの正方形の１辺の長さを１とし，次のように折る。



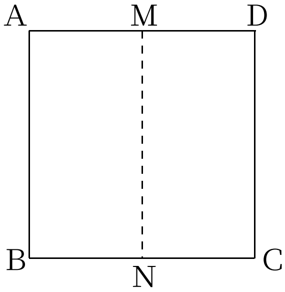
①　対角線ＢＤに折り目を付ける。
②　Ｃが線分ＢＤ上にくるように，Ｂを通る直線で折る。このとき，折り目と辺ＣＤとの交点をＰ，Ｃが移る点をＣ′とする。
③　Ｃ′を通り，ＡＤと平行な直線で紙を折り，もとにもどす。
（このとき，△ＤＣ′Ｐは直角二等辺三角形となるので，ＤとＰは重なる）
　この折り目と辺ＡＢ，ＣＤの交点をそれぞれ，Ｑ，Ｒとする。ここで，△ＢＣ′Ｑは直角二等辺三角形となっているので，
$ＢＱ＝ＱＣ′＝\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

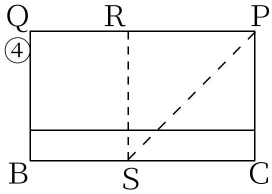


④　Ｃ′を通り，ＣＲと平行な直線で紙を折り，ＢＣとの交点をＳとする。
　四角形ＢＱＣ′Ｓは１辺が$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の正方形となり、面積はもとの正方形の$\dfrac{1}{2}$となる。

(2)　１辺の長さがもとの正方形の$\frac{1}{\sqrt{3}}$となればよい。もとの正方形の１辺の長さを１とし，次のように折る。

①　辺ＡＢとＣＤが重なるように折って，折り目を付けて戻す。この折り目と辺ＡＤ，ＢＣとの交点をそれぞれＭ，Ｎとする。

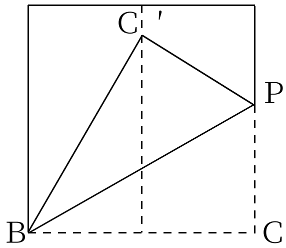
①


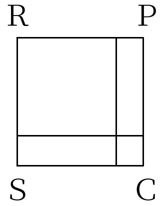
④


②　点Ｃが線分ＭＮ上にくるよう，Ｂを通る直線で折って，戻す。このとき，ＣがＭＮ上に移った点をＣ′，折り目とＣＤとの交点をＰとする。

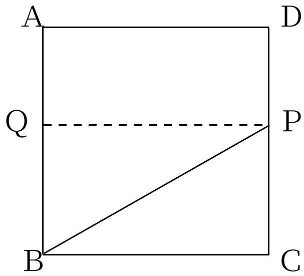
対称性よりＢＣ′＝ＣＣ′＝１
また，ＢＣ＝１より△ＢＣＣ′は正三角形となっている。

よって，∠Ｃ′ＢＣ＝60°，また，∠Ｃ′ＢＰ＝∠ＣＢＰ＝30°より，△ＢＣＰで，ＰＣ＝$\frac{1}{\sqrt{3}}$

②


⑤


③　Ｐを通り，ＡＤに平行な直線で折る。折り目と辺ＡＢとの交点をＱとする。

③


④　Ｃが辺ＰＱ上にくるよう，Ｐを通る直線で折る。この折り目と辺ＢＣとの交点をＳ，折ったときＣが重なるＰＱ上の点をＲとする。

⑤　線分ＲＳで折ってできる四角形ＣＰＲＳは１辺が$\frac{1}{\sqrt{3}}$の正方形であり、面積は，もとの正方形の$\frac{1}{3}$となる。

5　次のような規則で，整数を順に並べるとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

規　則

①　１番目の整数を a，２番目の整数を b と定める。
②　３番目の整数は，１番目の整数と２番目の整数との和とする。
　（３番目の整数は、$a + b$ となる。）
③　４番目の整数は，２番目の整数と３番目の整数との和とする。
④　５番目の整数は，３番目の整数と４番目の整数との和とする。
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

　すなわち，n ＝１，２，３，…に対して，（n ＋２）番目の整数は，n 番目の整数と(n ＋１)番目の整数との和となる。
　例えば，a ＝２，b ＝６のときは，
２，６，８，１４，２２，３６，５８，９４，１５２，…となる。

