平成１３年度群馬県高校生数学コンテストのまとめ

Ⅰ．　概　要

平成１０年度より始めた数学コンテストも、今年度で４回目となった。参加者は、２１５名（１９校）と昨年を１９名下回ったものの、参加校数は１校上回った。参加者の中には、２年、３年連続の参加者が見られた。

最優秀賞１名、優秀賞７名、奨励賞１５名、アイデア賞１２名の者が受賞したが、最優秀賞受賞者は２年連続の受賞であり、優秀賞の中にも２年連続の受賞者が１名いた。また、優秀賞をはじめとして１年生の受賞者も多く、今後が楽しみである。

会場は、前橋高校、高崎高校、太田高校、渋川工業高校の４会場とした。

コンテストの形式は、例年どおり数学的発想を問う問題６題から４題を選択し、３時間で解答するものとしたが、電卓の使用や問題用紙の切り取り等を認めた。参加生徒は３時間集中して取り組んでいた。この経験が今後の学習に生かされることを期待する。

答案については、発想のユニークなものや論理的に整理されたすばらしいものが見られた。反面、答えのみや式変形だけのものも見られ、的確に表現する力が求められる。なお、今年度は選択した４題すべてを正解した者が１名いた。

各問題の正答率等は下表のとおりである。

○　正答率

(1) 問題ごとの正答率

問題番号	1	2	3	4	5	6
解答数	131	54	161	168	150	129
正　答	11	0	37	6	28	47
正答率	8.4	0.0	23.0	3.6	18.7	36.4

(2) 設問ごとの正答率

問題番号	1		2		3		4	
設　問	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
正　答	117	13	0	1	119	48	128	6
正答率	89.3	9.9	0.0	1.9	73.9	29.8	76.2	3.6

○　参加生徒の内訳

	１年		２年		３年		計	
	男	女	男	女	男	女	男	女
普通科	65	8	99	9	16	5	180	22
工業科	2	0	0	0	0	0	2	0
理数科	1	1	4	0	1	0	6	1
総合学科	0	0	4	0	0	0	4	0
計	68	9	107	9	17	5	192	23

Ⅱ．　各設問について

1　次の(1),(2)の問に答えなさい。

(1) 『４桁の整数 2759 に対して，2759 をくり返して８桁の整数 27592759 をつくると，できた８桁の整数は 73 で割り切れます。』

　どんな４桁の整数に対しても，このように同じ４桁の整数をくり返してできる８桁の整数は 73 で割り切れることを証明しなさい。

(2) 『１桁の正の整数 a，b に対し，十の位を a，一の位を b とする２桁の整数を $\overline{ab}$ と表すとき，$(8+1)^2=81$ のように，$(a+b)^2=\overline{ab}$ となる a，b が存在します。』

　２桁の正の整数 $\overline{ab}$，$\overline{cd}$ に対し，各位の数が a，b，c，d である４桁の整数を $\overline{abcd}$ と表すとき，$(\overline{ab}+\overline{cd})^2=\overline{abcd}$ となる２桁の整数 $\overline{ab}$，$\overline{cd}$ は存在しますか。存在するときは，その整数をすべて求めなさい。存在しないときは，その理由を述べなさい。

[解答例]

(1)　４桁の任意の整数を a とする。この a に対して，a をくり返して出きる８桁の整数は $10000a+a=10001a=(137\times 73)a$ となる。

　よって，どんな４桁の整数に対しても，その数をくり返して出きる８桁の整数は 73 で割り切れる。

(2)　２桁の整数 x，y に対し，$(x+y)^2=100x+y$ …①　となるときの，x，y を調べる。

・　０～９の各数を２乗したとき，一の位に現れる数は，０，１，４，５，６，９のいずれかであるので，y の一の位の数は，０，１，４，５，６，９のうちのどれかである。…（＊）

・　$(x+y)^2=100x+y$ を x について整理すると，

$$x^2-2(50-y)x+y^2-y=0 \quad \cdots②$$　となる。

　この x の２次方程式の解が，２桁の整数となる条件を求める。

ここで，$D=4(50-y)^2-4(y^2-y)$ とすると，

②の方程式の解は，$x=50-y\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}$　となる。

$\dfrac{D}{4}=(y-50)^2-(y^2-y)=2500-99y\geqq 0$ より，$10\leqq y\leqq 25$ …③

・$(y)=2500-99y$ とする。

・$(10)=1510$，・$(11)=1411$，・$(14)=1114$，・$(15)=1015$，・$(16)=916$，・$(19)=619$，・$(20)=520$，・$(21)=421$，・$(24)=124$，・$(25)=25$ のうち，平方数となるのは，$y=25$ のときだけである。このときの x の値は，20，30 である。

