平成１４年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　　意　　事　　項

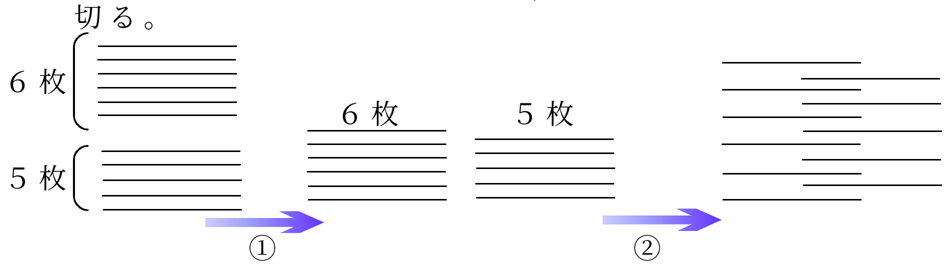
1　問題は，１ページと２ページです。解答用紙は４枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，解答用紙の「問題番号」欄に選択した問題番号を記入し，さらにコンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。また、問題用紙を折ったり、切ったりしてもかまいません。
4　作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：00～16：00)。６問中４問を選択して解答してください。
6　トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

1　ジョーカー（Ｊと表す）と 1 〜 10 までのトランプ 11 枚が，上から順に，1，Ｊ，2，3，4，5，6，7，8，9，10 のように重ねてあります。
この 11 枚のカードを□の中の条件で切る。ｎ回切った後で，Ａ，Ｂ，Ｃの３人に，上のカードから１枚ずつＡ，Ｂ，Ｃの順にすべてのカードを配るときに，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

条件（カードの切り方）

① 11 枚のカードを上から６枚と残り５枚に分ける。

② ６枚のカードの１枚ごとに，５枚のカードのそれぞれが入るように切る。



(1) カードを切る回数によっては，ＡさんにＪのカードが配られます。そのうち，切る回数が一番少ないときの切る回数ｎの値を求めなさい。

(2) ｎ＝１，２，３，…のそれぞれの場合について，Ａ，Ｂ，Ｃの順にすべてのカードを配っていくと，ＡさんとＢさんとでＪのカードが配られる回数に差ができます。その差が１０となるｎの値をすべて求めなさい。

2　サッカーのワールドカップは，16カ国による決勝トーナメントの結果、ブラジルの優勝で終わりました。
ワールドカップが始まる前のこれら 16 カ国について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) これら 16 カ国は，ワールドカップ前に互いに練習試合で，それぞれ何カ国かと対戦していて，16 カ国それぞれについて対戦したことのある国の数（対戦国数）が分かっているとします。この 16 カ国の中で，対戦国数が同じ数となる国が，少なくとも２カ国あることを証明しなさい。

(2) これら 16 カ国中，対戦国数が５以上となる国がないとします。このとき，これら 16 カ国の中から，１度も対戦したことのない４カ国を選ぶことができる，ということを証明しなさい。

3　自然数 a，b，c に対して，$a^2+b^2=c^2$ を満たす a，b，c の組（a，b，c）をピタゴラス数と言います。
例えば，（a，b，c）＝（３，４，５）…①は $3^2+4^2=5^2$ となるのでピタゴラス数の１つです。この１組のピタゴラス数が見つかると，自然数 k に対し，$(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$ が成り立つので，$k=2$，３，…として，（a，b，c）＝（６，８，１０），（９，１２，１５），…もピタゴラス数となるので，ピタゴラス数は無数にあります。
そこで，□の中の条件を満たすピタゴラス数について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

条件

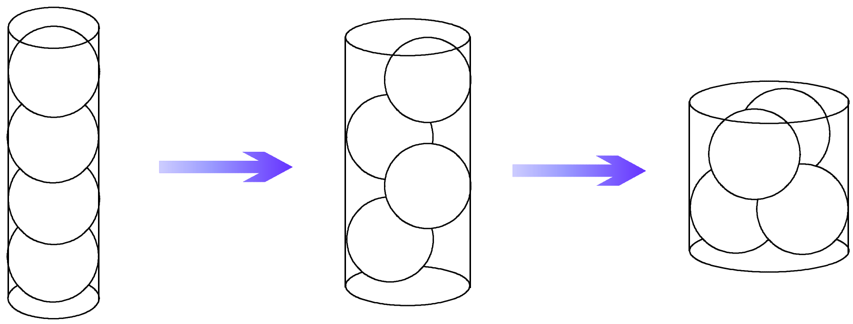
・ ①のピタゴラス数は除く。
・ a，b，c は自然数で $a \leqq b \leqq c < 70$
・ a，b，c のうち，どの２つの数の公約数も１である。

(1) 条件を満たすピタゴラス数を４組見つけなさい。
その際，等式 $(x-y)^2+4xy=(x+y)^2$ が成り立つことを利用すること。

(2) 条件を満たすピタゴラス数で，(1) で見つけたピタゴラス数以外のものを３組見つけなさい。また，その３組を見つけた経緯も説明しなさい。

4　半径Ｒの直円柱に，半径１（１≦Ｒ）の球が４個入っています。この直円柱の上面が一番上の球に接するようにして，直円柱の半径Ｒを１から次第に大きくしていくと，直円柱の高さＨも変化する。

このとき，(1) 直円柱の底面に球が２個だけ接している場合，
(2) 直円柱の底面に球が３個だけ接している場合について，
直円柱の高さＨをＲで表しなさい。ただし，直円柱内の球は，常に，一番下の球が直円柱の側面に接している。また，上方向の球と下方向の球とは接しているものとします。



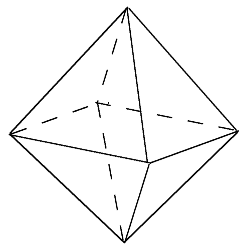
5　正の整数 x，y に対し，Ｎ＝５ x ＋７ y …①の形で表される整数Ｎを考えます。このとき，次の(1)～(3) の問いに答えなさい。

(1) Ｎ＝２６となる x，y の組を１組求めなさい。

(2) Ｎの値を１つ決めるとき，x と y の組はただ一組に決めることができるでしょうか。決めることができるならば，そのことを証明しなさい。決めることができないならば，その例をあげなさい。

(3) ある整数をＭとすると，そのＭ以上のすべての整数は，①の形で表すことができます。このようなＭの中で最小のものを求めなさい。また，そうなる理由も説明しなさい。

6　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1) 右図のような，一辺の長さが１の正八面体があります。
　この正八面体に内接する球の半径を求めなさい。

(2) 下図はある立体の展開図である。
この立体に内接する球の半径を求めなさい。
　ただし、三角形ＢＣＨ，三角形ＣＤＦ，三角形ＣＦＨは一辺の長さが２の正三角形である。
　また，三角形ＡＢＨ，三角形ＥＦＤ，三角形ＧＨＦは直角二等辺三角形であり，∠Ａ＝∠Ｅ＝∠Ｇ＝９０°である。