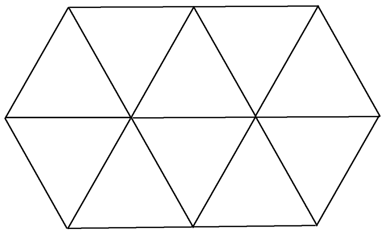
平成１０年度群馬県高校生

数学コンテスト問題

1　西暦２０００年は「１月１日が土曜日となる閏(うるう)年」である。この年の次にくる「１月１日が土曜となる閏年」は西暦何年ですか。

閏年
４年ごとに一日増やし、一年を３６６日とした年とする。

2　下の図は同じ大きさの正三角形のタイルで、平面を敷きつめたものです。次の（１）、（２）の問いに答えなさい。



（１）　同じ大きさの正多角形のタイルで平面を敷きつめることができるのは、正三角形のほかにどんなものがあるか、すべて求めなさい。また、求めたもの以外にはないことを証明しなさい。

（２）　正三角形と（１）で求めた正多角形のタイルをすべて用いて平面を敷きつめることができるでしょうか。できる場合はその敷き方を図示しなさい。できない場合は理由を述べなさい。
　ただし、それぞれのタイルの一辺の長さは、同じものとする。

3　　いま、コインを１０枚積んだ山がｎ個あります。このｎ個の山からＡ君とＢ君が右のルールに従って交互にコインを取っていき、最後にコインを取ることができなかった方を負けとするゲームをします。

ルール
①　一度に１つの山からコインを１枚以上何枚でも取ることができる
②　一度に複数の山からコインを取ることはできない

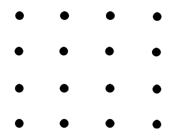
　次の（１）、（２）の問いに答えなさい。

（１）　ｎ＝２（ふた山）で、Ａ君から先に取り始めるとき、Ａ君がどのように取っても、Ｂ君が必ず勝つ取り方があります。Ｂ君はどのように取れば勝てるか、説明しなさい。

（２）　コインの山がｎ個あり、Ａ君が先に取ります。ｎの値によっては、Ｂ君がどのように取っても、Ａ君が必ず勝つことができる取り方があります。そのようなｎの条件を求めなさい。また、Ａ君の取り方を説明しなさい。

4　次の（１）、（２）の問いに答えなさい。

（１）右の図のように点（•）が格子状に１６（縦４×横４）個並んでいます。



　これらの点から３つ選んで結ぶといろいろな三角形を作ることができますが、正三角形を作ることはできるでしょうか。

（２）一般に、５以上の正の整数ｎに対して、点（・）が格子状にn^2（縦ｎ×横ｎ）個並んでいる。これらの点から３つ選び結んで正三角形を作ることができるでしょうか。できる場合はその例を示し、できない場合は理由を述べなさい。

5　１から４までの自然数が下のように並んでいます。□の中に１□２□３□４のように、＋か－を入れると計算結果を０とすることができます。

　　１□２□３□４

　では、１から１９９８までの自然数を下のように並べた場合、□の中に＋か－を入れて、計算結果を０とすることができるでしょうか。できる場合はその例を示し、できない場合は理由を述べなさい。

　　１□２□３□４□５□・・・□１９９７□１９９８

6　次の（１）、（２）の問いに答えなさい。必要ならば、下の $\boxed{}$ 内の内容を参考にしなさい。

（１）　任意の自然数Ｎについて、Ｎを９で割ったときの余りと、Ｎの各桁（けた）の数の和を９で割ったときの余りは等しいことを証明しなさい。

（２）　下の例は、各桁の数の和を求め、得られた数について、また各桁の数の和を求めて１桁の数を得ています。では、5^{100}について、下の例と同様に各桁の数の和を求めることを和が１桁になるまで繰り返したとき、得られる１桁の数を求めなさい。

　　例）　９９８→９＋９＋８＝２６→２＋６＝８より８

整数ａ、ｂを正の整数ｍで割ったときの余りが等しいとき、「ａとｂはｍを法として合同である」といい、「$a \equiv b \pmod{m}$」と表します。この式を合同式といいます。

　例１　８と１１は３で割ると共に余りは２だから、$8 \equiv 11 \pmod{3}$ と表せます。

定理１　　ｍを法とするとき
①　$a \equiv a \pmod{m}$　　②　$a \equiv b \pmod{m}$ ならば $b \equiv a \pmod{m}$
③　$a \equiv b \pmod{m}$ かつ $b \equiv c \pmod{m}$ ならば $a \equiv c \pmod{m}$

　例２　$-1 = 3 \times (-1) + 2$ より、－１を３で割ると余りは２だから $-1 \equiv 2 \pmod{3}$ と表せます。
　これは、左右を逆にして $2 \equiv -1 \pmod{3}$ と表すこともできます。さらに、$8 \equiv 2 \pmod{3}$ と $2 \equiv -1 \pmod{3}$ から $8 \equiv -1 \pmod{3}$ も成り立ちます。
　そこで、ａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｍを整数とするとき次の定理が成り立ちます。

定理２　$a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m}$ ならば、
①　$a + c \equiv b + d \pmod{m}$　②　$a - c \equiv b - d \pmod{m}$
③　$ac \equiv bd \pmod{m}$　　④　$a^k \equiv b^k \pmod{m}$（ただし、ｋは自然数）

　例３　「ｎが整数のとき、$n^2 + 4$は３の倍数ではない」を証明します。
（証明）ｎを３で割った余りは、０，１，２のいずれかであるから、ｎは３を法とすると $n \equiv 0$，$n \equiv 1$，$n \equiv 2$ のいずれかである。
ⅰ）　$n \equiv 0$ のとき、$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0$，$4 \equiv 1$ より $n^2 + 4 \equiv 0 + 1 \equiv 1$
ⅱ）　$n \equiv 1$ のとき、$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1$ より $n^2 + 4 \equiv 1 + 1 \equiv 2$
ⅲ）　$n \equiv 2$ のとき、$n^2 \equiv 2^2 \equiv 1$ より $n^2 + 4 \equiv 1 + 1 \equiv 2$
　以上より$n^2 + 4$を３で割ったときの余りは１または２となり、３の倍数ではないことが証明された。