以上から，求める正の整数は（２０，２５），（３０，２５）である。

[出題の意図]

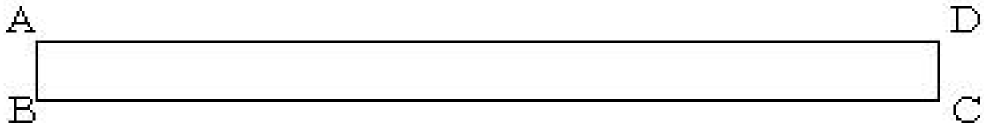
　整数についての性質を問う問題である。２桁の整数すべてについて検証すれば，結果を得ることができるが、２乗したときの一の位の数に着目して整理していくことをねらいとした。

[講　　評]

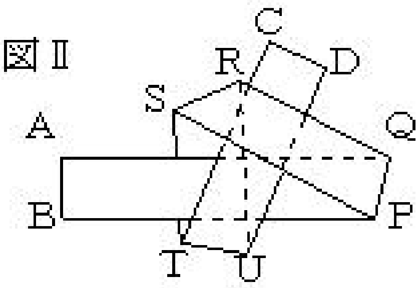
　(1)については，正答者が多かったが，(2)については，答えのみであったり，条件の絞り込みが不十分であったり等正答者数は少なかった。

２　下の図Ⅰのような，長方形の帯があります。それを図Ⅱのようにして，折り目ＴＵが辺ＢＰと，折り目ＰＱが辺ＵＤとそれぞれ重なり，さらに２点Ｓ，Ｒがそれぞれ辺ＡＱ，ＴＣ上の点となるように結んで，結び目が５角形となるようにします。このとき，次の(1)，(2)の問に答えなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



(1) この５角形は，正５角形となることを証明しなさい。

(2) (1)でＡＢ＝aのとき，その正５角形の１辺の長さを求めなさい。

[解答例]

