平成１３年度

群馬県高校生

数学コンテスト

注　意　事　項

1　問題は，１ページと２ページです。解答用紙は４枚あります。
2　解答は，すべて解答用紙に記入してください。また，解答用紙の「問題番号」欄に選択した問題番号を記入し，さらにコンテスト番号と氏名も記入してください。
3　必要があれば，電卓を用いてもかまいません。また、問題用紙を折ったり、切ったりしてもかまいません。
4　作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。
5　制限時間は３時間です（13：30〜16：30)。６問中４問を選択して解答してください。
6　トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

1　次の(1),(2)の問に答えなさい。

(1)『４桁の整数 2759 に対して，2759 をくり返して８桁の整数 27592759 をつくると，できた８桁の整数は 73 で割り切れます。』

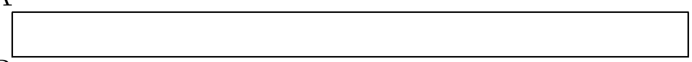
どんな４桁の整数に対しても，このように同じ４桁の整数をくり返してできる８桁の整数は 73 で割り切れることを証明しなさい。

(2)『１桁の正の整数・，・に対し，十の位を・，一の位を・とする２桁の整数を $\overline{\cdot\ \cdot}$ と表すとき，$(8+1)^2=81$ のように，$(\cdot+\cdot)^2=\overline{\cdot\ \cdot}$ となる・，・が存在します。』

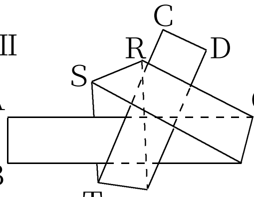
２桁の正の整数 $\overline{\cdot\ \cdot}$，$\overline{\cdot\ \cdot}$ に対し，各位の数が・，・，・，・である４桁の整数を $\overline{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}$ と表すとき，$(\overline{\cdot\ \cdot}+\overline{\cdot\ \cdot})^2=\overline{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}$ となる２桁の整数 $\overline{\cdot\ \cdot}$，$\overline{\cdot\ \cdot}$ は存在しますか。存在するときは，その整数をすべて求めなさい。存在しないときは，その理由を述べなさい。

2　下の図Ｉのような，長方形の帯があります。それを図Ⅱのようにして，折り目ＴＵが辺ＢＰと，折り目ＰＱが辺ＵＤとそれぞれ重なり，さらに２点Ｓ，Ｒがそれぞれ辺ＡＱ，ＴＣ上の点となるように結んで，結び目が５角形となるようにします。このとき，次の(1)，(2)の問に答えなさい。

図Ｉ



図Ⅱ



(1) この５角形は，正５角形となることを証明しなさい。

(2) (1)でＡＢ＝・のとき，その正５角形の１辺の長さを求めなさい。

3　縦 20cm，横 20cm，高さ 10cm の箱を，包装紙で包むとします。次の(1)，(2)の包装紙を用いた場合，下の条件①，②を同時に満たすように，包むことができるでしょうか。できる場合は，包装紙の折り方を図示し，その方法を説明しなさい。できない場合は，その理由を説明しなさい。

(1) 縦 30cm，横 60cm の長方形の包装紙。

(2) 縦 45cm，横 45cm の正方形の包装紙。

包むときの条件

① 包装紙を切らない。

② この箱のすべての面が包装紙で覆（おお）われる。

4　２以上の正の整数ｎに対して，$\dfrac{1}{n}$ のように分子が１である分数を単位分数と呼ぶことにする。

このとき，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{7}{8}$ は次のように分母の異なる単位分数の和で表すことができる。

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\ ,\quad \frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

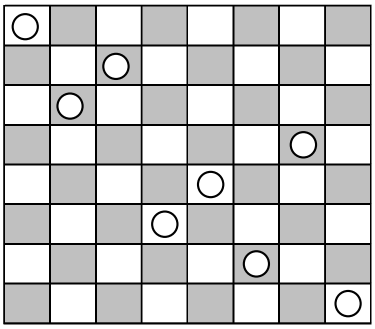
次の(1)，(2)の問に答えなさい。

(1)　$\dfrac{8}{11}$ を分母の異なる単位分数の和で表しなさい。

(2)　１より小さい正の既約分数 $\dfrac{・}{・}$ （２≦・＜・，・と・の公約数は１）は，分母の異なる単位分数の有限個の和で表すことができることを説明しなさい。

5　右の図は，８個の駒を下の条件に従って，チェス盤の上に置いた一例である。

条件に従って８個の駒をチェス盤の上に置く場合，どのように駒を置いても，黒い目の上に置かれる駒の数は，常に，偶数個（０個の場合も含む）であることを証明しなさい。



条　件

チェス盤の各列に置くことができる駒の数は１個とし，かつ，各行に置くことができる駒の数も１個とする。

6　下の図は，底面の半径がＲで，底面の直径と高さが等しい直円柱に，半径ｒの球７個を下から３個，１個，３個の順に積み重ねたものである。一番下の３個の球はどれも円柱の底面に接し，一番上の３個の球はどれも円柱の上面に接しているとき，Ｒをｒで表しなさい。

ただし，積み重なった球の，中央の１個の球は，上の３個の球及び下の３個の球にそれぞれ接しているものとする。