1

条件通りに切って配ると，右の表のように，１０回で一巡する。

(1) 右の表より，ｎ＝６

(2) ｎが１～１０の値をとるとき，Ｂに配られるＪの回数とＡに配られるＪの回数の差は，下記の表のようになる。

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| B | 6 | 3 | 7 | 9 | 10 | 5 | 8 | 4 | 2 | J |
| C | J | 6 | 3 | 7 | 9 | 10 | 5 | 8 | 4 | 2 |
| A | 7 | 9 | 10 | 5 | 8 | 4 | 2 | J | 6 | 3 |
| B | 2 | J | 6 | 3 | 7 | 9 | 10 | 5 | 8 | 4 |
| C | 8 | 4 | 2 | J | 6 | 3 | 7 | 9 | 10 | 5 |
| A | 3 | 7 | 9 | 10 | 5 | 8 | 4 | 2 | J | 6 |
| B | 9 | 10 | 5 | 8 | 4 | 2 | J | 6 | 3 | 7 |
| C | 4 | 2 | J | 6 | 3 | 7 | 9 | 10 | 5 | 8 |
| A | 10 | 5 | 8 | 4 | 2 | J | 6 | 3 | 7 | 9 |
| B | 5 | 8 | 4 | 2 | J | 6 | 3 | 7 | 9 | 10 |

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 差 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |

１０回切ったところで，差が１枚である。

Ａに配られる回数をｎ(Ａ)，Ｂに配られる回数をｎ(Ｂ)と表す。

一巡する中で，配られる回数の差が最大で２となるので，ｎ＝80から考える。

ｎ＝80のとき，ｎ(Ｂ)－ｎ(Ａ)＝８となるので，ｎ＝85，87のとき，配られる回数の差が１０となる。

ｎ＝90のとき，ｎ(Ｂ)－ｎ(Ａ)＝９となるので，ｎ＝92，93，94，96，98のとき，配られる回数の差が１０となる。

ｎ＝100のとき，ｎ(Ｂ)－ｎ(Ａ)＝10となるので，ｎ＝100，101，109のとき，配られる回数の差が１０となる。

以上より，求める値は，ｎ＝85，87，92，93，94，96，98，100，101，109となる。

2

（1）１６カ国すべての国について，対戦国数は，１～１５のうち，いずれかの数となる。１６カ国をＡ国～Ｐ国とし，Ａ国～Ｏ国までの対戦国数がすべて異なるとしても，Ｐ国の対戦国数が１～１５のうちのどれかなので，Ｐ国の対戦国数はＡ国～Ｏ国のうちのどれかの国の対戦国数と一致する。したがって，少なくとも２カ国は対戦国数が同数となる。

（2）各国高々（多くとも）４カ国と対戦している。

Ａ，Ｂ，Ｃの３カ国について，

ＡがＤ，Ｅ，Ｆ，Ｇと対戦しているとする。（これを｛Ａ：Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ｝と表す。）

Ｂ，Ｃについても，それぞれ｛Ｂ：Ｈ，Ｉ，Ｊ，Ｋ｝，｛Ｃ：Ｌ，Ｍ，Ｎ，Ｏ｝とする。

ここで，Ｄ～Ｏまでをすべて異なる国としても，Ａ～Ｏまで，１５カ国である。そこで，Ａ，Ｂ，Ｃの３カ国ともう１カ国Ｐを互いに対戦したことのない４カ国として，｛Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｐ｝を選ぶことができる。

3

(1) 等式 $(x-y)^2+4xy=(x+y)^2$ …①において，

（ⅰ） $y=1$ のとき，$x=(2m)^2$ とする。（$m$ は正の整数）

$x=16$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（８，１５，１７）

$x=36$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（１２，３５，３７）

$x=64$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（１６，６３，６５）

を得る。

（ⅱ） $y=2$ のとき，$x=(2m-1)^2\times 2$ とする。

$x=50$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（５，１２，１３）

を得る。

(2) 等式 $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$ …②において，

$n=24$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（７，２４，２５）

$n=40$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（９，４０，４１）

$n=60$ のとき，①から（$a$，$b$，$c$）＝（１１，６０，６１）

を得る。

＜参考＞　等式は上記以外に次のようなものも考えられる。

$$(s^2-t^2)^2+(2st)^2=(s^2+t^2)^2 \quad \cdots (*)$$

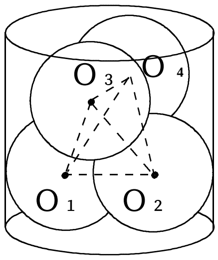
$$4n+(n-1)^2=(n+1)^2$$

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=1$$

ただし，(＊)の等式は，一般解となる。

4

(1)




4つの球の中心をそれぞれ$O_1$～$O_4$とする。

また，線分$O_1O_2$，$O_3O_4$の中点をそれぞれ，M，Nとする。

$2+O_1O_2=2R$より，

$O_1O_2=2(R-1)$となる。

$\triangle O_1O_2O_3$は二等辺三角形だから，

$(O_1O_3)^2=O_1M^2+O_3M^2$より，$O_3M^2=4-(R-1)^2$

また，$\triangle MO_3O_4$は二等辺三角形だから，

$O_3M^2=MN^2+O_3N^2$より，

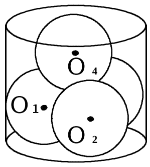
$MN^2=4-2(R-1)^2=2+4R-2R^2$…①

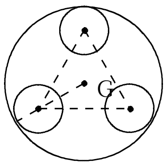
ここで，$2+4R-2R^2\geqq 0$を解くと，$1-\sqrt{2}\leqq R\leqq 1+\sqrt{2}$