(1)　図Ⅰは条件の通り結んでできる図形であり，折り目と，各点の関係は図Ⅱのようになる。また，このとき，点Ｐと点Ｕは重なる。

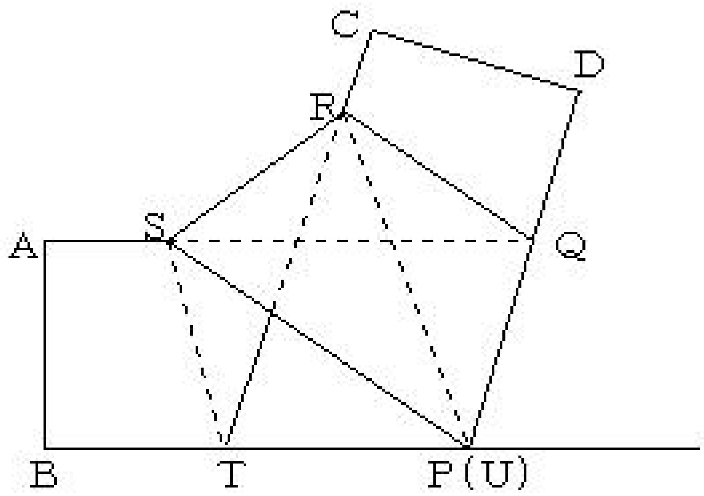
図Ⅰにおいて，
ＱＲ∥ＰＳ，ＰＱ∥ＴＲ，
ＳＴ∥ＲＰである。

図Ⅱから、∠ＢＰＱ＝θとすると，∠ＰＱＲ＝θとなる。

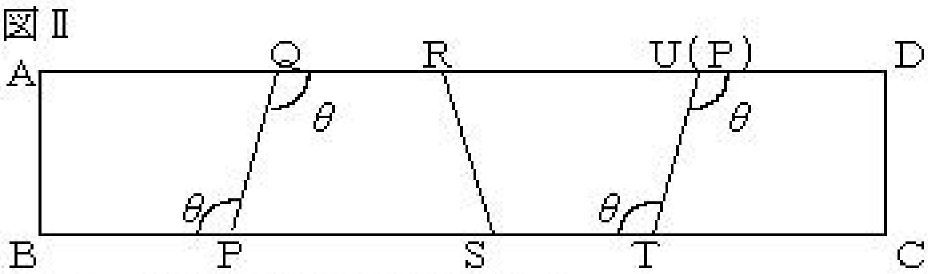
図Ⅰで，台形ＰＱＲＴにおいて，ＴＰ＝ＱＲ…①

また，ＰとＵとが重なることより，∠ＳＴＵ＝θとなるので，台形ＰＱＳＴにおいて，ＰＱ＝ＳＴ…②

図Ⅰ



図Ⅱ



よって，

△ＳＴＰ≡△ＱＰＴ≡△ＰＱＲ（２辺とその間の角が等しい）

ここで，∠ＴＰＳ＝α…③とおくと，

∠ＱＲＰ＝∠ＰＴＱ＝α，∠ＳＰＲ＝∠ＴＳＰ＝α（錯角）となるので，

△ＳＴＰは∠ＴＳＰ＝∠ＴＰＳ＝αの二等辺三角形となる。

よって，①，②より，ＳＴ＝ＴＰ＝ＰＱ＝ＱＲ…④

また，θ＝３αとなり，△ＳＴＰの内角の和は，５αとなる。よって，α＝３６°，θ＝１０８°

以上より，4辺が等しく，その挟む角が１０８°から，正五角形となる。

(2)　正五角形の一辺の長さを１，対角線の長さをtとしたとき，

$t:1=1:(t-1)$ より，$t^2-t-1=0$

よって，$t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　($t>0$)

したがって，正五角形の一辺の長さをℓとしたとき，対角線の長さは$t\ell$となる。

図Ⅰで，ＳからＢＴへ引いた垂線の足をＨとすると，

$ST^2=SH^2+TH^2$ すなわち，$\ell^2=a^2+\left(\frac{1}{2}(t\ell-\ell)\right)^2$

これを解くと，

$$\ell=\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-\sqrt{5}}}{5}a$$

[出題の意図]

日常的なものに題材を求めた。一般に，帯を折ると重なりの部分が二等辺三角形となることを手がかりに，初等幾何的なアプローチも可能となるようにした。

[講　　評]

６題中，選択者は一番少なかったが，問題用紙を切り取って，考察している生徒が見られた。

証明において，５つの辺または内角がすべて等しいことだけで正五角形になるとしている解答があった。

３　縦 20cm，横 20cm，高さ 10cm の箱を，包装紙で包むとします。次の(1)，(2)の包装紙を用いた場合，下の条件①，②を同時に満たすように，包むことができるでしょうか。できる場合は，包装紙の折り方を図示し，その方法を説明しなさい。できない場合は，その理由を説明しなさい。

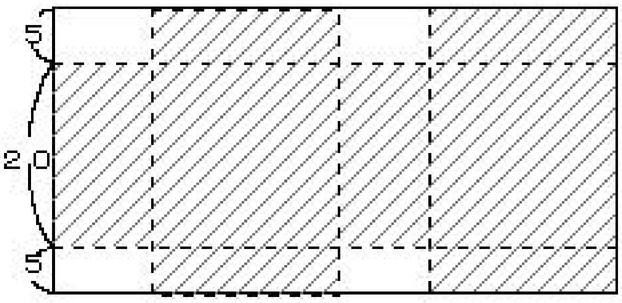
(1) 縦 30cm，横 60cm の長方形の包装紙。

(2) 縦 45cm，横 45cm の正方形の包装紙。

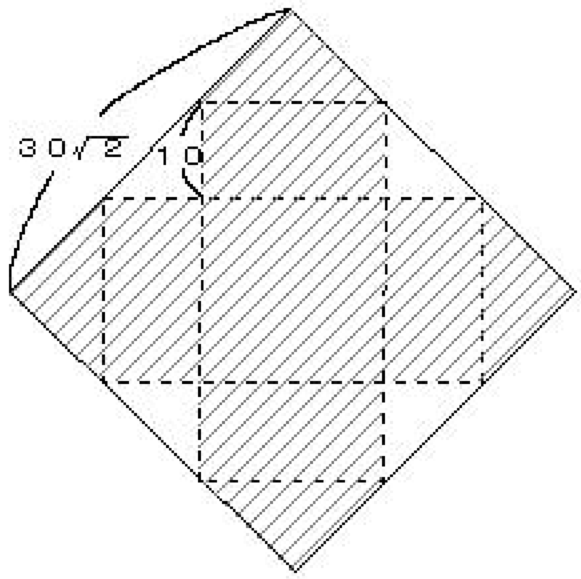
包むときの条件
①　包装紙を切らない。
②　この箱のすべての面が包装紙で覆われる。

