

平成12年度
群馬県高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページと2ページです。解答用紙は4枚あります。
- 2 解答は、すべて解答用紙に記入してください。また、解答用紙の「問題番号」欄に選択した問題番号を記入し、さらにコンテスト番号と氏名も記入してください。
- 3 必要があれば、電卓を用いてもかまいません。また、問題用紙を折ったり、切ったりしてもかまいません。
- 4 作図をする場合は、定規、コンパスを用いてください。
- 5 制限時間は3時間です(13:30~16:30)。6問中4問を選択して解答してください。
- 6 トイレ等に行くときは監督の指示に従ってください。

- 1 3桁^{けた}の自然数で、各桁の数字のうち少なくとも1つは異なるような、ある数をNとする。『Nについて、下の「操作」を行い、得られた新しい数をNとする。』

このことを繰り返すと、どんな数が得られますか。また、その数が得られる理由を説明しなさい。

操 作

- ① Nの各桁の数字を大きい順に並べ替えて得られた数をXとする。
 ② Nの各桁の数字を小さい順に並べ替えて得られた数をYとする。
 ただし、百の位が0のときは2桁の数とし、百、十の位が共に0のときは1桁の数とする。
 ③ XからYを引き、新しい数を得る。
 ただし、 $X - Y$ が2桁の数の場合は、10倍した数を新しい数とする。

(例)・N=609のとき、 $X=960$ 、 $Y=69 (=069) \rightarrow X - Y = 891$
 ・N=100のとき、 $X=100$ 、 $Y=1 (=001) \rightarrow X - Y = 99$ であるから、新しい数は990である。

- 2 次の(1), (2)の問いに答えなさい。

- (1) ある円に内接する長方形のうちで、面積が最大となるのは正方形である。このことを証明しなさい。
 (2) ある円に内接する四角形のうちで、面積が最大となるのは正方形である。このことを証明しなさい。

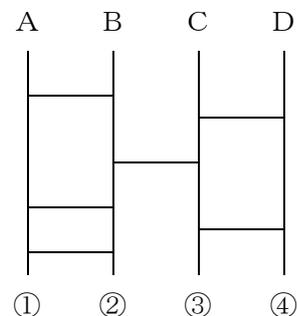
- 3 右の図は、4人が引く「あみだくじ」の例である。

4人の引く「あみだくじ」について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。ただし、各縦線の間には、1本以上の横線が引かれるものとする。

- (1) 「A, B, C, Dは、横線の引き方によらず、それぞれ①, ②, ③, ④のいずれかに、重複することなく達する。」ことを示しなさい。
 (2) $A \rightarrow ①, B \rightarrow ②, C \rightarrow ③, D \rightarrow ④$ となる場合の、あみだくじの横線は最低何本必要ですか、その本数とそうなる理由を答えなさい。また、そのときの例を2つあげなさい。

ただし、A, B, C, D, ①, ②, ③, ④の配置は、右図のとおりとする。

A→④, B→①, C→③
 D→②となる「あみだくじ」の例



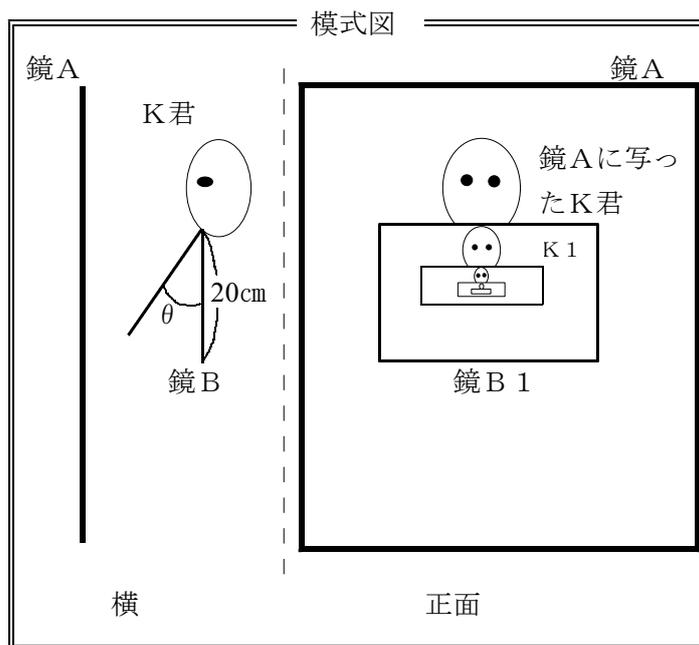
- 4 K君は、長方形の鏡Bを持って長方形の大きな鏡Aの前に立ち、鏡Bの上の縁を唇の下に合わせた。

この合わせたところを支点として、鏡Bを鏡Aの方向へ角 θ 傾けると、鏡Aに写る鏡B（鏡B1）に、K君の顔が写った。

鏡B1に写るK君の顔で、最大のをK1とすると、K君は、 θ がある角度から 30° の範囲で、K1の目を見ることができた。

K君の目から鏡Bの上の縁

までの長さが10cm、鏡Bの上の縁から下の縁までの長さが20cmのとき、K君と鏡Aとの距離を求めなさい。ただし、K君を鏡Aと平行な平面、K君の目は点とする。



- 5 次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

- (1) 一辺の長さが \cdot である正四面体の体積を求めなさい。
- (2) 一辺の長さが \cdot である2つの正四面体 $ABCD$ と正四面体 $PQRS$ が同一の球に内接しており、 $BC \parallel QR$ 、 $CD \parallel RS$ 、2点 A 、 P は球の直径の両端の点である。
- このとき、2つの正四面体が重なる部分の体積を \cdot を用いて表しなさい。

- 6 次の(1)~(3)の問いに答えなさい。なお、電卓だけで結論を得た場合は、結論に達した過程を、簡潔に説明すること。

- (1) 整数 $\underline{25}$ を平方すると $6\underline{25}$ となり、下2桁の数字は変わらない。
- 2桁の整数を平方したとき、下2桁の数字の変わらない整数は25の他にありませんか。存在するならば、その数をすべてあげなさい。存在しないならば、その理由を説明しなさい。
- (2) 3桁の整数を平方したとき、下3桁の数字の変わらない整数はあるのでしょうか。存在するならば、その数をすべてあげなさい。存在しないならば、その理由を説明しなさい。
- (3) 4桁および5桁の整数について、その数を平方したとき、4桁の整数で下4桁の数字が、5桁の整数で下5桁の数字が変わらない整数があるのでしょうか。存在するならば、それぞれの桁についてその数をすべてあげなさい。存在しないならば、その理由を説明しなさい。