以上より，$H=2+MN$

$=2+\sqrt{2+4R-2R^2}$　$(2\leqq R\leqq 1+\sqrt{2})$

(2)




（真上から見る）

4つの球の中心をそれぞれ$O_1$～$O_4$とする。

四面体$O_1O_2O_3O_4$の高さを$h$とすると，

$H=2+h$…①となる。

$\triangle O_1O_2O_3$の重心をGとすると，

$O_1G=R-1$となるので，

$O_4G^2=(O_1O_4)^2-O_1G^2$　$(O_4G=h)$

$=4-(R-1)^2$

$=3+2R-R^2$

こで，$3+2R-R^2\geqq 0$を解くと，

$-1\leqq R\leqq 3$

以上より，

$H=2+\sqrt{3+2R-R^2}$　$\left(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqq R\leqq 3\right)$

5

(1) $5x+7y=26=5+21$ より，$(x,\ y)=(1,\ 3)$

(2) $y=-\dfrac{5}{7}x+\dfrac{N}{7}$ において，$N=105$ とする。

$(x,\ y)=(7,\ 10),\ (14,\ 5)$

＊イメージは，直線 $5x+7y=N$ 上の格子点の数を，$x>0$，$y>0$ の範囲で考えることと同義である。

(3) $N=35$ のとき，

$5x+7y=35$ から，$5x=7(5-y)$ となる。

5と7との公約数が1であるから，$5-y$ は5の倍数となるはずだが，$0<5-y<5$ より，$5-y$ は5の倍数とならないので，$N=35$ のときは，$N=5x+7y$ で表すことができない。

$N\geqq 36$ として考える。

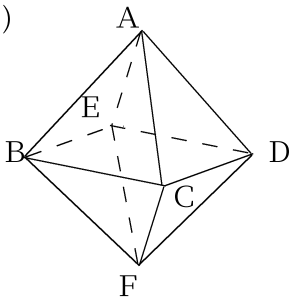
$N=36$ のとき，$36=5\times 3+7\times 3$ …①
$N=37$ のとき，$37=5\times 6+7\times 1$ …②
$N=38$ のとき，$38=5\times 2+7\times 4$ …③
$N=39$ のとき，$39=5\times 5+7\times 2$ …④
$N=40$ のとき，$40=5\times 1+7\times 5$ …⑤となり，
$N=5x+7y$ で表すことができる。

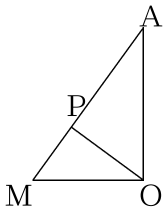
したがって，①～⑤の両辺に5を加えることで，41以上の整数について，$N=5x+7y$ で表すことができる。

よって，求める数Mは36である。

6

(1)




辺BCに中点をM，対角線BD，CEの交点をOとする。

対称性から，球の中心は，点Oと一致する。また，面ABCと球との接点を点Pとすると，Pは線分AM上の点となる。

OP⊥AMより

△OPM∽△AOM

したがって，OP：OM＝AO：AM

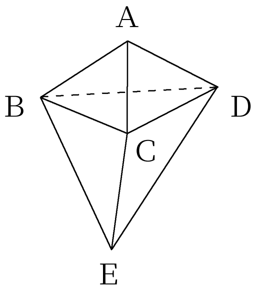
ここで，

$AO^2=AM^2-OM^2$より

$AO^2=\dfrac{1}{2}$から，

OM・AO＝OP・AMより，$OP=\dfrac{OM\cdot AO}{AM}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

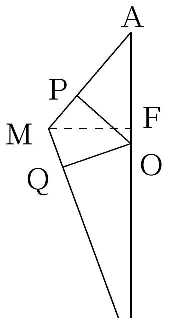
(2)




立体の各頂点を改めて，左図のようにする。

対称性により，求める球の中心は，線分AE上にある。また，辺BCの中点をMとすると，球と△ABC，△BCEとの接点は，線分AM，ME上の点となる。

球の中心を点O，△ABC，△BCEとの接点をそれぞれ点P，Qとし，線分AEと△BCDとの交点を点Fとする。




$AM^2=MF^2+FA^2$，$AM=1$，

$MF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$より，$FA=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$EM^2=MF^2+FE^2$より，

$FE=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

よって，$AE=\sqrt{6}$ …①

△APO∽△AFMより，

AO：OP＝AM：MF　∴ $AO=\sqrt{3}\,OP$

△OQE∽△MFEより，OE：OQ＝ME：MF

∴ $OE=3OQ$

以上より，$AO+OE=AE=\sqrt{6}$，OP＝OQより，

$(\sqrt{3}+3)OP=\sqrt{6}$

$OP=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(2) ＜別解　①以降＞

立体の体積をV，△BCDの面積を$S_1$，球の半径を$r$とする。

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$より，

$V=\frac{1}{3}\cdot AE\cdot S_1=\sqrt{2}\cdots$②

一方，△ABC＝1より，

$V=3\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot r+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot r\right)$

$=(1+\sqrt{3})r\cdots$③

よって，②，③より　$r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$