[解答例]

(1)　包むことができる。
右図において，点線で折ると斜線部分が，箱を包むことになる。



(2)　包むことができる。
右図の正方形は，一辺が$30\sqrt{2}$であり，点線で折ると，斜線部分が，箱を包むことになる。
また，$30\sqrt{2} < 45$より，包むことができる



[出題の意図]

日常的なものに題材を求めた。箱を包装紙で包む場合，箱の展開図すべてが包装紙に収まっていなくても包むことができる。(2)のように，対角線に着目することにより，より小さい包装紙であっても，箱を包むことが可能であることを発見させる目的で出題した。

[講　　評]

消しゴムを問題用紙で包む等の試行錯誤を行っている者が見られた。このように試行錯誤をすることに，数学の原点があると思う。(1)は，正答者が多かった。(2)では，展開図にこだわったためか，正答者は少なかった。反面，対角線に着目してきちんとした証明を行った者もいた。

4　２以上の正の整数ｎに対して，$\dfrac{1}{\mathrm{n}}$ のように分子が１である分数を単位分数と呼ぶことにする。

このとき，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{7}{8}$ は次のように分母の異なる単位分数の和で表すことができる。

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\ ,\quad \frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

次の(1)，(2)の問に答えなさい。

(1)　$\dfrac{8}{11}$ を分母の異なる単位分数の和で表しなさい。

(2)　１より小さい正の既約分数 $\dfrac{a}{b}$ （$2 \leqq a < b$，a と b の公約数は１）は，分母の異なる単位分数の有限個の和で表すことができることを説明しなさい。

[解答例]

(1) $\dfrac{8}{11}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{37}+\dfrac{1}{4070}$

$\dfrac{8}{11}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{22}+\dfrac{1}{66}$ など。

(2)

$\dfrac{1}{\mathrm{N}}<\dfrac{a}{b}$ を満たす正の整数Ｎのうちで，最小の整数をｎとする。

$\dfrac{1}{\mathrm{n}}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{1}{\mathrm{n}-1}$ より，$(\mathrm{n}-1)a<b<\mathrm{n}a$

b を a で割った商をｑ，余りをｒとすると，

$$b=qa+r=(q+1)a-(a-r) \qquad 1 \leqq a-r \leqq a-1$$

と表すことができる。よって，

$$a=\frac{b+a-r}{q+1}$$

このとき，

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b+a-r}{b(q+1)}=\dfrac{1}{q+1}+\dfrac{a-r}{b(q+1)}$ と表される。

ここで，

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{qa+r}<\dfrac{a}{qa}=\dfrac{1}{q}$ より　$\dfrac{1}{q+1}$ は $\dfrac{a}{b}$ を越えない最も大きな単位分数であり，さらに

$\dfrac{1}{q+1}>\dfrac{a-r}{b(q+1)}$　が成り立つ。

ここで，

$b(q+1)$ と $a-r$ との最大公約数を m とすると，

$b(q+1)=mb'$，$a-r=ma'$ で

$$\frac{a'}{b'}<\frac{1}{q+1} \text{ かつ } 1 \leqq a' \leqq a-1$$

より，$b' = q'a' + r' = (q'+1)a' - (a'-r')$ として同様の操作をくり返すことにより，分子$(=a')$は前の分子$(=a)$より小さくなるので，有限回くり返せば，単位分数が得られる。

[出題の意図]

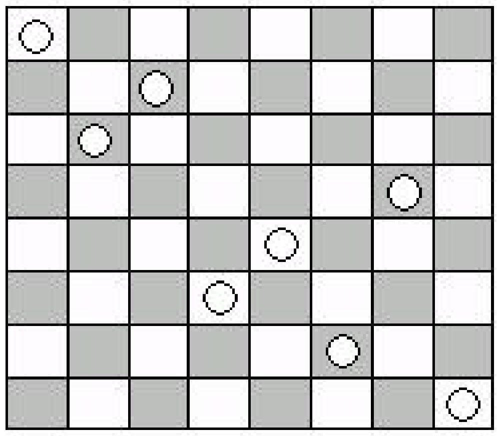
小学校から学んでいる分数は慣れ親しんでいるようで，意外に隠された様々な性質がある。本問では，ある分数とそれを超えない最大の単位分数との差をとり，得られた分数について同様のことを行う。このことを繰り返すと，最終的には，分母の異なる単位分数の和で表すことができることを発見させる目的で出題した。