(1) a ＝１４，b ＝２７のとき，２００３番目の整数の一の位の数を求めなさい。

(2) a ＝１２，b ＝３２のとき，２００３番目の整数の一の位の数を求めなさい。

［解答例］

(1) 規則にしたがって，計算すると，
14　27　41　68　109　177　286　463　749　1212　1961　3173　5134　8307　13441　21748 …
一の位の数を考えているので，一の位の数だけ抜き出すと，
４，７，１，８，９，７，６，３，９，２，１，３，４，７，１，８…となり，１３番目，１４番目に４，７が現れたことから周期性（１２番目までが１周期）があることがわかる。
　したがって，２００３＝１６６×１２＋１１より，１１番目の整数の一の位の数と一致するので，求める数は，１

(2) (1) と同様にして，一の位の数を順に求めると，
２，２，４，６，０，６，６，２，８，０，８，８，６，４，０，４，４，８，２，０，２，２，４，６…となり，２０番目までで，１周期となることがわかる。
　したがって，２００３＝１００×２０＋３より，求める数は，４

［出題の意図］

　フィボナッチの数列として有名であり，漸化式を解いて一般項を求めるということは，数列の授業で扱う。一の位に着目すると周期性があることに気づく。

［講　評］

　選択者の多かった問題である。比較的良くできていたと思う。一方，計算ミスや漸化式を解いて行き詰まったもの等も見られた。a，b の値を色々と変えてみるとおもしろい結果が得られるので，時間があるときにやってみると面白いと思う。

［答案例（抜粋）］

　ｎ番目の項の一の位の数を a_n とする。

(1) $a_1 = 4$，$a_2 = 7$ より，$a_1 + a_2 = 11$ より，$a_3 = 1$，
　$a_2 + a_3 = 8$ より，$a_4 = 8$
以下，同様にして，$a_5 = 9$，$a_6 = 7$，$a_7 = 6$，$a_8 = 3$，$a_9 = 9$，$a_{10} = 2$，
$a_{11} = 1$，$a_{12} = 3$，$a_{13} = 4$，$a_{14} = 7$…
　a_n は２つ前の数字と１つ前の数字とで決まるので，$a_{13} = 4$，$a_{14} = 7$ は $a_1 = 4$，$a_2 = 7$ と同じなので，この一の位の数字の列は１２項で１周期である。
　$2003 = 12 \times 166 + 11$ より，$a_{2003} = a_{11} = 1$
　よって，2003 番目の一の位の数は１

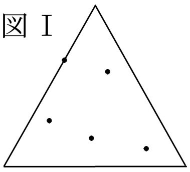
(2) (1)と同様に $a_1 = 2$，$a_2 = 2$ から，$a_3 = 4$，$a_4 = 6$，$a_5 = 0$，$a_6 = 6$，$a_7 = 6$，
　$a_8 = 2$，$a_9 = 8$，$a_{10} = 0$，$a_{11} = 8$，$a_{12} = 8$，$a_{13} = 6$，$a_{14} = 4$，$a_{15} = 0$，
$a_{16} = 4$，$a_{17} = 4$，$a_{18} = 8$，$a_{19} = 2$，$a_{20} = 0$，$a_{21} = 2$，$a_{22} = 2$
　この一の位の数字の列は２０項で１周期である。
　$2003 = 20 \times 100 + 3$ より，$a_{2003} = a_3 = 4$
　よって，2003 番目の一の位の数は４

６　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

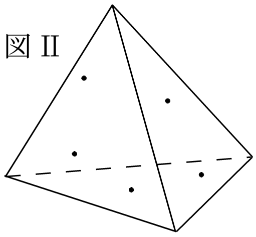
(1) 一辺が１０ｃｍの正三角形の周及び内部に無作為に置いた５つの点について，２点間の距離のそれぞれを測り，その最小値を記録するとき，５つの点をどのように置いても，記録された値は５ｃｍを超えないことを証明しなさい。
　ただし，各点は重ならないものとする。

(2) 一辺が１０ｃｍの正四面体の表面及び内部に無作為に置いた５つの点について，２点間の距離のそれぞれを測り，その最小値を記録するとき，５つの点をどのように置いても，記録された値はある範囲内の値となる。記録された値の範囲を求めなさい。
　ただし，各点は重ならないものとする。