[講　　評]

(1)については，正答率も高く，また，何種類かの解答が見られたが，計算ミスも見られた。(2)では，例を参考に，与えられた分数を超えない最大の単位分数で，順次差を取るときの，分子の規則性に気づくか，さらに，それをどう表現するかがポイントとなった。

5　右の図は，８個の駒を下の条件に従って，チェス盤の上に置いた一例である。

条件に従って８個の駒をチェス盤の上に置く場合，どのように駒を置いても，黒い目の上に置かれる駒の数は，常に，偶数個（０個の場合も含む）であることを証明しなさい。

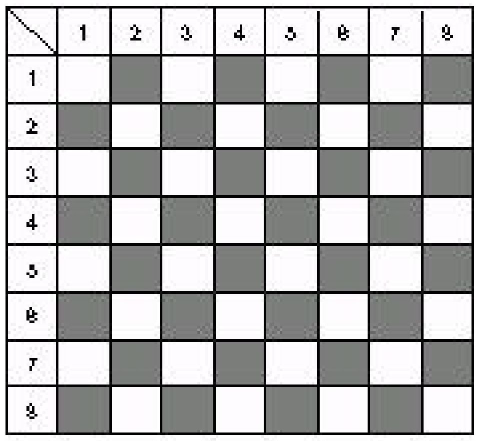


条　件

チェス盤の各列に置くことができる駒の数は１個とし，かつ，各行に置くことができる駒の数も１個とする。

[解答例]

右図のように，チェス盤の行と列に番号を付ける。



例えば，３行４列の盤の目が黒であるように，チェス盤の黒い目における，行番号と列番号の和は，常に奇数であり，白い目における行番号と列番号の和は偶数となっている。

ℓ行m列に置いた駒を$a_{\ell,m}$と表す。例えば，３行４列（黒い目）に置いた駒は，$a_{3,4}$となる。

さて，８個の駒を条件通り，チェス盤上に置いたとき，各行，各列には，それぞれ１個の駒があるので，各$a_{\ell,m}$について，ℓは，１～８までの値を重複することなくとり，mも，１～８までの値を重複することなくとるので，これらの値の総和は，$2(1+\cdots+8)=72$となる。

また，各駒について，$\ell+m$の値は，偶数（白い目）か奇数（黒い目）である。

今，総和が偶数であるから，各駒について，$\ell+m$の値が奇数となる駒の数は，０個か偶数個である。したがって，黒い目の上に置かれた駒の数は，偶数個か０個である。

[出題の意図]

条件を満たすように８個の駒を置くことはやさしい。

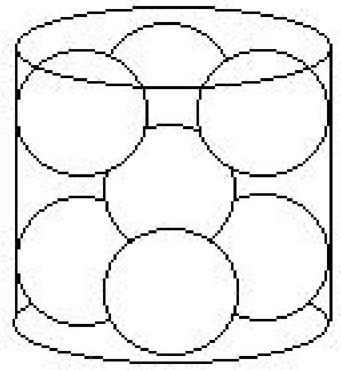
すべての場合について置くことができることの証明をする中で，数学的考え方の良さを知る１例として出題した。

[講　　評]

解答例のような解答の他に，樹形図を用いたもの，置換の考え方等発想の豊かさが見られたが，説明の不十分なものもあった。

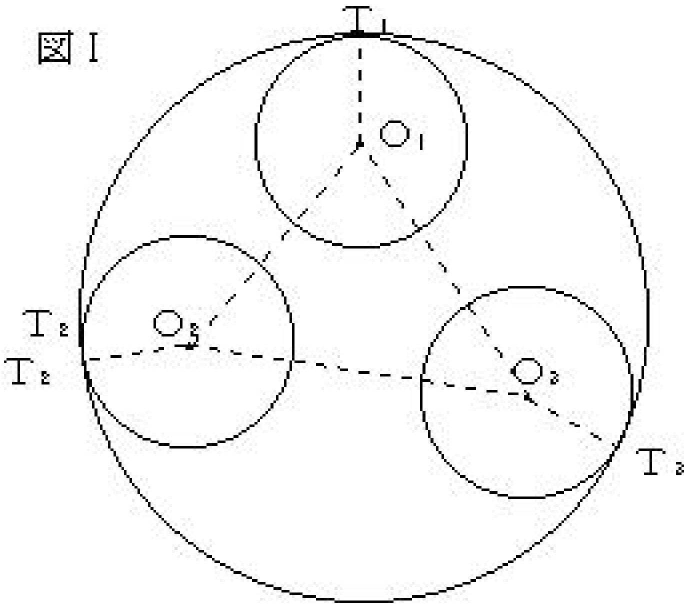
6　下の図は，底面の半径がＲで，底面の直径と高さが等しい直円柱に，半径ｒの球７個を下から３個，１個，３個の順に積み重ねたものである。一番下の３個の球はどれも円柱の底面に接し，一番上の３個の球はどれも円柱の上面に接しているとき，Ｒをｒで表しなさい。

　ただし，積み重なった球の，中央の１個の球は，上の３個の球及び下の３個の球にそれぞれ接しているものとする。



[解答例]

図Ⅰ



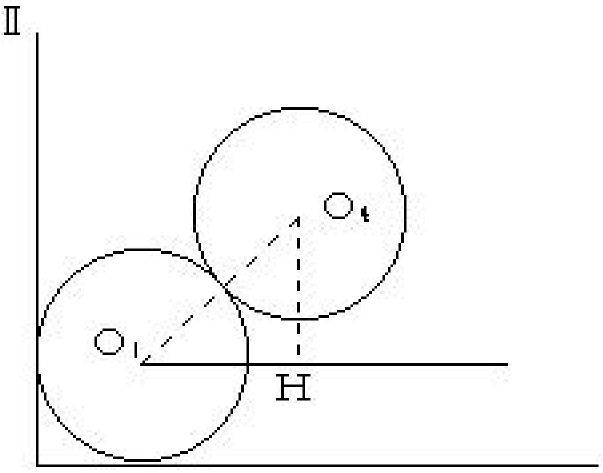
　図Ⅰで大きい円の半径をＲ，小さい円の半径をｒとする。

　小さい円の中心をそれぞれO_1～O_3とし，接点をT_1～T_3とする。

　$\triangle T_1T_2T_3$ の外心（大きい円の中心）をOとすると，直線O_1T_1，O_2T_2，O_3T_3は，中心Oを通る。

　また，$OO_1 = OT_1 - O_1T_1 = R - r$ より，$OO_2 = OO_3 = R - r$ となり，$\triangle O_1O_2O_3$ の外心も点Oとなる。…（＊）

図Ⅱ



　図Ⅱは，直円柱に７個の球を入れたときの，断面図の一部である。１番下の各球の中心をO_1，O_2，O_3 とし，中央の球の中心をO_4 とする。また，O_4 から$\triangle O_1O_2O_3$ へ下ろした垂線の足をＨとする。

　O_4Hの長さを ℓ とすると，$O_4O_1 = O_4O_2 = O_4O_3 = 2r$ より，

　$O_1H^2 = O_2H^2 = O_3H^2 = 4r^2 - \ell^2$

となり，Ｈ は$\triangle O_1O_2O_3$の外心となる。

　このことは，（＊）より，$\triangle O_1O_2O_3$の外心は３つの球の位置に関係なく底面の中心の鉛直線上にあることから，O_4Hの長さは，３つの球の位置に関係なく一定であることを示している。

　以上から，題意を満たす，Ｒとｒの関係は，

　　$\ell + r = R$…①　である。

　（＊）より，$O_1H = R - r$ となるので，①から，$\sqrt{2}\,\ell = 2r$

　よって，$R = (1 + \sqrt{2})r$

[出題の意図]

　球を題材とした空間図形の出題です。中央の球と他の球との関係を見抜くことがポイントであり，上下３つの球は自由に動かすことができることを発見することを目的とした。

[講　　評]

　球の位置関係をしっかりとらえた解答がおおく，ポイントも押さえられていた。一方，中央の球の中心と下の３つの球の各中心とが，正四面体の頂点になると，誤解した解答も見られた。