図Ⅰ

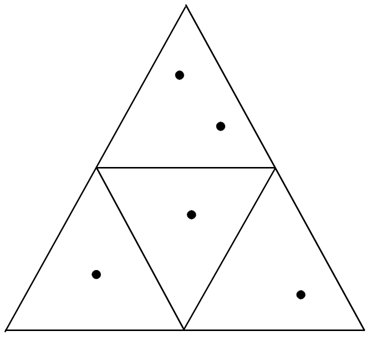


図Ⅱ



［解答例］

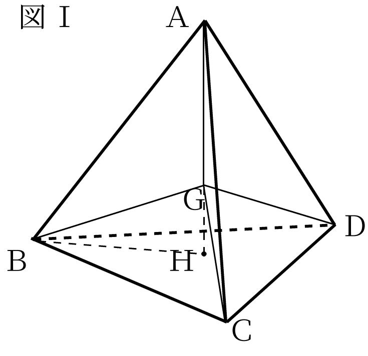
(1) 右の図のように，正三角形の各辺の中点を線分で結ぶと４つの合同な正三角形に分割できる。



　５つの点は４つの正三角形のいずれかに入ることになる。このとき，少なくとも，２つ以上の点を含む正三角形が１つは存在する。
　記録された値の中での最大値を考えることになるから，４つに分割された正三角形のうち，３つには点が１つずつあり，残りの１つの正三角形には点が２つある場合を考えれば良い。
　すなわち，２つの点を含む１辺の長さが５ cm の正三角形における，２点間の距離は，２点を各頂点においたときで，これは５ cm を超えないので，題意は示された。

(2) 正四面体について，(1)と同様に４つの合同な立体に分割（図Ⅱ）して考える。

図Ⅰ



　右の図Ⅰで，点Ｈは頂点Ａから三角形ＢＣＤへ引いた垂線と三角形ＢＣＤとの交点であり，ＧはＡＨ上の点で，ＡＧ＝ＢＧ＝ＣＧ＝ＤＧを満たしている。

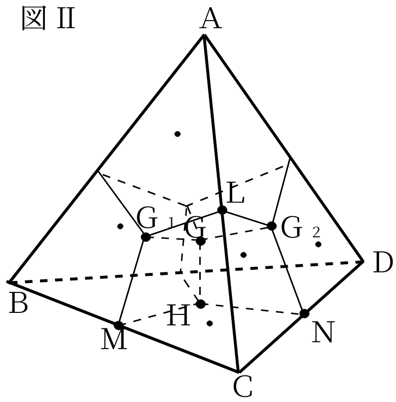
$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

　ＡＧ＝xとおくと，

$$x^2=(\mathrm{AH}-x)^2+\mathrm{BH}^2\text{より，}\mathrm{AG}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

　右の図Ⅱで，Ｌ，Ｍ，Ｎは辺ＡＣ，ＢＣ，ＣＤの中点であり，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$は△ＡＢＣ，△ＡＣＤの重心である。$\mathrm{CMHN-GG_1LG_2}$を頂点とする立体Ｖを考えると，正四面体は，この立体Ｖと合同な４つの立体に分割できる。

図Ⅱ



　記録された値の中での最大値を考えることになるから，４つに分割された立体のうち，３つには点が１つずつあり，残りの１つの立体Ｖには点が２つある場合を考えれば良い。１つの点をＧに，他の点をＣにおいたときが，記録された値の中での最大値をとるときである。
　すなわち，２点間の距離の最小値をＬｍとすると，

$$0<\mathrm{Lm}\leqq\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

［出題の意図］
　空間において，『ディリグレの部屋割り論法』を利用する問題です。正四面体をどのように分割するかが，ポイントであり，空間を把握する力を問う問題です。

［講　評］
　(2)が難しかったようです。しかし，正答までたどり着かないものの着眼点のすばらしい解答や具体的に条件に合う場合を考え、問題を理解しようとする姿勢の見られる解答等が見られた。

［答案例（抜粋　(1)のみ）］
(1) 正三角形を１辺が５ｃｍの正三角形４つに等分すると，各正三角形の内部及び周上に点を配置することを考えても，必ずどれか１つの正三角形の内部及び周上には，点が２つ以上存在する。
　その点が２つ以上存在する正三角形を考えると，２点間の距離の最大は５ｃｍ。ゆえに５つの点の最短距離は，５ｃｍを超えることはない。